Kapitel 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Existenz und Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem

Aus Zeitgründen müssen wir uns hier auf einen zentralen Aspekt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen beschränken, nämlich die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertaufgaben. Als Einstieg betrachten wir das Problem, die zeitliche Entwicklung einer Population (Bakterien, Bevölkerung, Kontostand, Atome, ...) vorherzusagen oder rückwärtig zu bestimmen. Wir interessieren uns also für die Größe $x(t)$ der Population innerhalb eines gewissen Zeitintervalls I. Dabei ist zur Zeit $t_0 \in I$ ein Wert $x(t_0) = x_0$ gegeben. Wir sprechen von einem Anfangswertproblem, auch wenn t_0 nicht der linke Endpunkt von I ist. Je nach Kontext sind viele verschiedene Wachstumsgesetze denkbar:

Beim natürlichen Wachstum (Kontostand, radioaktiver Zerfall) ist die Wachstums- oder Zerfallsgeschwindigkeit proportional zur vorhandenen Menge, mit fester Zuwachs- bzw. Zerfallsrate $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x' = \alpha x.$$

Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems ist $x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$. Dabei ergibt sich die Eindeutigkeit wie folgt: ist $x : I \to \mathbb{R}$ beliebige Lösung der Differentialgleichung, so gilt

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-\alpha t}x(t)\Big) = e^{-\alpha t}\,\big(x'(t) - \alpha x(t)\big) = 0,$$

also $x(t) = c\,e^{\alpha t}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung folgt weiter $x_0 = ce^{\alpha t_0}$ wie behauptet. Das sogenannte logistische Wachstum ist das Vermehrungsgesetz

$$x' = (\alpha - \beta x)x = \alpha x - \beta x^2 \quad \text{mit } \alpha, \beta > 0.$$

Als Motivation für den Zusatzterm $-\beta x$ kann das Beispiel einer Schafherde dienen, für die nur eine feste Weidefläche zur Verfügung steht. Ab einem gewissen Schwellenwert sollte die Zahl der Tiere dann wieder abnehmen. Im Fall $x_0 = x(t_0) > 0$ ist eine Lösung für $t \geq t_0$ durch folgende Formel gegeben, wobei die Eindeutigkeit schon weniger offensichtlich ist:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{\beta}{\alpha}\right)\, e^{-\alpha(t-t_0)}}.$$

Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen α/β. Das sogenannte Räuber-Beute Modell von Volterra und Lotka betrachtet zwei Populationen $x(t) =$ und $y(t)$, zum Beispiel Gänse und Füchse. Bei zuviel Füchsen wird die Vermehrungsrate der Gänse negativ, bei zuwenig Gänsen ist die Vermehrungsrate der Füchse negativ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind positive Konstanten):

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y' &= (-\gamma + \delta x)y. \end{aligned}$$

Es ergeben sich also zwei gekoppelte Gleichungen, deren Lösung nicht ohne weiteres ermittelt werden kann. Soll das Modell außerdem die jahreszeitliche Änderung der Futtersituation berücksichtigen, so müssen die Koeffizienten durch zeitabhängige Funktionen ersetzt werden. Allgemein interessieren wir uns für folgende Situation.

Definition 1.1 *Sei G offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$, $f = f(t,x)$. Eine Funktion $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, heißt Lösung der Differentialgleichung $x' = f(\,\cdot\,, x)$, falls*

(1.1) $$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) \text{ für alle } t \in I \quad (\text{insbesondere } (t, x(t)) \in G).$$

Gilt außerdem

(1.2) $$x(t_0) = x_0 \text{ für gegebenes } (t_0, x_0) \in G,$$

so heißt x Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

Die Differentialgleichung heißt autonom, wenn das Vektorfeld f nicht von der Zeit abhängt. Wir können uns $x(t)$ dann als Bahn eines Teilchens vorstellen, dass zur Zeit t_0 in x_0 startet und durch Vorgabe der Momentangeschwindigkeit $x'(t) = f(x(t))$ zur Zeit t gesteuert wird. Im nichtautonomen Fall ist die Steuerung zusätzlich zeitabhängig. Es stellen sich folgende Fragen:

1. Ist eine Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt?

2. Existiert eine Lösung des Anfangswertproblems?

3. Wie hängt die Lösung vom Anfangswert x_0 und dem Vektorfeld f ab?

In der Vorlesung werden aus Zeitgründen nur die ersten beiden Fragen befriedigend beantwortet, wobei wir mit der Eindeutigkeit beginnen.

Beispiel 1.1 Sei $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f(t,x) = 2\sqrt{|x|}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x) \qquad x(0) = 0$$

unendlich viele verschiedene Lösungen in $C^1(\mathbb{R})$, und zwar für $-\infty \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq \infty$

$$x_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} -(t-\alpha)^2 & \text{für } t < \alpha \\ \;\; 0 & \text{für } \alpha \leq t \leq \beta \\ (t-\beta)^2 & \text{für } t > \beta. \end{cases}$$

Für die Eindeutigkeit ist die Stetigkeit des Vektorfeldes f demnach nicht ausreichend.

Satz 1.1 (Eindeutigkeit der Lösung) *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in C^0(G)$ mit $D_x f \in C^0(G)$, so hat das Anfangswertproblem*

$$x' = f(\,\cdot\,, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

höchstens eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Für den Beweis brauchen wir die nachstehende Folgerung aus dem Schrankensatz, vgl. Satz 1.2 und Folgerung 1.1 in Kapitel 7.

Lemma 1.1 *Sei $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$, $f = f(t,x)$, mit $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$. Dann ist f lokal Lipschitzstetig bzgl. x: zu $(t_0, x_0) \in G$ gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(t_0, x_0) := \{(t,x) : |t - t_0| < \varepsilon, |x - x_0| < \varepsilon\} \subset G$ und eine Konstante $L \in [0, \infty)$ mit*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \quad \textit{für alle } (t, x_1), (t, x_2) \in U_\varepsilon(t_0, x_0).$$

Beweis von Satz 1.1 Seien $x_1, x_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems. Wir zeigen erst $x_1 = x_2$ auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ für ein geeignetes $\delta > 0$. Seien dazu $\varepsilon > 0$, $L < \infty$ wie in Lemma 1.1. Wähle $\delta > 0$ mit $\big(t, x_1(t)\big), \big(t, x_2(t)\big) \in U_\varepsilon(t_0, x_0)$ für $|t - t_0| < \delta$. Für $u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|^2$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
|u'| &= 2|\langle x_1 - x_2, x_1' - x_2' \rangle| \\
&= 2|\langle x_1 - x_2, f(\,\cdot\,, x_1) - f(\,\cdot\,, x_2) \rangle| \\
&\leq 2|x_1 - x_2|\,|f(\,\cdot\,, x_1) - f(\,\cdot\,, x_2)| \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq 2\,L\,u.
\end{aligned}$$

Daraus folgen für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ die Ungleichungen

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-2Lt} u(t)\big) \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\big(e^{2Lt} u(t)\big) \geq 0.$$

Durch Integration ergibt sich $u(t) \leq u(t_0) e^{2L|t - t_0|}$, und wegen $u(t_0) = |x_1(t_0) - x_2(t_0)|^2 = 0$ nach Voraussetzung ist $u(t) = 0$ bzw. $x_1(t) = x_2(t)$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Jetzt zeigen wir $x_1 = x_2$ auf ganz I. Die Menge $M = \{t \in I : x_1(t) = x_2(t)\}$ ist nichtleer, da $t_0 \in M$ nach Voraussetzung, und ist abgeschlossen in I, da x_1, x_2 stetig sind. Nach Schritt 1 gibt es zu $t \in M$ aber ein $\delta > 0$ mit $(t - \delta, t + \delta) \subset M$, d. h. M ist offen. Daraus folgt $M = I$. $\square$

Wir kommen nun zur Frage der Existenz. Das folgende Beispiel zeigt, dass wir im allgemeinen nur eine zeitlich lokale Lösung erwarten können.

Beispiel 1.2 Betrachte $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f(t,x) = x^2$. Das zugehörige Anfangswertproblem

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1$$

hat die Lösung $x : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $x(t) = 1/(1-t)$. Die Lösung ist nach rechts nicht fortsetzbar, denn es gilt $\lim_{t \nearrow 1} x(t) = \infty$.

In Satz 1.3, Kapitel 5, wurde gezeigt, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen bei gleichmäßiger Konvergenz stetig ist. Die folgende Konsequenz ist für uns jetzt wichtig.

Satz 1.2 (Vollständigkeit von $C^0(I,\mathbb{R}^n)$) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist $C^0(I,\mathbb{R}^n)$, versehen mit der Supremumsnorm, ein Banachraum.*

Beweis: Sei $x_k \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm, das heißt $\|x_k - x_l\|_I < \varepsilon$ für $k,l > N$. Dann folgt

$$|x_k(t) - x_l(t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I,\ k,l > N.$$

Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert $x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t)$. Mit $l \to \infty$ folgt

$$|x_k(t) - x(t)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I,\ k > N,$$

bzw. $\|x_k - x\|_I \le \varepsilon$ für $k > N$. Somit konvergiert x_k bezüglich der Supremumsnorm, d.h. gleichmäßig, gegen x, und es gilt $x \in C^0(I)$ nach Lemma 1.3 in Kapitel 5, Analysis 1. □

Eine entscheidende Beobachtung zur Konstruktion der lokalen Lösung ist, dass das Anfangswertproblem als Integralgleichung geschrieben werden kann.

Lemma 1.2 *Sei $f \in C^0(G,\mathbb{R}^n)$ und $(t_0,x_0) \in G$. Für $x : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\{(t,x(t)) : t \in I\} \subset G$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$x \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ ist Lösung des Anfangswertproblems*

$$x'(t) = f\big(t,x(t)\big) \text{ für alle } t \in I, \quad x(t_0) = x_0.$$

(b) *$x \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ erfüllt die Gleichung*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)\,ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis: (b) folgt aus (a) durch Integration von t_0 bis t, mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Umgekehrt folgt aus (b) die Stetigkeit der Funktion $t \mapsto f(t,x(t))$, und hieraus wieder mit dem Hauptsatz $x'(t) = f(t,x(t))$ durch Differentiation. □

Satz 1.3 (Kurzzeitexistenzsatz von Picard-Lindelöf) *Sei $f \in C^0(G,\mathbb{R}^n)$, mit $D_x f \in C^0(G,\mathbb{R}^{n\times n})$, und $(t_0,x_0) \in G$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem*

$$x' = f(\,\cdot\,,x) \text{ auf } I = [t_0-\delta,t_0+\delta], \quad x(t_0) = x_0,$$

eine Lösung $x \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ besitzt.

Beweis: Als erstes formulieren wir das Problem um in eine Fixpunktgleichung. Zu $(t_0,x_0) \in G$ seien $\varepsilon > 0$ und $L < \infty$ wie in Lemma 1.1 gewählt, und $\delta \in (0,\varepsilon]$ zunächst beliebig. Betrachte im Banachraum $X = C^0(I,\mathbb{R}^n)$ mit Norm $\|\cdot\|_I$ die abgeschlossene Teilmenge

$$A = \{x \in X : |x(t) - x_0| \le \varepsilon \text{ für alle } t \in I\},$$

sowie die Abbildung

$$F : A \to X, \quad [F(x)](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)\,ds.$$

Nach Lemma 1.2 ist ein Fixpunkt von F, also $F(x) = x$, eine Lösung des Anfangswertproblems. Wir zeigen nun für $\delta > 0$ hinreichend klein folgende Aussagen:

(1) $F(A) \subset A$ (*Selbstabbildung*)

(2) $\|F(x) - F(y)\|_I \leq \frac{1}{2}\|x - y\|_I$ für alle $x, y \in A$ (*Kontraktion*).

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz, Satz 1.1 in Kapitel 8, folgt dann die Existenz eines Fixpunkts $x \in A$, also der gewünschten Lösung der Anfangswertproblems. Da $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, ist $M = \sup\{|f(t,x)| : |t - t_0| \leq \varepsilon, |x - x_0| \leq \varepsilon\} < \infty$, und für $x \in A$ folgt

$$|[F(x)](t) - x_0| = \Big|\int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds\Big| \leq M\,|t - t_0| \leq M\delta.$$

Also gilt (1) für $\delta \leq \varepsilon/M$. Weiter erhalten wir für $x, y \in A$ aus der Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} |[F(x)](t) - [F(y)](t)| &= \Big|\int_{t_0}^{t} \big(f(s, x(s)) - f(s, y(s))\big)\, ds\Big| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in I} \big|f\big(s, x(s)\big) - f\big(s, y(s)\big)\big| \\ &\leq L\delta \sup_{s \in I} |x(s) - y(s)|. \end{aligned}$$

Für $\delta = \min\big(\varepsilon/M,\ 1/(2L)\big)$ folgt also auch Bedingung (2), und der Satz ist bewiesen. □

Beispiel 1.3 Im Satz von Banach wird der Fixpunkt bekanntlich durch Iteration der Abbildung F mit einem geeigneten Startwert bestimmt. Wir wollen das für folgendes triviale Beispiel explizit durchrechnen:

$$x' = \alpha x, \quad x(0) = 1.$$

Hier ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = \alpha x$ und $t_0 = 0$. Die Iterationsvorschrift lautet

$$[F(x)](t) = 1 + \int_0^t \alpha x(s)\, ds.$$

Wählen wir als Startfunktion $x_0(t) \equiv 1$, so sind die ersten Iterationsschritte

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \int_0^t \alpha\, ds = 1 + \alpha t, \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t \alpha(1 + \alpha s)\, ds = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}, \\ x_3(t) &= 1 + \int_0^t \alpha\big(1 + \alpha s + \frac{\alpha^2 s^2}{2}\big)\, ds = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6}. \end{aligned}$$

Durch Induktion sieht man ohne Mühe

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\alpha t)^j}{j!}.$$

Insbesondere konvergiert das Verfahren für $k \to \infty$ gegen die Lösung $x(t) = e^{\alpha t}$, und zwar lokal gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$.

Für $D \subset \mathbb{R}^n$ offen betrachten wir nun Vektorfelder $f : G = (\alpha, \beta) \times D \to \mathbb{R}^n$ mit f, $D_x f$ stetig, wobei $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$. Zu gegebenen Anfangsdaten $x(0) = x_0 \in D$ liefert der Satz von Picard-Lindelöf eine C^1-Lösung $x : (-\delta, \delta) \to D$, und wir fragen uns: unter welchen Vorausetzungen kann das Anfangswertproblem auf dem ganzen Intervall (α, β) gelöst werden? Oder anders:

> Was muss passieren, damit die Lösung vorzeitig ihren Geist aufgibt?

Sei t^+ das Supremum aller $t > 0$, so dass das Anfangswertproblem auf $[0, t)$ lösbar ist. Dann ist $t^+ > 0$, und das Anfangswertproblem ist auch auf $[0, t^+)$ noch lösbar: wähle dazu eine Folge $t_k \nearrow t^+$ mit zugehörigen Lösungen $x_k \in C^1([0, t_k), D)$, und definiere

$$x : [0, t^+) \to D,\ x|_{[0,t_k)} = x_k.$$

Für $t_k < t_l$ gilt $x_k = x_l$ auf $[0, t_k)$ wegen der eindeutigen Lösbarkeit, Satz 1.1. Damit ist x wohldefinierte Lösung des Anfangswertproblems. Nach Definition des Supremums ist das Anfangswertproblem auf keinem Intervall $[0, t)$ mit $t > t^+$ lösbar; wir nennen $t^+ \in (0, \infty]$ die maximale Lebensdauer der Lösung (Englisch: *lifespan*). Analog bestimmen wir das maximale Alter $t^- < 0$, und erhalten insgesamt ein maximales Intervall (t^-, t^+), auf dem das Anfangswertproblem eine Lösung hat.

Lemma 1.3 (Divergenz der Lösung) *Sei $f : (\alpha, \beta) \times D \to \mathbb{R}^n$ mit f, $D_x f$ stetig, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$. Gilt für die maximale Lösung $x \in C^1((t^-, t^+), D)$ des Anfangswertproblems $t^+ < \beta$, so verlässt $x(t)$ für $t \nearrow t^+$ jedes Kompaktum, das heißt für jede kompakte Menge $K \subset D$ gilt $x(t) \notin K$ für t hinreichend nahe bei t^+. Entsprechendes gilt im Fall $t^- > \alpha$.*

Bemerkung. Im Fall $D = \mathbb{R}^n$ bedeutet das

$$t^+ < \beta \Rightarrow \lim_{t \nearrow t^+} |x(t)| = \infty, \qquad \text{bzw.} \qquad t^- > \alpha \Rightarrow \lim_{t \searrow t^-} |x(t)| = \infty.$$

Beweis: Sei $t^+ < \beta$ und $K \subset D$ kompakt. Angenommen es gibt ein $\tau < t^+$ mit $x(t) \in K$ für alle $t \in (\tau, t^+)$. Da f stetig, ist $M = \sup\{|f(t, x)| : t \in [0, t^+],\ x \in K\} < \infty$ und es folgt

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} |f(t, x(t))|\, dt \leq M\, |t_2 - t_1| \quad \text{für alle } t_{1,2} \in [0, t^+).$$

Somit existiert $x^+ = \lim_{t \nearrow t^+} x(t) \in K$. Nach Satz 1.3 gibt es nun auf einem Intervall $I = (t^+ - \tau, t^+ + \tau)$ eine Lösung y des Anfangswertproblems

$$y' = f(\cdot, y) \text{ auf } I, \quad y(t^+) = x^+.$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz stimmen x und y links von t^+ überein, also ergibt Zusammensetzen eine Lösung $\tilde{x}$ der Differentialgleichung auf $[0, t^+ + \tau)$ mit $\tilde{x}(0) = x_0$, im Widerspruch zur Maximalität von t^+. Der Satz ist damit nicht ganz gezeigt, denn die obige indirekte Annahme schließt nicht ein oszillierendes Verhalten aus, bei dem die Lösung für $t \nearrow t^+$ immer wieder nach K zurückkommt. Aber angenommen es gibt eine Folge $t_k \nearrow t^+$ mit $x(t_k) \in K$. Aus Kompaktheitsgründen gilt $\tilde{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \leq \varrho\} \subset D$ für

$\varrho > 0$ klein, sowie $\tilde{M} = \sup\{|f(t,x)| : t \in [0,t^+],\, x \in \tilde{K}\} < \infty$. Wie oben gezeigt ist $\tilde{t}_k = \sup\{t \geq t_k : x(t) \in \tilde{K}\} < t^+$, und es folgt

$$\varrho \leq |x(\tilde{t}_k) - x(t_k)| = \Big| \int_{t_k}^{\tilde{t}_k} f(t, x(t))\, dt \Big| \leq \tilde{M}(\tilde{t}_k - t_k).$$

Für t_k hinreichend nahe bei t^+ ist dies ein Widerspruch, und der Beweis ist komplett. □

Wir wollen nun im Fall $f : (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Wachstumsabschätzungen für die Lösung herleiten, um unter geeigneten Annahmen die Divergenz auszuschließen. Das folgende Argument verallgemeinert die Abschätzung aus dem Eindeutigkeitssatz.

Lemma 1.4 (Gronwall) *Sei $u \in C^0([t_0, t_1])$, und es gelte*

$$u(t) \leq B(t) + \int_{t_0}^{t} a(s) u(s)\, ds \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_1],$$

wobei $a \in C^0([t_0, t_1])$, $a \geq 0$, und $B \in C^1([t_0, t_1])$. Dann folgt mit $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$

$$u(t) \leq e^{A(t)} \Big(B(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} B'(s)\, ds \Big) \qquad \text{für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Beweis: Wir setzen $g(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) u(s)\, ds$, also $u(t) \leq B(t) + g(t)$, und berechnen

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-A} g\big) = e^{-A} a\, (u - g) \leq e^{-A} a\, B = -\frac{d}{dt}\big(e^{-A} B\big) + e^{-A} B'.$$

Integration von t_0 bis t liefert wegen $g(t_0) = 0$ und $A(t_0) = 0$

$$e^{-A(t)} g(t) \leq B(t_0) - e^{-A(t)} B(t) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} B'(s)\, ds.$$

Multiplikation mit $e^{A(t)}$ und Einsetzen in $u(t) \leq B(t) + g(t)$ ergibt die Ungleichung. □

Satz 1.4 (Langzeitexistenz bei linearem Wachstum) *Sei $f : (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f, D_x f$ stetig und $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$. Es gebe $a, b \in C^0((\alpha, \beta))$ mit $a \geq 0$, so dass gilt:*

$$|f(t,x)| \leq a(t)|x| + b(t) \qquad \text{für alle } t \in (\alpha, \beta),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist das Anfangswertproblem $x' = f(\cdot, x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, auf ganz (α, β) lösbar, und mit $A(t) = \int_0^t a(s)\, ds$ gilt die Abschätzung

$$|x(t)| \leq e^{A(t)} \Big(|x_0| + \int_0^t e^{-A(s)} b(s)\, ds \Big) \qquad \text{für alle } t \in (\alpha, \beta). \tag{1.3}$$

Beweis: Für $t \in [0, t^+)$ gilt die Abschätzung

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_0^t |f(s, x(s))|\, ds \leq |x_0| + \int_0^t (a(s)|x(s)| + b(s))\, ds,$$

das heißt es ist $|x(t)| \leq B(t) + \int_0^t a(s)\, ds$ mit $B(t) = |x_0| + \int_0^t b(s)\, ds$. Aus dem Lemma von Gronwall folgt die gewünschte Abschätzung auf $[0, t^+)$. Wäre $t^+ < \beta$, so gilt $|x(t)| \to \infty$ mit $t \nearrow t^+$ nach Lemma 1.3, im Widerspruch zur Abschätzung. □

2 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten hier das Anfangswertproblem

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \text{ für } t \in I = (\alpha, \beta), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

Dabei ist $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ sowie $x : I \to \mathbb{R}^n$. Allerdings ist es nützlich, auch komplexwertige Koeffizienten und Lösungen zuzulassen. Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil ist ein komplexes $n \times n$ System äquivalent zu einem reellen $(2n) \times (2n)$ System, das heißt unsere Existenz- und Eindeutigkeitstheorie ist voll anwendbar. Wir betrachten erst das sogenannte homogene Problem, das heißt den Fall $b(t) \equiv 0$.

Satz 2.1 (Anfangswertisomorphismus) *Sei $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist die Menge $L_A = \{x \in C^1(I, \mathbb{K}^n) : x' = Ax \text{ auf } I\}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, genauer ist für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung*

$$\delta_{t_0} : L_A \to \mathbb{K}^n, \, \delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis: Mit $x, y \in L_A$ ist auch $\lambda\, x + \mu\, y \in L_A$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, denn

$$(\lambda\, x + \mu\, y)' = \lambda\, x' + \mu\, y' = \lambda\, Ax + \mu\, Ay = A(\lambda x + \mu y).$$

Also ist L_A ein Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$, und die Abbildung $\delta_{t_0} : L_A \to \mathbb{K}^n$ ist wohldefiniert und linear. Da $|A(t)x| \leq |A(t)|\,|x|$, gibt es nach Satz 1.4 zu jedem $x_0 \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $x' = Ax$ auf ganz I mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$, das heißt die Abbildung δ_{t_0} ist surjektiv. Aus der Eindeutigkeit der Lösung nach Satz 1.1 folgt, dass δ_{t_0} auch injektiv ist. □

Eine Basis von L_A bezeichnet man als Fundamentalsystem der Gleichung $x' = Ax$. Explizit erhält man ein solches Fundamentalsystem, indem man die Gleichung zu linear unabhängigen Anfangsdaten löst, etwa $x_j(t_0) = e_j$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis ist.

Für beliebige n Lösungen $x_i : I \to \mathbb{K}^n$ der Differentialgleichung impliziert der Satz folgende Alternative: entweder bilden die Vektoren $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ für jedes $t \in I$, oder es gibt Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, nicht alle Null, mit $\lambda_1 x_1(t) + \ldots + \lambda_n x_n(t) = 0$ für alle $t \in I$. Wir können n Funktionen $x_1, \ldots, x_n : I \to \mathbb{K}^n$ zu einer matrixwertigen Funktion $X : I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ zusammenfassen, so dass x_j die j-te Spalte von X ist. Es gilt dann

$$x_j' = Ax_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \quad \Leftrightarrow \quad X' = AX.$$

Dabei steht rechts die Matrixmultiplikation. Die Äquivalenz folgt aus der Tatsache, dass die Ableitung von X spaltenweise berechnet werden kann, und dass die j-te Spalte von AX gleich Ax_j ist. Die Tatsache, dass die Vektoren $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ für Lösungen des Systems $x' = Ax$ entweder für alle $t \in I$ oder für kein $t \in I$ linear abhängig sind, ergibt sich alternativ auch aus folgender Formel.

Satz 2.2 (Formel von Liouville) *Sei $X \in C^1(I, \mathbb{K}^{n \times n})$ eine Lösung von $X' = AX$ auf I, wobei $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n \times n})$. Dann gilt für beliebiges $t_0 \in I$*

$$\det X(t) = \det X(t_0) \cdot \exp\Big(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)\, ds\Big) \quad \text{\textit{für alle } } t \in I.$$

Beweis: Ist $\det X(t_0) = 0$, so gilt $\det X(t) = 0$ für alle $t \in I$ nach Satz 2.1, und die Formel trifft zu. Andernfalls ist $\det X(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und es gilt die allgemeine Formel

$$(\det X)'(t) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr}\big(X(t)^{-1} X'(t)\big).$$

Setzen wir $X' = A(t)X(t)$ ein und beachten $\operatorname{tr}(X^{-1}AX) = \operatorname{tr}(XX^{-1}A) = \operatorname{tr}(A)$, so folgt

$$(\det X)'(t) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr}\big(A(t)\big).$$

Damit gilt weiter

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)\,ds} \det X(t)\Big) = 0,$$

und durch Integration folgt die Behauptung. □

Für die konkrete Berechnung eines Fundamentalsystems gibt es keine allgemeinen Rezepte. Eine Ausnahme bilden die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, für die ein Fundamentalsystem durch Übergang zu einer Basis bestimmt werden kann, in der die Gleichungen entweder ganz entkoppeln oder auf sehr spezielle Weise gekoppelt sind, genauer ist die Koeffizientenmatrix entweder diagonal oder hat Jordansche Normalform. Dies ist (vielleicht) in der Linearen Algebra behandelt worden, darum will ich hier etwas anders vorgehen: die Matrix-Exponentialfunktion ist definiert durch

$$\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n},\ \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Für $|A| \leq R$ gilt $|A^k| \leq |A|^k \leq R^k$. Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} = e^R < \infty$ konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium, und die Konvergenz ist gleichmäßig für $|A| \leq R$. Insbesondere ist die exp stetig auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Satz 2.3 (Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten) *Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist*

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n},\ X(t) = \exp(tA),$$

die Lösung des Anfangswertproblems $X' = AX$, $X(0) = \mathrm{E}_n$. Die Spaltenvektoren $x_j(t)$, $j = 1,\ldots,n$, bilden ein Fundamentalsystem für $x' = Ax$ zu den Anfangswerten $x_j(0) = e_j$.

Beweis: Für $|t| \leq T$ und $k \geq 1$ gilt

$$\Big|\frac{d}{dt}\frac{(tA)^k}{k!}\Big| \leq \Big|\frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}\Big| \leq |A|\,\frac{(T|A|)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T|A|)^k}{k!} = e^{T|A|} < \infty$ konvergiert die formal differenzierte Reihe absolut und gleichmäßig für $|t| \leq T$. Es folgt durch gliedweise Differentiation, vgl. Satz 3.2 in Kapitel 5,

$$X'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = AX(t).$$

Hier haben wir benutzt, dass die Multiplikation von links mit A eine stetige Abbildung auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist. Weiter gilt $X(0) = A^0 = \mathrm{E}_n$ per Definition, und somit ist $X(t)$ ein Fundamentalsystem nach Satz 2.1. □

Folgerung 2.1 *Die Matrix-Exponentialabbildung hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ *und* $\exp(0) = \mathrm{E}_n$.

(b) $\det\big(\exp(A)\big) = \exp\big(\mathrm{tr}\,(A)\big)$.

(c) $\exp(SAS^{-1}) = S\exp(A)S^{-1}$ *für alle* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$.

(d) $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, *falls* $[A,B] = AB - BA = 0$.

Beweis: Die Invertierbarkeit von $e^A = e^{tA}|_{t=1}$ folgt aus Satz 2.3 sowie Satz 2.1, und $e^0 = \mathrm{E}_n$ gilt nach Definition. Gleichung (b) wurde bereits in Satz 2.2 gezeigt. Für (c) argumentieren wir mit dem Eindeutigkeitssatz: die Funktionen $t \mapsto e^{tSAS^{-1}}$ sowie $t \mapsto Se^{tA}S^{-1}$ lösen beide die Differentialgleichung $X' = (SAS^{-1})X$ zum Anfangswert $X(0) = \mathrm{E}_n$ und sind damit gleich; für $t = 1$ folgt (c). Bei (d) gehen wir ähnlich vor, aber in zwei Schritten: zunächst sind sowohl $t \mapsto e^{tA}B$ als auch $t \mapsto Be^{tA}$ Lösungen des Anfangswertproblems $X' = AX$ mit $X(0) = B$, wobei für die zweite Funktion die Voraussetzung $[A,B] = 0$ eingeht:

$$\frac{d}{dt}\big(Be^{tA}\big) = BAe^{tA} = A\big(Be^{tA}\big).$$

Also gilt $e^AB = Be^A$. Jetzt berechnen wir für $X(t) = e^{tA}e^{tB}$

$$X'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tA} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)X(t).$$

Es folgt $X(t) = e^{t(A+B)}$, insbesondere $e^Ae^B = e^{A+B}$. □

Die Eigenschaften (c) und (d) können alternativ auch aus der Definition der Matrix-Exponentialfunktion als Reihe hergeleitet werden. Für (d) ist dabei wesentlich, dass e^Ae^B mit dem Cauchyprodukt für Reihen berechnet werden kann, wenn $[A,B] = 0$. Nach (c) reicht es zur Berechnung von e^A den Fall zu behandeln, wenn A Jordansche Normalform hat. Wir wollen das nicht allgemein durchführen, auch wenn es nicht schwer ist, sondern uns auf folgendes Beispiel beschränken.

Die Auslenkung eines schwingungsfähigen Systems (Oszillators) mit Eigenfrequenz $\omega_0 \geq 0$ und Reibungskoeffizient $\beta \geq 0$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$x'' + 2\beta\, x' + \omega_0^2 x = 0.$$

Wir schreiben die Gleichung äquivalent in ein System erster Ordnung um:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix A ist

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = (\lambda+\beta)^2 + \omega_0^2 - \beta^2.$$

Für $\beta \neq \omega_0$ hat A zwei verschiedene, eventuell komplexe Eigenwerte $\lambda^\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{C}$, mit zugehörigen Eigenvektoren $v^\pm = (1, \lambda^\pm)$. Es gilt dann

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda^\pm t}v^\pm = \lambda^\pm e^{\lambda^\pm t}v^\pm A\big(e^{\lambda^\pm t}v^\pm\big).$$

Die Vektoren $e^{\lambda^\pm t}v^\pm|_{t=0} = v^\pm$ sind als Eigenvektoren zu v erschiedenen Eigenvektoren linear unabhängig, also bilden die Funktioenn $e^{\lambda^\pm t}v^\pm$ ein Fundamentalsystem über $\mathbb{C}$. Ist $\beta > \omega_0$, so folgt $\lambda^\pm \in [-2\beta, 0)$ und die resultierenden Lösungen $x^\pm(t) = e^{\lambda^\pm t}$ fallen streng monoton und exponentiell (Kriechfall). Ist $\beta < \omega_0$, so erhalten wir durch Linearkombination das reelle Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\beta t}\cos\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t & \qquad x_2(t) &= e^{-\beta t}\sin\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t \\ y_1(t) &= x_1'(t) & y_2(t) &= x_2'(t) \end{aligned}$$

Fall 3 $0 = \beta^2 - \omega_0^2$
In diesem Fall hat das Polynom die eine reelle Nullstelle $-\beta$. Ein Fundamentalsystem lautet

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\beta t} & \qquad x_2(t) &= t\,e^{-\beta t} \\ y_1(t) &= -e^{-\beta t} & y_2(t) &= e^{-\beta t} - \beta\,t\,e^{-\beta t} \end{aligned}$$

An der Stelle $t = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Separation der Variablen

Als Ausgangspunkt betrachten wir nochmals die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Satz 3.1 (Energieerhaltungssatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x,v)$ (also f unabhängig von t). Ist $x \in C^2(I,\Omega)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen, so gilt der „Energieerhaltungssatz“*

$$\frac{d}{dt}[\langle D_v f(x,x'), x'\rangle - f(x,x')] = 0.$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial v_j}(x,x')x_j' - f(x,x')\right] = \sum_{j=1}^n \left(\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial v_j}(x,x') - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,x')}_{=0}\right) x_j' = 0$$

□

Beispiel 3.1 *Sei $f(x,v) = \frac{m}{2}|v|^2 - V(x)$ die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse $m > 0$ im Potential V. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \langle D_v f(x,x'), x'\rangle - f(x,x') &= \langle mx', x'\rangle - \Big(\frac{m}{2}\,|x'|^2 - V(x)\Big) \\ &= \frac{m}{2}\,|x'|^2 + V(x). \end{aligned}$$

Es folgt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{m}{2}\,|x'|^2 + V(x) = E \quad (= \textit{Konstante}).$$

Bei Systemen mit einem Freiheitsgrad ($n = 1$) lautet der Energieerhaltungssatz

$$x' = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)}.$$

Anfangswertprobleme dieses Typs können nun „explizit" gelöst werden mit dem nachstehendem Verfahren.

Satz 3.2 (Separation der Variablen) *Seien $f \in C^0(I)$, $g \in C^0(J)$ für Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$, und $g(x) \neq 0$ für $x \in J$. Betrachte das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = \frac{f(t)}{g\big(x(t)\big)} \quad \textit{für } t \in I, \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.1}$$

Definiere $F \in C^1(I)$, $G \in C^1(J)$ durch

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds, \quad G(x) = \int_{x_0}^{x} g(y)\,dy.$$

Ist I so klein gewählt dass $F(I) \subset G(J)$, so folgt:

a) Es gibt genau ein $x \in C^1(I)$ mit $G\big(x(t)\big) = F(t)$ für alle $t \in I$.

b) Diese Funktion ist die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (3.1).

Beweis: Nach Analysis 1 ist $J^* = G(J)$ ein offenes Intervall und es existiert die Umkehrfunktion $H \in C^1(J^*)$ von G. Für $x \in C^1(I)$ mit $x(I) \subset J$ gilt:

$$\begin{array}{lrcll} & x \text{ ist Lösung} & \text{von} & (3.1) & \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dt}G\big(x(t)\big) & = & \frac{d}{dt}F(t) & \text{und } x(t_0) = x_0 \\ \Leftrightarrow & G\big(x(t)\big) & = & F(t) & (\text{beachte } G(x_0) = F(t_0) = 0) \\ \Leftrightarrow & x(t) & = & H\big(F(t)\big). & \end{array}$$

Insbesondere ist eine Lösung von (3.1) eindeutig bestimmt. Definieren wir $x = H \circ F$, so ist $x \in C^1(I)$ mit $x(I) = H\big(F(I)\big) \subset H\big(G(J)\big) = J$ nach Voraussetzung und x ist Lösung von (3.1). □

Lösungsrezept.

- $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{f(t)}{g(x)} \quad \longrightarrow \quad g(x)\,dx = f(t)\,dt$
- Integration von t_0 bis t und x_0 bis x:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(y)\,dy = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds = F(t)$$

- Auflösung nach x ergibt $x = x(t)$ oder Auflösung nach t ergibt $t = t(x)$.

Beispiel 3.2 (Homogene, lineare Gleichung) *Betrachte für $a \in C^0(I)$ das Anfangswertproblem*

$$x'(t) = a(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Nach dem Lösungsrezept ergibt sich (unter welchen Voraussetzungen?)

- $\dfrac{dx}{x} = a(t)\,dt$
- *Integration von* t_0 *bis* t *bzw.* x_0 *bis* x*:*

$$\log\frac{x}{x_0} = \int_{x_0}^{x}\frac{dy}{y} = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

- $x(t) = x_0 \exp \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds.$

Beispiel 3.3 (Rotationsminimalflächen) *Wird der Graph einer Funktion* $r : I \to (0,\infty)$*,* $r = r(x)$*, um die* x*-Achse rotiert, so hat die entstehende Fläche (wie man zeigen kann) den Flächeninhalt*

$$A(r) = 2\pi \int_I r(x)\sqrt{1 + r'(x)^2}\,dx.$$

Falls r *diesen Flächeninhalt relativ zu allen Graphen* $u : I \to (0,\infty))$ *mit* $u|_{\partial I} = r|_{\partial I}$ *minimiert, so ist* r *Lösung der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung. Aus Satz 3.1 folgt*

$$\begin{aligned} \frac{r\,r'}{\sqrt{1+(r')^2}}\,r' - r\sqrt{1+(r')^2} &= -a \quad (= Konst.) \\ \Leftrightarrow \quad (r')^2 &= \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Wir lösen mit Separation unter der Annahme $r' > 0$*:*

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1} \quad\longrightarrow\quad \left(\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1\right)^{-1/2} dr = dx.$$

Integration von r_0 *bis* r*,* x_0 *bis* x *liefert* $\operatorname{Arcosh}\frac{r}{a} - \operatorname{Arcosh}\frac{r_0}{a} = x - x_0$ *beziehungweise*

$$r(x) = a\cosh\frac{x - x_1}{a} \qquad \textit{mit } x_1 = x_0 - \operatorname{Arcosh}\frac{r_0}{a}.$$

4 Lineare Differentialgleichungen

Für lineare Differentialgleichungen erhält man eine sehr präzise Theorie. Wir betrachten hier allgemein ein System

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{4.1}$$

Dabei sind $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n} \simeq L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $b \in I \to \mathbb{R}^n$ stetig und $x_0 \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ von (4.1). Es erweist sich aber als nützlich, im Folgenden auch komplexwertige Funktionen zuzulassen, also

$$A(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad b(t) \in \mathbb{C}^n, \quad x_0 \in \mathbb{C}^n \quad \text{und } x(t) \in \mathbb{C}^n.$$

Tatsache. Das lineare Anfangwertproblem (4.1) ist auf ganz I (und nicht nur lokal) lösbar. Dies ergibt sich durch eine genauere Analyse des Satzes von Picard-Lindelöf, siehe Skript Analysis II, SS '97.

Satz 4.1 *Sei $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n\times n})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist die Lösungsmenge des homogenen Systems*

$$L_A = \{x \in C^1(I, \mathbb{K}^n) : x' = A\,x \ \textit{auf}\ I\}$$

ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Und zwar ist für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung

$$\delta_{t_0} : L_A \to \mathbb{K}^n, \quad \delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis: Mit $x, y \in L_A$ ist auch $\lambda\,x + \mu\,y \in L_A$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Deshalb ist L_A ein Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$. Die Abbildung δ_{t_0} ist surjektiv, weil das Anfangswertproblem zu jedem $x_0 \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung auf ganz I hat, siehe obige Tatsache. δ_{t_0} ist injektiv, weil die Lösung des Anfangswertproblems nach Satz 3.1 eindeutig bestimmt ist. □

Definition 4.1 *Eine Basis von L_A heißt (Lösungs-)Fundamentalsystem auf I.*

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung (Schwingung mit Reibung)

$$x'' + 2\beta\,x' + \omega_0^2 x = 0 \quad (\beta_0, \omega_0 \geq 0).$$

Wir können die Gleichung äquivalent in ein System erster Ordnung umschreiben:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\omega_0^2 x - 2\beta\,y \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem ergibt sich aus dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, also

$$0 = e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\,\beta\,\lambda + \omega_0^2).$$

Fall 1 $0 < \beta^2 - \omega_0^2 =: \omega^2$ (wobei $\omega > 0$)
Dann hat das Polynom die beiden reellen Nullstellen $\lambda_\pm = -\beta \pm \omega < 0$. Die beiden Lösungen

$$\begin{pmatrix} x_\pm(t) \\ y_\pm(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_\pm t} \\ \lambda_\pm\, e^{\lambda_\pm t} \end{pmatrix}$$

bilden ein Fundamentalsystem, denn

$$\det \begin{pmatrix} x_+(0) & x_-(0) \\ y_+(0) & y_-(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} = \lambda_- - \lambda_+ = -2\omega < 0.$$

Fall 2 $0 > \beta^2 - \omega_0^2 =: (i\omega)^2$ (wobei $w > 0$). Dann hat das Polynom die beiden nichtreellen Nullstellen $\lambda_\pm = -\beta \pm i\omega$. Analog zu oben erhalten wir nun ein komplexes Fundamentalsystem

$$\begin{pmatrix} x_\pm(t) \\ y_\pm(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_\pm t} \\ \lambda_\pm\, e^{\lambda_\pm t} \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{R}$ erhalten wir durch Linearkombination

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\beta t} \cos \omega t & \qquad x_2(t) &= e^{-\beta t} \sin \omega t \\ y_1(t) &= x_1'(t) & y_2(t) &= x_2'(t) \end{aligned}$$

Fall 3 $0 = \beta^2 - \omega_0^2$
In diesem Fall hat das Polynom die eine reelle Nullstelle $-\beta$. Ein Fundamentalsystem lautet

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1(t) & = & e^{-\beta t} & \quad & x_2(t) & = & t\, e^{-\beta t} \\ y_1(t) & = & -e^{-\beta t} & \quad & y_2(t) & = & e^{-\beta t} - \beta\, t\, e^{-\beta t} \end{array}$$

An der Stelle $t = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$