Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — SS 2012, Serie A
Prof. Dr. G. Wang — 2.7.2012

Aufgabe 1
(a) Sei (a_n) eine Nullfolge und sei (b_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass dann die Folge der Produkte $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist.
(b) Zeigen Sie, dass (a) ohne die Beschränktheitsforderung falsch ist.

Aufgabe 2
Sei (x_n) eine Folge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Folge $(\frac{1}{x_n})$ ist genau dann eine Nullfolge, wenn die Folge (x_n) bestimmt divergent gegen ∞ ist.
(a) Zeigen Sie, dass jede nicht nach oben beschränkte Folge eine bestimmt gegen ∞ divergente Teilfolge besitzt.
(b) Sei (x_n) eine Folge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Null ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(\frac{1}{x_n})$, wenn die Folge (x_n) nicht nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 3
Es sei (s_n) die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gelte

$$s_n = \frac{n+1}{2n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bestimmen Sie die Glieder ak der Reihe mit Hilfe der Partialsummen s_n.
(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe 4
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig in D, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

(a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist. (b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (a) nicht gilt.

Aufgabe 5
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit und auf Lipschitz-Stetigkeit:
(a) $f : (\frac{1}{4}, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{2}+\sqrt{x}}$
(b) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$
(c) $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.

Aufgabe 6
Zeigen Sie: (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cos(-x) = \cos(x) \quad \sin(-x) = -\sin(x)$
(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

(Hinweis: Eulersche Formel: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.)

Aufgabe 7
Untersuche, ob die Funktion f an der Stelle x_0 stetig und gegebenenfalls differenzierbar ist.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & \text{für } x < 4 \\ \frac{4}{x} - 2 & \text{für } x \geq 4 \end{cases} \quad x_0 = 4. \qquad b)\ f(x) = |x-2|; \quad x_0 = 2.$$

Aufgabe 8
Für welche Werte der Parameter a und b ist die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + b\cos x + b + 1 & \text{für } x < 0 \\ be^x + ae^{-x} + 4x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 9
Geben Sie ein Beispiel unstetiger Funktionen $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, fr die $f \circ g$ stetig ist.

Aufgabe 10
Untersuchen Sie, ob

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

an den Nullstellen des Nenners stetig fortsetzbar ist.

Aufgabe 11
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen auf den angegebenen Intervallen stetig, gleichmig stetig oder Lipschitz-stetig sind:
a) $f(x) = x\ln x$, $x \in [0,1]$ b) $f(x) = \mathrm{e}^x/x$, $x \in [1,\infty)$ c) $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 12
Sei fr $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & , \ \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: f_1 ist stetig, aber nicht differenzierbar.
b) Untersuchen Sie die Stetigkeit der ersten und zweiten Ableitung von f_2.
c) Wie oft ist f_n differenzierbar, wie oft stetig differenzierbar?