Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — SS 2012, Serie A
Prof. Dr. G. Wang — 30.4.2012

---

**Aufgabe 1**

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge. Geben Sie die Definition von "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a$"($a$ aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) an.
(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann ebenfalls Nullfolge ist.
(iii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass auf die Vorausetzung $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt nicht verzichtet werden kann.

**Aufgabe 2**

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$(i)\, a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (ii)\, a_n = \frac{n^2-10n+5}{n-3n^2+7}, \qquad (iii)\, a_n = \frac{n^2-2}{n\sqrt{n}+2}$$

$$(iv)\, a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}, \qquad (v)\, a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \qquad (vi)\, a_n = \sqrt{n^4+1}-n^2,$$

$$(vii)\, a_n = \frac{4^{(2^n)}}{2^{(4^n)}}, \qquad (viii)\, a_n = \frac{n+\sin(n^2)}{n+\cos(n)}, \qquad (ix)\, a_n = \frac{n}{2^{\sqrt{n}}},$$

auf Konvergenz für $n \to \infty$ und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

**Aufgabe 3**

(a) Berechnen Sie für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n^2 q^n.$$

(b) Berechnen Sie für $\alpha \in (0,1)$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha).$$

**Aufgabe 4**

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $q \in (0,1)$ 2, so dass $|a_{n+1}-a_n| \le q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie, dass $a_n$ eine Cauchyfolge ist.

**Aufgabe 5**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+n}, \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n!}, \qquad (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$$

$$(iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{4^n}, \qquad (v)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}, \qquad (vi)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n},$$

$$(vii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}, \quad (viii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad (ix)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

**Aufgabe 6** (*Supremum und Infimum*)
Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A := \left\{ 2 + \frac{2}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \right\}; \quad B := \left\{ \frac{n-m}{n+m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Stelle fest, ob diese Mengen in $R$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und gib gegebenenfalls das Supremum bzw. Infimum an (mit Begründung!). Existiert ein Maximum bzw. ein Minimum?

**Aufgabe 7.**
Man berechne den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

$$\left( \frac{1+i}{1-i} \right)^{2012}.$$

**Aufgabe 8**
Man bestimme alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit

$$(i).\ |z-1| < |z+1|, \quad (ii).\ z^2 = -2i.$$

**Aufgabe 9.**
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3+n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{3^n(3n-1)} z^n$.

**Aufgabe 10.**
Beweisen Sie für $a_1, a_2, \cdots, a_n \in [0,1]$ die Ungleichung

$$\prod_{k=1}^{n} (1-a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$