7. Schwache Konvergenz und Reflexivität

7.1. Schwache Konvergenz.

Definition 7.1.1. Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E konvergiert schwach gegen $x \in E$, $x_n \rightharpoonup x$, falls für alle $\varphi \in E^*$
$$\varphi(x_n) \to \varphi(x)$$
für $n \to \infty$ gilt.

Bemerkung 7.1.2.
- (i) In topologischen Räumen sagt man, dass x_n gegen x konvergiert, $x_n \to x$, falls jede Umgebung von x fast alle Elemente x_n enthält.
- (ii) Die stetigen Funktionale $f \in L(X, \mathbb{K})$ erzeugen nach Definition 7.1.3 eine Topologie auf X, die schwache Topologie.
- (iii) Konvergenz $x_n \to x$ bezüglich der schwachen Topologie ist äquivalent zu $x_n \rightharpoonup x$.
- (iv) Auf X^* können wir ebenfalls eine schwache Topologie einführen. Dann gilt $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ in X^*, falls $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$ für alle $f \in X^{**}$ gilt.
- (v) Auf X^* gibt es auch die schwach*-Topologie: Es gilt $\varphi_n \to \varphi$ schwach*, falls $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ für alle $x \in X$ gilt.
- (vi) Um Missverständnissen vorzubeugen, werden wir die übliche Konvergenz, d. h. $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$, auch als starke Konvergenz oder Normkonvergenz bezeichnen.
- (vii) Wie bei starker Konvergenz definiert man schwache und schwach* Cauchyfolgen sowie schwache und schwach* Folgenkompaktheit.
- (viii) In endlichdimensionalen Vektorräumen sind schwache und starke Konvergenz äquivalent.
- (ix) In $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ konvergiert $e_n \rightharpoonup 0$, aber $e_n \not\to 0$ für $n \to \infty$.

Definition 7.1.3. Sei $F = \{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ eine Familie von Abbildungen von X in topologische Räume $(Y_i, \mathcal{O}_i)$. Dann heißt die gröbste Topologie auf X, so dass alle Abbildungen f_i, $i \in I$, stetig sind, die F-schwache Topologie auf X.

Beispiel: Die Produkttopologie auf dem kartesischen Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ stetig sind. Mengen der Form $\prod_{i\in I} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und $A_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ bilden eine Basis der Topologie von X. *$B \subset \mathcal{P}X$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, falls sich jedes $O \in \mathcal{O}$ als Vereinigung von Elementen von B schreiben lässt.*

Lemma 7.1.4. *Sei X ein normierter Raum.*
- *(i) Die durch*
$$\langle \varphi, Jx \rangle := \langle x, \varphi \rangle$$
für alle $x \in X$ und alle $\varphi \in X^*$ definierte Abbildung $J : X \to X^{**}$ ist eine Isometrie. Wir sagen, dass J den Raum X in seinen Bidualraum einbettet.
- *(ii) Seien $x_n, x \in X$. Dann sind $x_n \rightharpoonup x$ in X und $Jx_n \to Jx$ schwach* in X^{**} für $n \to \infty$ äquivalent.*

Beweis.
- (i) Es gilt
$$\|Jx\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, Jx \rangle| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle x, \varphi \rangle| = \|x\|$$
nach Korollar 4.1.5.
- (ii) Dies folgt direkt nach Definition, da die Konvergenz in
$$\langle x_n, \varphi \rangle = \langle \varphi, Jx_n \rangle \overset{?}{\to} \langle x, \varphi \rangle = \langle \varphi, Jx \rangle$$

für die Ausdrücke mit oder ohne J äquivalent ist. □

Theorem 7.1.5. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Der schwache und der schwach Grenzwert einer Folge sind eindeutig bestimmt.*
(ii) Starke Konvergenz impliziert schwache und schwach Konvergenz.*
(iii) Gelte $\varphi_n \to \varphi$ schwach in X^* für $n \to \infty$. Dann folgt*
$$\|\varphi\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|.$$
(iv) Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \to \infty$. Dann folgt
$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
(v) Schwach konvergente und schwach konvergente Folgen sind beschränkt.*
(vi) Gilt $x_n \to x$ in X und $\varphi_n \to \varphi$ schwach in X^* für $n \to \infty$ oder $x_n \rightharpoonup x$ und $\varphi_n \to \varphi$ (stark) in X^*, so folgt*
$$\langle x_n, \varphi_n\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$$
für $n \to \infty$.

Beweis.

(i) Benutze den Satz von Hahn-Banach für die schwache Konvergenz. Für die schwach* Konvergenz ist dies klar, da der Grenzwert eine Funktion φ ist, die wegen $\langle x, \varphi_n\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$ eindeutig bestimmt ist.
(ii) Klar.
(iii) Sei $x \in X$. Für $n \to \infty$ folgt
$$|\langle x, \varphi\rangle| \leftarrow |\langle x, \varphi_n\rangle| \le \|\varphi_n\| \cdot \|x\|,$$
also
$$|\langle x, \varphi\rangle| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\| \cdot \|x\|$$
und damit nach Definition der Operatornorm
$$\|\varphi\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|.$$
(iv) Analog zu eben erhalten wir $|\langle x, \varphi\rangle| \le \|\varphi\| \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Benutze nun wieder Korollar 4.1.5. Wähle also φ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\langle x, \varphi\rangle = \|x\|$.
(v) Aus $\varphi_n \to \varphi$ schwach* in X^* erhalten wir insbesondere $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, \varphi_n\rangle| < \infty$ punktweise für alle $x \in X$. Daher folgt nach Banach-Steinhaus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| < \infty$.

Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt $Jx_n \to Jx$ schwach* in X^{**} mit J aus Lemma 7.1.4 nach diesem Lemma. Somit ist Jx_n in X^{**} beschränkt, also auch x_n in X.
(vi) Es gilt
$$\begin{aligned} |\langle x, \varphi\rangle - \langle x_n, \varphi_n\rangle| &\le |\langle x, \varphi - \varphi_n\rangle| + |\langle x_n - x, \varphi_n\rangle| \\ &\le \underbrace{|\langle x, \varphi - \varphi_n\rangle|}_{\to 0} + \underbrace{\|x - x_n\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|\varphi_n\|}_{\le c} \end{aligned}$$
für $n \to \infty$.

Die zweite Aussage folgt durch eine analoge Argumentation mit „vertauschten Rollen“. □

Theorem 7.1.6. *Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X^*$ schwach* folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^* mit $\|\varphi_k\| \le 1$. Dann sind die Folgen $(\langle x_n, \varphi_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ für festes $n \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$ beschränkt. Daher finden wir mit einem Diagonalfolgenargument eine (nicht umbenannte) Teilfolge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_n, \varphi_k\rangle \in \mathbb{K}$$

existiert. Setze $Y := \langle \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$. Sei $y \in Y$. Dann existiert der folgende Grenzwert

$$\varphi(y) := \lim_{k\to\infty} \langle y, \varphi_k\rangle$$

und die damit definierte Funktion $\varphi\colon Y \to \mathbb{K}$ ist linear. Wegen

$$|\varphi(y)| = \lim_{k\to\infty} |\langle y, \varphi_k\rangle| \le \|y\|$$

ist φ auf Y gleichmäßig stetig und läßt sich daher nach Theorem 2.2.9, dem Fortsetzungssatz, eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung Φ auf $\overline{Y} = X$ mit $\|\Phi\| \le 1$ fortsetzen. Wir behaupten, dass $\varphi_n \to \Phi$ schwach* konvergiert.

Sei dazu $x \in X$ und $y \in Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle x, \Phi - \varphi_n\rangle| &\le |\langle x - y, \Phi - \varphi_n\rangle| + |\langle y, \Phi - \varphi_n\rangle| \\ &\le 2\|x - y\| + |\langle y, \Phi - \varphi_n\rangle|. \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass der zweite Term für $n \to \infty$ verschwindet. Der erste Term kann wegen $\overline{Y} = X$ zuvor beliebig klein gewählt werden. Die Behauptung folgt. □

Der Satz von Banach-Alaoğlu verallgemeinert dies: Benutzt man den Satz von Tychonoff, so kann man den Satz auch für nicht separable Räume zeigen.

Mit den Methoden aus Theorem 7.1.6 zeigt man auch

Proposition 7.1.7. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Dann gilt $x_n \rightharpoonup x$ in X genau dann, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ mit $\langle x_n, \varphi\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in D$ gibt.

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist genau dann eine schwache Cauchyfolge, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ gibt, so dass $(\langle x_n, \varphi\rangle)$ für alle $\varphi \in D$ eine Cauchyfolge ist.

Beweis. Übung. □

Lemma 7.1.8. *Sei X ein Hilbertraum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $x_n \to x$ für $n \to \infty$,

(ii) $\|x_n\| \to \|x\|$ und $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$.

Beweis. Übung. Betrachte $\|x_n - x\|^2$. □

7.2. **Reflexivität.**

Definition 7.2.1. Sei X ein Banachraum und J die Isometrie aus Lemma 7.1.4. Dann heißt X reflexiv, falls $J\colon X \to X^{**}$ surjektiv (und damit eine bijektive Isometrie) ist.

Ein reflexiver Raum ist immer vollständig, da X^{**} vollständig ist.

Lemma 7.2.2. *Sei X ein Banachraum.*

(i) Ist X reflexiv, so stimmen schwache und schwach Folgenkonvergenz in X^* überein.*

(ii) Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.

(iii) Ist $T\colon X \to Y$ ein Isomorphismus, so ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.

(iv) X ist genau dann reflexiv, wenn X^* reflexiv ist.

Beweis.
(i) Klar.
(ii) Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $y'' \in Y^{**}$. Wir definieren x'' durch
$$\langle x', x'' \rangle := \langle x'|_Y, y'' \rangle$$
für alle $x' \in X^*$. Dann ist $x'' \in X^{**}$. Definiere $x := J_X^{-1} x''$. Sei $x' \in X^*$ mit $x' = 0$ auf Y. Für solche x' folgt
$$\langle x, x' \rangle = \langle x', x'' \rangle = \langle x'|_Y, y'' \rangle = 0.$$
Y ist abgeschlossen. Nach Korollar 4.1.4 folgt also $x \in Y$. Sei $y' \in Y^*$ beliebig. Sei $x' \in X^*$ eine Fortsetzung von y' wie im Satz von Hahn-Banach. Wir erhalten wegen $x \in Y$
$$\langle x, y' \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x'|_Y, y'' \rangle = \langle y', y'' \rangle.$$
Somit ist $y'' = J_Y x$. Damit ist J_Y surjektiv.
(iii) Sei X reflexiv. Wir wollen zeigen, dass Y ebenfalls reflexiv ist: Sei $y'' \in Y^{**}$. Wir definieren $x'' \in X^{**}$ durch
$$\langle x', x'' \rangle = \langle x' \circ T^{-1}, y'' \rangle \quad \text{für alle } x' \in X^*.$$
Für $y' \in Y^*$ mit $x' := y' \circ T$ gilt nach Definition von x''
$$\langle y', y'' \rangle = \langle y' \circ T, x'' \rangle = \left\langle J_X^{-1} x'', y' \circ T \right\rangle = \left\langle T J_X^{-1} x'', y' \right\rangle.$$
Also gilt $y'' = J_Y T J_X^{-1} x''$ und damit ist J_Y surjektiv, Y also ebenfalls reflexiv.
(iv) „$\Longrightarrow$“: Sei X reflexiv. Sei $x''' \in X^{***}$, so ist $x''' \circ J_X \in X^*$. Für $x'' \in X^{**}$ gilt
$$\langle x'', x''' \rangle = \left\langle J_X^{-1} x'', x''' \circ J_X \right\rangle = \langle x''' \circ J_X, x'' \rangle = \langle x'', J_{X^*} \circ x''' \circ J_X \rangle.$$
Somit folgt $x''' = J_{X^*}(x''' \circ J_X)$. Also ist J_{X^*} surjektiv und somit ist auch X^* reflexiv.
„$\Longleftarrow$“: Sei nun X^* reflexiv. Aufgrund des ersten Teils ist auch X^{**} reflexiv. J_X ist eine Isometrie. Somit ist $J_X(X) \subset X^{**}$ abgeschlossen. Nach (ii) ist $J_X(X)$ daher reflexiv. Nach (iii) ist also X selbst reflexiv. □

Lemma 7.2.3. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X separabel, falls X^* separabel ist.*

Die Umkehrung ist falsch, da L^1 separabel ist, L^∞, der Dualraum von L^1 aber nicht.

Beweis. Sei $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X^*. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X so dass $|\langle x_n, \varphi_n \rangle| \ge \frac{1}{2} \|\varphi_n\|$ und $\|x_n\| = 1$. Setze $Y := \overline{\langle \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle}$. Sei $\varphi \in X^*$ mit $\varphi = 0$ auf Y, so folgt für alle n
$$\|\varphi - \varphi_n\| \ge |\langle x_n, \varphi - \varphi_n \rangle| = |\langle x_n, \varphi_n \rangle| \ge \tfrac{1}{2} \|\varphi_n\| \ge \tfrac{1}{2}(\|\varphi\| - \|\varphi_n - \varphi\|),$$
also
$$\|\varphi\| \le 3 \inf_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi - \varphi_n\| = 0,$$
da $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X^* liegt. Nach Korollar 4.1.4 erhalten wir $Y = X$. Da Y nach Konstruktion separabel ist, ist auch X separabel. □

Theorem 7.2.4. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{B_1(0)} \subset X$. Definiere $Y := \overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$. Dann ist Y nach Lemma 7.2.2 selbst reflexiv. Y ist nach Definition separabel. Somit ist auch das Bild $Y^{**} = J_Y Y$ separabel. Nach Lemma 7.2.3 ist daher auch Y^* separabel. Somit ist nach Theorem 7.1.6 die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset Y^{**}$ schwach* folgenkompakt. Wir wenden dies auf die Folge $(J_Y x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y^{**} an, deren Folgeglieder in $\overline{B_1(0)} \subset Y^{**}$ enthalten sind. Es gibt also ein $y'' \in Y^{**}$ und eine nicht umbenannte Teilfolge, so dass

$$\langle y', J_Y x_n\rangle \to \langle y', y''\rangle$$

für alle $y' \in Y^*$ für $n \to \infty$ konvergiert. Definiere $x := J_Y^{-1} y'' \in Y$. Es folgt für alle $y' \in Y^*$ und $n \to \infty$

$$\langle x_n, y'\rangle = \langle y', J_Y x_n\rangle \to \langle y', y''\rangle = \langle x, y'\rangle.$$

Sei $x' \in X^*$. Dann gilt $x'|_Y \in Y^*$. Auf Elemente in $Y \subset X$ angewandt stimmen x' und $x'|_Y$ überein. Wir erhalten also

$$\underline{\langle x_n, x'\rangle} = \langle x_n, x'|_Y\rangle \to \langle x, x'|_Y\rangle = \underline{\langle x, x'\rangle} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wir erhalten $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$. □

Theorem 7.2.5. *Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d. h. sind $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und gilt $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$, so folgt $x \in M$.*

Beweis. Folgt direkt aus dem Trennungssatz, Theorem 4.1.8, durch einen Widerspruchsbeweis. □

Lemma 7.2.6 (Lemma von Mazur)**.** *Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in einem normierten Raum. Dann liegt x im Abschluss der konvexen Hülle von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis. Der Abschluss der konvexen Hülle ist konvex. Also folgt die Behauptung aus Theorem 7.2.5. □

Vergleiche das folgende Resultat mit Theorem 5.2.2.

Theorem 7.2.7. *Sei X ein reflexiver Banachraum, $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu $x_0 \in X$ ein $x \in M$ mit*

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Minimalfolge, gelte also $\|x_n - x_0\| \to \operatorname{dist}(x_0, M)$ für $n \to \infty$. Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Somit gibt es nach eine schwach konvergente Teilfolge $x_n \rightharpoonup x$ für ein $x \in X$. Nach Theorem 7.2.5 erhalten wir $x \in M$. Aus der schwachen Konvergenz erhalten wir auch $x_n - x_0 \rightharpoonup x - x_0$. Da die Norm unter schwacher Konvergenz nach Theorem 7.1.5 unterhalbstetig ist, folgt die mittlere Ungleichung in

$$\operatorname{dist}(x_0, M) \le \|x - x_0\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Die erste Ungleichung gilt nach Definition des Abstandes und die letzte, da x_n als Minimalfolge gewählt war. Die Behauptung folgt. □

Setzt man in der folgenden Definition $\alpha = 1$, so erhält man lipschitzstetige Funktionen.

Definition 7.2.8. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. (Die Definition für Funktionen mit Werten in einem anderen Banachraum ist analog.) Sei $0 < \alpha < 1$.

(i) Die Funktion f heißt in $x_0 \in \Omega$ mit Exponent α hölderstetig, falls

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{x \in (\Omega \cap B_\varepsilon(x_0)) \setminus \{x_0\}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < \infty$$

ist.

(ii) Die Funktion f heißt mit Exponent α hölderstig, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \equiv C^\alpha(\Omega)$, falls f in allen Punkten $x \in \Omega$ mit Exponent α hölderstetig ist.

(iii) Wir definieren

$$C^\alpha\left(\overline{\Omega}\right) := \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$$

und die Hölderhalbnorm

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

(iv) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$, so definieren wir

$$C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) := \left\{ f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right) : [D^\beta f]_{C^\alpha(\Omega)} < \infty \text{ für alle } |\beta| = k \right\}.$$

Theorem 7.2.9.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist der Raum aller Funktionen $f \in C^\alpha(\Omega)$ mit

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|f\|_{C^0(\Omega)} + [f]_{C^\alpha(\Omega)} < \infty$$

mit der Norm $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ ein Banachraum.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so schreiben wir dafür $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist der Raum aller Funktionen $f \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ mit

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|f\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\beta| = k} \left[D^\beta f\right]_{C^\alpha(\Omega)} < \infty$$

mit der Norm $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$ ein Banachraum: $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Übung. □

Bemerkung 7.2.10. Hölderräume sind i. a. nicht separabel. Betrachte dazu den Raum $C^\alpha([-1, 1])$ und die Funktionen $u_{x_0}(x) := |x - x_0|^\alpha$. (Details: Übung.)

8. Sobolevräume

8.1. **Definition und grundlegende Eigenschaften.**

Wir folgen [6]. Weitere gute Übersichten zu Sobolevräumen und deren Umfeld vermitteln die Bücher von William Ziemer [17] und Robert Adams [1].

Bemerkung 8.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ heißt Testfunktion. Sei $u \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega u \varphi_i = -\int_\Omega u_i \varphi,$$

da $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei $u \in C^k(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \varphi$$

für alle Multiindices $|\alpha| \le k$.

Definition 8.1.2 (Schwache Ableitung)**.** Sei nun $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $v \in L^1_{\text{loc}}$ heißt α-te schwache Ableitung von u, falls

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi$$

für alle Testfunktionen φ gilt. Wir schreiben $D^\alpha u = v$.

Lemma 8.1.3 (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung)**.**
Seien v, $\tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitungen von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt $v = \tilde{v}$.

Zum Beweis benötigen wir das Lemma von Du Bois-Reymond. Wir folgen der Darstellung in [9].

Lemma 8.1.4 (Du Bois-Reymond)**.** *Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gilt*

$$\int_\Omega f \varphi = 0$$

für alle Testfunktionen φ, so gilt $f = 0$ fast überall, $f = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Beweis. Es genügt, $f \in L^1(\Omega)$ zu betrachten, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Definiere

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Es gelten $|g| \leq 1$ und $f \cdot g = |f|$. Da $g \in L^\infty(\Omega)$ ist, folgt auch $g \in L^2(\Omega)$. Somit existiert eine Folge $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $\eta_\varepsilon \to g$ in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Nach Theorem 3.2.3, siehe auch [11, Theorem 3.12], konvergiert nun eine (nicht umbenannte) Teilfolge der η_ε dann fast überall gegen g. Wir dürfen annehmen, dass die Folge η_ε durch Glättung entstanden ist. Somit gilt

$$\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty} \leq 1.$$

Aufgrund des Satzes über dominerende Konvergenz folgt nun

$$0 = \int_\Omega f \cdot \eta_\varepsilon \to \int_\Omega f \cdot g = \int_\Omega |f|.$$

Wir schließen also, dass fast überall $f = 0$ gilt und erhalten $f = 0$ in $L^1(\Omega)$. □

Beweis von Lemma 8.1.3. Es gilt

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v} \varphi$$

für alle Testfunktionen φ. Wir erhalten also

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \varphi = 0$$

und somit aufgrund des Lemma von Du Bois-Reymond auch $v = \tilde{v}$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. □

Beispiel 8.1.5. Sei $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

Dann ist v die schwache Ableitung von u.

Beweis. Sei φ eine Testfunktion

$$\begin{aligned}\int_0^2 u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi' + \int_1^2 \varphi' = -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + \varphi(2) - \varphi(1)\\ &= -\int_0^1 \varphi = -\int_0^2 v\varphi.\end{aligned}$$

□

Beispiel 8.1.6. Sei $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1,\\ 2, & 1 < x < 2.\end{cases}$$

Dann besitzt u keine Ableitung im schwachen Sinne.

Beweis. Nehme an, $v \in L^1_{\text{loc}}$ wäre eine schwache Ableitung. Dann folgt für alle Testfunktionen φ

$$\begin{aligned}-\int_0^2 v\varphi = \int_0^2 u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi' + 2\int_1^2 \varphi'\\ &= -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + 2\varphi(2) - 2\varphi(1) = -\int_0^1 \varphi - \varphi(1).\end{aligned}$$

Sei φ_m eine Folge von Testfunktionen mit $0 \le \varphi_m \le 1$, $\varphi_m(1) = 1$, $\varphi_m(x) \to 0$ für $x \ne 1$. Dann gilt für $m \to \infty$

$$\begin{tikzcd} -\int_0^2 v\varphi_m \arrow[r, equal] \arrow[d] & -\int_0^1 \varphi_m - \varphi_m(1) \arrow[d] \\ 0 & 0 - 1 = -1. \end{tikzcd}$$

Daher kann es keine solche Funktion v geben. □

Definition 8.1.7.

(i) Seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ im schwachen Sinn für alle } |\alpha| \le k\right\}.$$

(ii) Die Räume $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ sind, wie wir später sehen werden, Hilberträume.

(iii) Für $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ schreiben wir $u = v$, falls $u = v$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, d. h., falls $u = v$ fast überall gilt.

(iv) Wir definieren die folgende Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \infty, & u \notin W^{k,p}(\Omega),\\ \left(\sum\limits_{|\alpha|\le k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty,\\ \sum\limits_{|\alpha|\le k} \sup\limits_\Omega |D^\alpha u|, & p = \infty.\end{cases}$$

Hier benutzen wir das wesentliche Supremum. Mit dieser Norm wird der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ zu einem Banachraum. Dies beweisen wir später.

(v) $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls $u \in W^{k,p}(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt.

(vi) Wir schreiben $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, falls
$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$$
und $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls
$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0$$
für alle $\Omega' \Subset \Omega$.

(vii) Wir definieren
$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$
Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt. Unter geeigneten Voraussetzungen gilt für $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ auch $D^\alpha u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $|\alpha| \le k-1$. Diese Aussage ist nicht trivial, da $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist.

(viii) $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Beispiel 8.1.8. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$,
$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{für } x \neq 0.$$
Für welche Werte von $\alpha > 0$, n und p gilt $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Für $x \neq 0$ gilt
$$u_i(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}},$$
$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$
Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion und $\varepsilon > 0$. Es folgt
$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u\varphi_i = -\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u_i\varphi + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\cdot\left(-\frac{x_i}{|x|}\right).$$
Wir erhalten
$$\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\cdot\left(-\frac{x_i}{|x|}\right)\right| \le \|\varphi\|_{L^\infty}\cdot\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\alpha} \le c\cdot\varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0$$
für $\varepsilon \searrow 0$, falls $n-1-\alpha > 0$ gilt.

Es gelten die folgenden Integralabschätzungen
$$\int\limits_{B_1(0)} |Du| \le c\cdot\int\limits_0^1 r^{-\alpha-1+n-1}dr \le c,$$
falls $-\alpha-1+n > 0$ und
$$\int\limits_{B_1(0)} u \le c\cdot\int\limits_0^1 r^{-\alpha+n-1}dr \le c,$$
falls $-\alpha+n > 0$ ist. Die entsprechenden Integrale werden klein, wenn wir nur über eine Umgebung des Ursprungs integrieren. Somit erhalten wir für $\varepsilon \searrow 0$
$$\int\limits_\Omega u\varphi_i = -\int\limits_\Omega u_i\varphi$$
für alle Testfunktionen φ. $u_i(0)$ ist frei wählbar. Aufgrund der Eindeutigkeit der Ableitung ist die schwache Ableitung außerhalb des Ursprungs gleich der klassischen

Ableitung. Die obigen Rechnungen zeigen, dass u in ganz Ω schwach differenzierbar ist.

Wann sind u und $Du \in L^p$? Es gilt

$$\int\limits_{B_1(0)} |u|^p = c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha p+n-1} < \infty \iff -\alpha p + n > 0$$

und

$$\int\limits_{B_1(0)} |Du|^p = c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha p-p+n-1} < \infty \iff -\alpha p - p + n > 0.$$

Die letzte Bedingung ist am einschränkendsten. Somit gilt

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \iff \alpha < \frac{n-p}{p}$$

und für $p \geq n$ ist $u(x)$ in keinem $W^{1,p}(\Omega)$-Raum.

Bemerkung 8.1.9. Sei y_k eine dichte Folge in $B_1(0)$. Dann ist

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x - y_k|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B_1(0)),$$

falls $\alpha < \frac{n-p}{p}$. (Um einfach nachzuweisen, dass nicht nur die endlichen Summen in $W^{1,p}(B_1(0))$ sind, benutzt man am besten die Vollständigkeit von $W^{1,p}(B_1(0))$, die wir in Theorem 8.1.11 zeigen werden.) Es ist also möglich, dass eine Funktion $u \in W^{1,p}$ auf einer dichten Teilmenge unbeschränkt wird (selbst wenn man u auf einer Nullmenge abändert).

Theorem 8.1.10 (Eigenschaften schwacher Ableitungen)**.** *Seien u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gelten*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ *und* $D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u$ *für* $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) λ, $\mu \in \mathbb{R} \implies \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ *und* $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

(iii) Ist $\Omega' \subset \Omega$ *offen, so folgt* $u \in W^{k,p}(\Omega')$.

(iv) Ist $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, *so folgt* $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ *und es gilt die Leibnizregel*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

ist und $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.

Beweis.

(i) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann ist auch $D^\beta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega D^\alpha u D^\beta \varphi &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u D^{\alpha+\beta} \varphi \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta} u \varphi \\ &= (-1)^{|\beta|} \int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta} u \varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt $D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ im schwachen Sinne.

(ii) Ist klar.

(iii) Ist klar.
(iv) Seien $|\alpha| = 1$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \zeta u D^\alpha \varphi &= \int\limits_\Omega u D^\alpha(\zeta\varphi) - \int\limits_\Omega u \left(D^\alpha \zeta\right)\varphi \\ &= -\int\limits_\Omega D^\alpha u \zeta \varphi - \int\limits_\Omega u \left(D^\alpha \zeta\right)\varphi \\ &= -\int\limits_\Omega \left(\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta\right)\varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt nun

$$D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta.$$

Der Rest folgt nun per Induktion wie für klassisch differenzierbare Funktionen.

□

Theorem 8.1.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum.*

Bemerkung 8.1.12. Dies ist für $k = 0$ bekannt. Dann gilt nämlich $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Beweis von Theorem 8.1.11.

(i) Wir wollen zunächst zeigen, dass $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ eine Norm ist: Es ist nur die Dreiecksungleichung im Falle $p < \infty$ nachzuweisen. Seien also $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p} + \|D^\alpha v\|_{L^p}\right)^p\right)^{1/p}, \\ &\quad \text{da die Dreiecksungleichung in } L^p \text{ gilt,} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p}\right)^{1/p}, \\ &\quad \text{da } \left(\mathbb{R}^l, \|\cdot\|_{l^p}\right) \text{ ein Banachraum ist.} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

(ii) Zur Vollständigkeit: Sei u_m eine Cauchyfolge in $W^{k,p}(\Omega)$. Dann ist auch $D^\alpha u_m$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \le k$. Somit existiert für alle α mit $|\alpha| \le k$ ein Grenzwert,

$$\begin{aligned} D^\alpha u_m &\to u_\alpha, \\ u_m &\to u.\end{aligned}$$

Es fehlt nun noch der Nachweis, dass die Grenzwertbildung mit dem Ableiten vertauscht, also dass $u_\alpha = D^\alpha u$ gilt. Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{tikzcd} \int\limits_\Omega u_m D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] \arrow[d] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D^\alpha u_m \varphi \arrow[d] \\ \int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_\alpha \varphi. \end{tikzcd}$$

Die Konvergenz folgt hier, da φ in jedem L^q-Raum ist. Somit ist $D^\alpha u = u_\alpha$ und es gilt $u_m \to u \in W^{k,p}(\Omega)$. ☐

8.2. **Approximierbarkeit.** In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}$-Funktionen durch glatte Funktionen in der $W^{k,p}$-Norm approximieren.

Theorem 8.2.1 (Lokale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.**
Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, η_ε die zugehörige Diracfolge. Sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Dann ist

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

und es gilt

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Beweis. Die Regularitätsaussage ist bekannt. Sei also $|\alpha| \le k$. Wir behaupten, dass

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u \text{ in } \Omega_\varepsilon$$

gilt, dass also Glätten und schwaches Ableiten kommutieren. Für $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int\limits_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y)dy, \end{aligned}$$

da $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ für festes $x \in \Omega_\varepsilon$ eine Testfunktion ist. Somit folgt

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x).$$

Sei nun $\Omega' \Subset \Omega$. Da die Mollifizierungen in L^p konvergieren, erhalten wir

$$D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u \text{ in } L^p(\Omega').$$

Also konvergiert jeder Bestandteil der Norm und es gilt auch

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega').$$

☐

Bemerkung 8.2.2. Dies funktioniert im Falle $p = \infty$ nicht, da sich L^∞-Funktionen i. a. aufgrund ihrer Sprungstellen nicht durch glatte Funktionen in L^∞ approximieren lassen.

Theorem 8.2.3 (Globale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweisskizze.

(i) Zerlege mit Hilfe von Abschneidefunktionen u in Anteile auf „Zwiebelschalen“. Betrachte also $u\eta_i$ statt u, wobei (η_i) eine Zerlegung der Eins ist, wobei die Träger dieser Funktionen jeweils in einer festen Anzahl benachbarter Zwiebelschalen enthalten sind.
(ii) Approximiere dort bis auf einen Fehler $\frac{\delta}{2^{i+1}}$ in der $W^{k,p}$-Norm, so dass der Träger der Approximation maximal in zwei zusätzliche benachbarte Schichten reicht.
(iii) Die Summe der Approximationen ist lokal endlich und daher in C^∞. Auf $\Omega' \Subset \Omega$ schätzt man den Fehler in der Approximation mit Hilfe der Dreiecksungleichung gleichmäßig in Ω' nach oben durch δ ab. Lasse nun $\Omega' \nearrow \Omega$ und erhalte eine bis auf $\delta > 0$ approximierende Funktion.
(iv) Verwende nun $\delta > 0$ als Folgenindex. □

Bemerkung 8.2.4. Wir benötigen keine Randregularität von Ω und bekommen dafür nur $u_m \in C^\infty(\Omega)$ und nicht $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Theorem 8.2.5 (Globale Approximierbarkeit in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Seien $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass*
$$u_m \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis.
(i) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert (nach Umbenennen der Koordinatenachsen) eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1, so dass
$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : x^n > \gamma(x^1, \ldots, x^{n-1})\}$$
gilt. Definiere $V := \Omega \cap B_{r/2}(x_0)$.
(ii) Definiere für $x \in V$ und $\varepsilon > 0$ den Punkt $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert ein $\lambda = \lambda(|D\gamma|) \gg 1$, so dass $B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subset \Omega \cap B_r(x_0)$ für $x \in V$ gilt, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist. Definiere $u_\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$ für alle x mit $x^\varepsilon \in \Omega$, die um $\lambda\varepsilon$ in Richtung e_n verschobene Funktion. Mollifiziere und definiere $v^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Dies ist für $\lambda \gg 1$ in der Menge V wohldefiniert. Wir erhalten insbesondere $v^\varepsilon \in C^\infty\left(\overline{V}\right)$.
(iii) Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten
$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$
Wie in Theorem 8.2.1 sehen wir, dass $D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon \to 0$ in L^p gilt. Weiterhin gilt $D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u \to 0$ in L^p, da Translationen in L^p stetig sind. Hieraus folgt dann $v^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}(V)$.

Wir wollen noch genauer begründen, warum Translationen in L^p für $1 \le p < \infty$ stetige Abbildungen sind. Seien also $\delta > 0$ und $u \in L^p$ vorgegeben. Wir wollen nachweisen, dass $u(\cdot) - u(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p gilt. Approximiere dazu zunächst die Funktion u bis auf $\delta/3$ in L^p durch eine glatte Funktion. Das Ergebnis, $\tilde{u}$, hat einen beschränkten Gradienten, wobei die Schranke von der Approximation abhängt. Dies funktioniert so nur auf beschränkten Gebieten. Auf unbeschränkten Gebieten sind aber die Beiträge zum L^p-Integral außerhalb einer großen Kugel ohnehin klein und können direkt abgeschätzt werden. Da Translationen für Funktionen mit beschränktem Gradienten in L^p stetig sind, erhalten wir $\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p. Wir wählen nun $|h|$ so klein, dass auch diese Differenz durch $\delta/3$ beschränkt ist. Wir erhalten somit
$$\begin{aligned}\|u(\cdot) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \le{}& \|u(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|_{L^p} + \|\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h)\|_{L^p} \\ &+ \|\tilde{u}(\cdot - h) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \\ \le{}& \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta.\end{aligned}$$

(iv) Sei nun $\delta > 0$. Da Ω beschränkt ist, existieren endlich viele Punkte $x_i^0 \in \partial\Omega$ und Radien $r_i > 0$, so dass $V_i = \Omega \cap B_{r_i/2}(x_i^0)$ wie in (i) ist und $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{r_i/2}(x_i^0)$ gilt. Wie oben gezeigt, gibt es also $v_i \in C^\infty\left(\overline{V}_i\right)$ mit $\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \le \delta$. Wähle noch $V_0 \Subset \Omega$, so dass $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=0}^{N} V_i$ gilt. Nach Theorem 8.2.1 gibt es $v_0 \in C^\infty\left(\overline{V}_0\right)$ mit $\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \le \delta$.

(v) Sei nun ζ_i eine den Mengen V_i untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Definiere $v := \sum\limits_{i=0}^{N} \zeta_i v_i$. Es gilt $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &= \left\| \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i v_i) - \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i u) \right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\le \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \\
&\le c \cdot \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \\
&\le c \cdot (N+1)\delta,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt benutzt haben, dass die Ableitungen der Funktionen ζ_i gleichmäßig beschränkt sind. Die Behauptung folgt. □

8.3. **Fortsetzbarkeitssätze.**
In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}(\Omega)$-Funktionen nach $\mathbb{R}^n$ als $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger fortsetzen, so dass deren Norm durch die ursprüngliche Norm abgeschätzt bleibt.

Theorem 8.3.1 (Fortsetzungssatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega \Subset V$. Dann gibt es eine beschränkte lineare Abbildung*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty,$$

so dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgendes gilt

- *$Eu = u$ fast überall in Ω,*
- $\operatorname{supp}(Eu) \subset V$,
- $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c(p, \Omega, V) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Die Funktion Eu heißt Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Nehme zunächst an, dass lokal $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Dann gibt es $r > 0$, so dass ohne Einschränkung

$$\begin{aligned}
B^+ &:= B_r(x_0) \cap \{x^n \ge 0\} \subset \overline{\Omega}, \\
B^- &:= B_r(x_0) \cap \{x^n \le 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.
\end{aligned}$$

(ii) Nehme zunächst an, dass $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt. Definiere eine Spiegelung von höherer Ordnung durch

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ -3u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) + 4u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\frac{1}{2}x^n\right), & x \in B^-. \end{cases}$$

(iii) Wir behaupten zunächst, dass $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$ ist. Definiere dazu $u^- := \overline{u}|_{B^-}$ und $u^+ := \overline{u}|_{B^+}$. Für die Normalableitungen erhalten wir

$$\frac{\partial u^-}{\partial x^n} = 3\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) - 2\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\tfrac{1}{2}x^n\right).$$

Somit gilt auf $\{x^n = 0\} \cap B_r(x_0)$ für die Normalenableitungen $u^-_{x^n} = u^+_{x^n}$. Auf der Menge $\{x^n = 0\} \cap B_r(x_0)$ stimmen die Funktionswerte von u^+ und u^- und damit auch die Tangentialableitungen überein. Somit ist $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$.

(iv) Es gilt

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(B_r(x_0))} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$

da in der Definition der Spiegelung höherer Ordnung nie weiter als bisher von $\{x^n = 0\}$ entfernt ausgewertet wird. Da die Spiegelung eine Linearkombination von $W^{1,p}$-Funktionen ist und da das neue Argument die Norm höchstens um eine Konstante vergrößert, folgt die Behauptung.

(v) Ist der Rand nicht eben/flach, so biegt man den Rand zunächst flach, setzt dann fort und transformiert anschließend zurück.

(vi) Da sich der Rand nicht mit einer solchen Umgebung überdecken läßt, zerlegt man die Funktion zunächst mit einer geeigneten Zerlegung der Eins und baut das Resultat anschließend wieder zusammen.

(vii) Durch Multiplikation mit einer Abschneidefunktion, die Null wird bevor man Stellen erreicht, an denen u nicht mehr von der Klasse C^1 ist, stellt man sicher, dass der Träger der fortgesetzten Funktion nicht zu groß wird.

(viii) Wir erhalten also die Abschätzung

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Die Details zu den letzten Schritten sind eine Übung.

(ix) Seien nun $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wir approximieren u durch Funktionen $u_m \in C^\infty(\overline{u})$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir $u_m \to u$ fast überall in Ω annehmen. Damit folgt später $Eu = u$ in Ω. Die Abbildung $v \mapsto Ev := \overline{v}$ ist ein linearer Operator. Die Stetigkeit folgt dabei aus der obigen Abschätzung für glatte Funktionen. Diese Abschätzung liefert aber auch

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Daher ist Eu_m eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren nun $\overline{u} = Eu$ als den Grenzwert dieser Folge. Eu ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig und die gesuchte Fortsetzung.

(x) Der Fall $p = \infty$ ist ebenfalls eine Übung. □

Bemerkung 8.3.2. Für $\partial\Omega \in C^2$ funktioniert die obige Konstruktion auch noch für $W^{2,p}(\Omega)$-Funktionen. Dabei bleibt eine C^2-Funktion jedoch nicht in dieser Klasse.

Mit Hilfe von Spiegelungen höherer Ordnung kann man analog aber auch Fortsetzungsoperatoren für die Räume $W^{k,p}$ konstruieren. Dies bleibt als Übung.

8.4. **Spuren von Sobolevfunktionen.** Wir wollen Randwerte von $W^{1,p}$-Funktionen definieren. Diese Funktionen sind i. a. nicht stetig und $\partial\Omega$ ist eine Nullmenge.

Sei Ω beschränkt. Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < \infty$, so besitzt u Randwerte als L^p-Funktion.

Theorem 8.4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

so dass $Tu = u|_{\partial\Omega}$, *falls* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *ist und*

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c(p,\Omega) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *gilt.*

Beweis.

(i) Nehme zunächst an, dass $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist, dass $\partial\Omega$ in der Nähe eines Randpunktes $x_0 \in \partial\Omega$ flach ist, lokal also $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Wähle nun $r > 0$ so, dass $B_r(x_0) \cap \Omega = B_r(x_0) \cap \{x^n > 0\}$ gilt. Definiere $\hat{B} := B_{r/2}(x_0)$ und $B := B_r(x_0)$. Setze weiterhin $\Gamma := \partial\Omega \cap \{x^n = 0\} \cap \hat{B}$ und $(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x^n = 0\}$, wobei das letzte Gleichheitszeichen die Identifikation der beiden Mengen andeutet.

Sei $\zeta \in C_c^\infty(B)$, $\zeta \ge 0$ und $\zeta = 1$ in $\hat{B}$. Setze $B^+ := B \cap \Omega$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma |u|^p d\hat{x} &\le \int\limits_{\{x^n=0\}} \zeta \cdot |u|^p d\hat{x} \\ &= -\int\limits_{B^+} \left(\zeta|u|^p\right)_{x^n} dx \quad \text{(Hauptsatz)} \\ &\le \int\limits_{B^+} |D\zeta| \cdot |u|^p + p|u|^{p-1}|Du|\zeta\end{aligned}$$

(für $p = 1$ erhält man dieselbe obere Aschätzung mit $\pm\zeta u$ punktweise und integriert dann in $\hat{x}$)

$$\le c \cdot \int\limits_{B^+} |u|^p + |Du|^p \quad \left(\text{Young, } \tfrac{p-1}{p} + \tfrac{1}{p} = 1\right).$$

(ii) Für ein allgemeines C^1-Gebiet Ω, eine kleine Umgebung Γ von $x_0 \in \partial\Omega$ in $\partial\Omega$ erhält man durch Aufbiegen ebenfalls

$$\int\limits_\Gamma |u|^p \le c \cdot \int\limits_\Omega |u|^p + |Du|^p.$$

(iii) Überdecke nun $\partial\Omega$ mit solchen Randstücken Γ, zerlege mit Hilfe einer Zerlegung der Eins und erhalte

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Definiere $Tu := u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Es folgt

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Wir bemerken, dass T ein linearer Operator ist.

(iv) Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ beliebig. Sei $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ eine approximierende Folge, also $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir erhalten

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Daher ist Tu_m eine Cauchyfolge in $L^p(\partial\Omega)$. Wir definieren also

$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m \text{ in } L^p(\partial\Omega).$$

Diese Definition ist unabhängig von der approximierenden Folge u_m.

(v) Sei schließlich $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Die in Theorem 8.2.5 konstruierte Folge ist so definiert, dass sie in diesem Falle auf ganz $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen u konvergiert. Daher folgt hier $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Da der Grenzwert aber von der approximierenden Folge unabhängig ist, gilt dies auch, wenn man andere approximierende Folgen verwendet. □

Theorem 8.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad Tu = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei zunächst $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es nach Definition der $W_0^{1,p}(\Omega)$-Funktionen eine Folge von Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für alle Folgenglieder gilt $Tu_m = 0$ auf $\partial\Omega$. Da $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ein stetiger linearer Operator ist, folgt auch $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und gelte $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir benutzen eine Zerlegung der Eins und biegen den Rand $\partial\Omega$ lokal auf. Daher dürfen wir annehmen, dass $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right) \equiv W^{1,p}(\{x^n > 0\})$, $\operatorname{supp} u \Subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$ und $Tu = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ gelten. Wir wollen nachweisen, dass sich u in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ durch $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$-Funktionen approximieren läßt. Es gilt $Tu = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$. Daher gibt es $u_m \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$, so dass

$$\begin{aligned} u_m &\to u \text{ in } W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right), \\ Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} &\to 0 \text{ in } L^p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Sei nun $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x^n \ge 0$. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$|u_m(\hat{x}, x^n)| \le |u_m(\hat{x}, 0)| + \int_0^{x^n} |u_{m,x^n}(\hat{x}, t)|dt.$$

Wir betrachten die p-te Potenz dieser Ungleichung und schätzen mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung mit den Exponenten p und $\frac{p}{p-1}$ ab

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, x^n)|^p d\hat{x} \le{}& c(p) \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\ &+ c(p) \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{x^n} 1 \cdot |Du(\hat{x}, t)|dt \right)^p d\hat{x} \\ \le{}& c(p) \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\ &+ c(p) \cdot (x^n)^{p-1} \cdot \int_0^{x^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(\hat{x}, t)|^p d\hat{x}\, dt. \end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ gilt $u_m \to 0$ in $L^p\left(\partial\mathbb{R}^n_+\right)$ und $u_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Daher folgt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x}, t)|^p\, d\hat{x} \le c(p) t^{p-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, \tau)|^p d\hat{x}\, d\tau.$$

Wir integrieren dies bezüglich t und erhalten

$$\int_0^{x^n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x},t)|^p\, d\hat{x}\, dt \le c(p)\int_0^{x^n} t^{p-1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},\tau)|^p d\hat{x}\, d\tau\, dt. \tag{8.1}$$

Definiere nun die approximierenden Funktionen mit Randwerten Null. Sei $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $0 \le \zeta \le 1$ und

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } [0,1], \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \setminus [0,2]. \end{cases}$$

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n_+$ Funktionen

$$\zeta_m(x) := \zeta(mx^n)$$

und

$$w_m(x) := u(x)(1-\zeta_m).$$

Es folgt

$$w_{m,x^n} = u_{x^n}(1-\zeta_m) - mu\zeta'$$

und

$$D_{\hat{x}} w_m = D_{\hat{x}} u(1-\zeta_m).$$

Zeige nun, dass $w_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ konvergiert. Es gilt $w_m \to u$ in L^p aufgrund der Stetigkeit des Integrals bezüglich des Integrationsgebietes. Wir schätzen wie folgt ab

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p \le c(p)\int_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p |Du|^p + c(p,\zeta)m^p \int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \equiv A + B.$$

Wir benutzen nochmals die Stetigkeit bezüglich des Integrationsgebietes (oder den Satz von der dominierenden Konvergenz mit entsprechend "abgeschnittenen" Funktionen) und erhalten $A \to 0$ für $m \to \infty$. Das zweite Integral schätzen wir mit Hilfe von (8.1) ab

$$\begin{aligned} B &\le c\cdot m^p \int_0^{2/m} t^{p-1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},\tau)|^p d\hat{x} d\tau dt \\ &\le c\cdot m^p \left(\int_0^{2/m} t^{p-1} dt\right)\cdot\left(\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x} dt\right) \\ &\le c\cdot \int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x} dt \\ &\to 0 \end{aligned}$$

für $m \to \infty$. Wir erhalten also $w_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Andererseits gilt $w_m = 0$ für $0 < x^n < 1/m$. Daher erhält man durch Mollifizierung der w_m eine Folge $u_m \in C^\infty_c\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ und es gilt (wie behauptet) $u \in W^{1,p}_0\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. $\square$