FUNKTIONALANALYSIS

GUOFANG WANG

ZUSAMMENFASSUNG. Dieses Skript basiert auf den Skripts von Prof. E. Kuwert und Prof. O. Schürer.

INHALTSVERZEICHNIS

Einführung

In dieser Vorlesung geht es hauptsächlich um unendlich dimensionale Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen ihnen.

Thema: Seien X, Y Funktionenräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A : X \to Y$ lineare Abbibildung.

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$$

i.a. $\dim X = \dim Y = \infty$. We wollen die Lsüngen von linearen Gleicheung $Au = f$ untersuchen. Lösungsverfahren der linearen Algebra sind nictht anwendar.

Beispiel 1. $X = \{x = (x_1, x_2, x_3 \cdots) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}\}$
(i) $A : X \to X, A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. A is linear, injektiv, aber nicht surjektiv.
(ii) $B : X \to X$, $B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$. B is linear, surjektiv, aber nicht injektiv.

Beispiel 2. $X = C^0([-\pi, \pi])$, $A : X \to X$, $(Au)(t) = (\sin t)u(t)$
A ist linear, aber hat keinen Eigenwert: Angenommen, A hat einen Eigenwert: $Au = \lambda u$, $u \neq 0$, und $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.,

$$(\sin t)u(t) = \lambda u(t), \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Daraus folgt $\{t : u(t) \neq 0\} \subset \{t : \sin t = \lambda.\}$ Das ist unmöglich.

Beispiel 3. Dirichlet-Prinzip für elliptische Randwertprobleme.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschänkt mit glatten Rand. Sei $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gegeben. Gesucht ist eine Lösung $u \in C_0^\infty(\Omega)$ des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Variationasansatz: Funktional $F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 - \int_\Omega fv$.

Lemma 0.0.1. *Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $F(u) \le F(v) \, \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt*

$$-\Delta u = f$$

Proof. Sei $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann gilt

$$F(u+\varepsilon\eta) = F(u) + \varepsilon \int_\Omega \langle Du, D\eta\rangle - \varepsilon \int_\Omega f\eta + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_\Omega |D\eta|^2.$$

Daraus folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} F(u+\varepsilon\eta) = \int_\Omega \langle Du, D\eta\rangle - \int_\Omega f\eta = -\int_\Omega (\Delta u + f)\eta.$$

Aus dem Lemma von Variationsrechnung folgt

$$-\Delta u = f.$$

□

(I) Minimieren $F = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 - \int_\Omega fv$ in $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ ist formal analog zu
(II) Minimieren $F(x) = \frac{1}{2}|x|^2 - \langle a, x\rangle$ in $\mathbb{R}^n$.

1. Topologische Grundlagen

1.1. **Topologische Räume.**

Definition 1.1.1. Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset 2^X$ heißt Topologie auf X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,
(ii) $\mathcal{O}$ ist unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen, d. h. aus $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, I eine beliebige (Index-)Menge, folgt auch $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.
(iii) $\mathcal{O}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d. h. aus $O_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, n$, folgt auch $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$.
   (Es genügt hier für $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ auch $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ zu fordern.)

$(X, \mathcal{O})$ (oder auch X) heißt topologischer Raum.

Eine Menge $A \subset X$ heißt offen, falls $A \in \mathcal{O}$ gilt. $B \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus B \in \mathcal{O}$ gilt.

Definition 1.1.2. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge von X.

(i) Sei $x \in X$. Dann heißt $U \subset X$ Umgebung von x, falls es ein $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subset U$ gibt.
(ii) $x \in X$ heißt Berührpunkt von A, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat.
(iii) Die Menge der Berührpunkte von A heißt Abschluss (oder abgeschlossene Hülle) von A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.
(iv) Ein Punkt x ist ein innerer Punkt von A, falls A eine Umgebung von x ist.
(v) Das Innere von A ist als die Menge der inneren Punkte definiert und wird mit $\mathring{A}$ bezeichnet, der einfacheren Schreibweise wegen aber auch mit $\operatorname{int}(A)$.
(vi) Ein Punkt x heißt Randpunkt, $x \in \partial A$, wenn er Berührpunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

Definition 1.1.3. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(i) Sei $A \subset X$. Dann ist $(A, \mathcal{O}_A)$ mit

$$\mathcal{O}_A := \{O \cap A \colon O \in \mathcal{O}\}$$

ein topologischer Raum. $\mathcal{O}_A$ heißt induzierte Topologie (oder Relativtopologie oder Spurtopologie).

Beispiel: $(1/2, 1]$ ist in $[0, 1]$ offen.

(ii) Sei $A \subset X$. Dann heißt A dicht in X, falls $\overline{A} = X$ gilt.

Sei $A \subset B \subset X$. Dann heißt A dicht in B, falls A dicht in $(B, \mathcal{O}_B)$ ist.

(iii) X heißt separabel, falls es eine höchstens abzählbare Teilmenge $A \subset X$ mit $\overline{A} = X$ gibt.

(iv) Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien auf X. Dann heißt $\mathcal{O}_1$ gröber als $\mathcal{O}_2$, falls $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ gilt. Gilt $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$.

Bemerkung 1.1.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Setze $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{A \subset X : \forall\, x \in A\ \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A\}$$

eine Topologie auf X. Auf metrischen Räumen werden wir stets diese von der Metrik induzierte Topologie verwenden. (Beweis: Analysis-Vorlesung.)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt metrisierbar, wenn es eine Metrik d auf X gibt, die die vorgegebene Topologie induziert.

Der Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist nicht metrisierbar, falls X mehr als zwei Punkte enthält, da es dann Mengen $B_\varepsilon(x) \neq X$ gibt.

Definition 1.1.5. Zwei Metriken heißen äquivalent, falls sie die gleiche Topologie induzieren.

Definition 1.1.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$ mit $x_n \in B_r(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

(ii) Eine Menge $A \subset X$ heißt beschränkt, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$ mit $A \subset B_r(x_0)$ gibt.

Lemma 1.1.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine Metrik auf X, die zu d äquivalent ist, so dass X in dieser Metrik beschränkt ist.*

Beweis. Setze $\hat{d}(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. □

Beispiel 1.1.8. Sei $X = C^0([0, 1])$. Dann definieren $\|f\|_{L^1([0,1])} := \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx$ und $\|f\|_{L^\infty([0,1])} := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ Normen auf X. Sie induzieren Metriken auf X vermöge $d_1(f, g) := \|f - g\|_{L^1([0,1])}$ und $d_\infty(f, g) := \|f - g\|_{L^\infty([0,1])}$. Wir wollen zukünftig stets annehmen, dass die Metrik auf einem normierten Raum die von der Norm induzierte Metrik ist.

Dann ist $\mathrm{id} : (X, d_\infty) \to (X, d_1)$ stetig, denn es gilt

$$\|f\|_{L^1([0,1])} = \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty([0,1])},$$

also auch $d_1(f, g) \le d_\infty(f, g)$. Die Umkehrung $\mathrm{id} : (X, d_1) \to (X, d_\infty)$ ist jedoch nicht stetig, denn für $f_n(x) := x^n$ gilt

$$\|f_n\|_{L^1([0,1])} = \int\limits_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \quad \text{aber} \quad \|f_n\|_{L^\infty([0,1])} = 1.$$

Also erhalten wir $d_1(f_n, 0) \to 0$, aber $d_\infty(f_n, 0) \not\to 0$.

Definition 1.1.9. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Dann heißt U Umgebung von A, falls U Umgebung für alle Punkte von A ist.

Definition 1.1.10. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann heißt $x_0 \in X$

(i) Häufungspunkt der Folge, falls in jeder Umgebung von x_0 unendlich viele Folgeglieder enthalten sind.
(ii) Grenzwert der Folge, falls außerhalb jeder Umgebung von x_0 nur endlich viele Folgeglieder liegen.

1.2. **Stetige Abbildungen.**

Definition 1.2.1. Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$, topologische Räume. Sei $f\colon X_1 \to X_2$ eine Abbildung.

(i) Dann heißt f stetig, falls für alle offenen Mengen $U \subset X_2$ auch $f^{-1}(U)$ in X_1 offen ist.
(ii) f heißt offen, falls für alle offenen Mengen $U \subset X_1$ auch $f(U)$ in X_2 offen ist.
(iii) f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.
(iv) f heißt in $x_0 \in X_1$ stetig, falls es zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$ gibt.

Definition 1.2.2. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Dann heißt die Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ Isometrie, falls

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

für alle $x, y \in X_1$ gilt. Eine bijektive Isometrie heißt isometrischer Isomorphismus.

Theorem 1.2.3. *Sei $\mathbb{R}^n$ der euklidische Raum, d. h. der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik oder Standardmetrik (wie immer, wenn wir die Metrik des $\mathbb{R}^n$ nicht explizit angeben). Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein isometrischer Isomorphismus. Dann gilt $f(x) = Ax + b$ für eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$.*

Der Nachweis, dass Abbildungen dieser Form isometrische Isomorphismen sind, ist einfach. Der Beweis der umgekehrten Implikation findet sich in der Vorlesung LA.

1.3. **Kompaktheit.**

Definition 1.3.1.

(i) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X (überdeckungs-)kompakt oder quasikompakt, falls jede Überdeckung
$$X = \bigcup_{i\in I} A_i$$
durch offene Mengen A_i, $i \in I$, d. h. eine offene Überdeckung, eine endliche Teilüberdeckung
$$X = \bigcup_{j=1}^{N} A_{i_j}$$
besitzt.
(ii) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $A \subset X$ relativ kompakt, wenn $\overline{A} \subset X$ kompakt ist.
(iii) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X (folgen-)kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt.
(iv) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt X präkompakt (oder totalbeschränkt), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_i \in X$, $1 \le i \le N$, mit
$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$$

gibt.

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt kompakt, falls A mit von X induzierter Metrik bzw. Topologie kompakt ist. Wir wollen ebenso einen Teilraum $A \subset X$ vollständig, beschränkt, präkompakt, ... nennen, falls dies für A mit der von X induzierten Topologie oder Metrik gilt.

Theorem 1.3.2. *Seien X, Y topologische Räume. Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ (überdeckungs-)kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Da f stetig ist, ist auch $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Sei ohne Einschränkung $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{1\le i\le N}$ eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist $(U_i)_{1\le i\le N}$ eine endliche Überdeckung von $f(X)$. □

Theorem 1.3.3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist (überdeckungs-)kompakt.
(ii) X ist folgenkompakt.
(iii) X ist präkompakt und vollständig.

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Sei $(x_n)_n$ eine Folge. Definiere

$$F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}.$$

Die Mengen F_n sind abgeschlossen, $U_n := X \setminus F_n$ ist also offen. Wir behaupten, dass es ein $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ gibt. Dies ist dann der gesuchte Häufungspunkt der Folge. Falls es kein solches a gibt, ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, was äquivalent zu $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ ist. Somit ist $(U_n)_n$ eine offene Überdeckung von X und endlich viele der Mengen U_n überdecken bereits X, ohne Einschränkung gelte $\bigcup\limits_{n=1}^{N} U_n = X$. Dies ist äquivalent zu $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_n = \emptyset$. Es gilt aber $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_n = F_N \neq \emptyset$. Widerspruch.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Da X folgenkompakt ist, ist X auch vollständig.

Falls X nicht präkompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i) \subsetneq X$ für alle $x_i \in X$ und alle N gilt. Fixiere nun $x_0 \in X$ beliebig und wähle $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n} B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$ beliebig. Es gilt stets $d(x_i, x_j) \ge \varepsilon$ für $i \neq j$. Somit besitzt $(x_n)_n$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Nehme an, dass es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ ohne endliche offene Teilüberdeckung gibt. $n = 0$: Da X präkompakt ist, gibt es endlich viele offene Kugeln vom Radius $1 = 2^{-0}$, die X überdecken. Mindestens eine davon, $B_{2^{-0}}(x_0)$, wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt.

Seien $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bereits definiert. Dann wird X von endlich vielen Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ überdeckt. Mindestens eine davon, $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1})$ wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt. Wir können dabei $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1}) \cap B_{2^{-n}}(x_n) \neq \emptyset$ annehmen. (Sonst würden nämlich alle Bälle vom Radius $2^{-(n+1)}$ mit nichtleerem Schnitt mit $B_{2^{-n}}(x_n)$ endlich durch Mengen in $\mathcal{U}$ überdeckt und das würde somit auch für $B_{2^{-n}}(x_n)$ gelten. Widerspruch.) Also gilt $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-(n+1)} + 2^{-n} < 2^{-(n-1)}$ und somit für $p \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+p}) < 2^{-(n-1)} + 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \ldots + 2^{-(n+p-2)} < 2^{-(n-2)}.$$

Daher ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X, konvergiert also gegen ein $x \in X$ und wir erhalten $d(x_n, x) \le 2^{-(n-2)}$ durch Grenzübergang $p \to \infty$. x liegt aber in einer offenen Menge aus $\mathcal{U}$. Dies gilt auch für $B_\varepsilon(x)$. Nach Dreiecksungleichung gilt aber $B_{2^{-n}}(x_n) \subset B_{2^{-(n-2)}+2^{-n}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ für große Werte von n. Widerspruch zur Wahl von x_n. ☐

Definition 1.3.4. Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 1.3.5. *Seien X, Y metrische Räume. Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Falls nicht, gibt es $\varepsilon > 0$ und Punkte $a_n, b_n \in X$ mit $d_X(a_n, b_n) < 1/n$ aber $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \ge \varepsilon$. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge der a_n, ohne Einschränkung gelte also $a_n \to a \in X$ für $n \to \infty$. Nach Dreiecksungleichung gilt $d_X(a, b_n) \le d_X(a, a_n) + d_X(a_n, b_n)$, also gilt auch $b_n \to a$ für $n \to \infty$. Da aber f in a stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ gilt. Sei n so groß, dass $a_n, b_n \in B_\delta(a)$ gilt. Wir erhalten dann $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \le d_Y(f(a_n), f(a)) + d_Y(f(a), f(b_n)) < \varepsilon$. Widerspruch. ☐

Theorem 1.3.6. *Sei Y ein metrischer Raum. Sei $X \subset Y$ kompakt. Dann ist X*
- *(i) beschränkt,*
- *(ii) abgeschlossen sowie*
- *(iii) separabel.*

Nur für die Abgeschlossenheit ist der umgebende Raum wichtig.

Beweis.
- (i) Folgt aus der Präkompaktheit.
- (ii) Folgt aus der Folgenkompaktheit.
- (iii) Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es endlich viele Kugeln mit Radius $1/n$, die X überdecken. Sei X_n die endliche Menge der zugehörigen Mittelpunkte. Dann ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ die gesuchte höchstens abzählbare dichte Teilmenge. ☐

Definition 1.3.7. Seien (X, d), (Z, D), metrische Räume und sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i\colon X \to Z$.
- (i) $(f_i)_{i\in I}$ heißt gleichgradig stetig, falls
$$\forall x \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall i \in I\, \forall y \in X : d(x, y) < \delta \implies D(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$
- (ii) $(f_i)_{i\in I}$ heißt gleichmäßig gleichgradig stetig, falls
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall i \in I\, \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \implies D(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 1.3.8 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge gleichgradig stetiger Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge, ohne Einschränkung $(f_n)_n$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert: $f_n \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$.*

Proof. Beweisidee: Mit einem Diagonalfolgenargument erhalten wir eine Teilfolge, die auf einer dichten Teilmenge konvergiert. Aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit konvergiert die Teilfolge überall.

Die gleichmäßige Konvergenz weist man nach, indem man die gleichmäßige Konvergenz in einer genügend großen endlichen Menge und erneut die gleichgradige Stetigkeit benutzt.

Aus die Kompaktheit von X ist X separabel ist. Sei $A = \{x_j\}_{j=1}^\infty$ dicht in X. Wir sollen eine konvergente Teilfolge von $\{f_n\}_n$ finden.

Schritt 1. Wir finden zunachst eine Teilfolge, die in jedem x_j konvergiert. Dazu benutzen wir ein Diagonalargument zusammen mit der gleichmäßigen Beschranktheit. Da $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^\infty$ eine beschrankte Folge in $\mathbb{R}$ ist, besitzt sie eine konvergente Teilfolge $\{f_{n,1}(x_1)\}$. Die Folge $\{f_{n,1}(x_2)\}_{n=1}^\infty$ ist wiederum beschrankt in $\mathbb{R}$, also besitzt sie eine konvergente Teilfolge $\{f_{n,2}(x_2)\}_{n=1}^\infty$. Jetzt wiederholen wir das Argument und betrachten die Diagonalfolge $\{f_{n,n}\} =: \{g_n\}_{n=1}^\infty$. Diese Folge ist eine Teilfolge von $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, die nach Konstruktion in jedem x_j konvergiert.

Schritt 2. Jetzt zeigen wir, dass $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ gleichmäßig konvergiert. Dazu benötigen wir die gleichgradige Stetigkeit. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme δ aus der Definition der gleichgradigen Stetigkeit. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \cdots, x_l \in A$, so dass die Kugeln um sie mit Radius δ ganz X überdecken. Sei jetzt $x \in X$ beliebig. Betrachte x_j mit $d(x, x_j) < \delta$. Da $g_n(x_j)$ nach Schritt 1 konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ gilt. Damit erhalten wir

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_m(x)| < 3\varepsilon,$$

wobei wir bei dem ersten und dem letzten Summanden die gleichgradige Stetigkeit benutzt haben. Also ist g_n eine Cauchyfolge. □

Bemerkung 1.3.9. Im $\mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge kompakt. In metrischen Räumen gilt dies i. a. nicht mehr: In $l^2(\mathbb{N})$ (siehe folgendes Kapitel) ist $\overline{B_1(0)}$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt, da die Vektoren $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ für $i \neq j$ die Gleichheit $d(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ erfüllen.

1.4. **Vervollständigung.**

Definition 1.4.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt Cauchyfolge, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \forall\, n, m \geq N \colon d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(ii) X heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Lemma 1.4.2. *Sei $f \colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ gleichmäßig stetig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_1. Dann ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_2.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass
$$d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
gilt. Da $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X_1 ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $d_1(x_n, x_m) < \delta$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Zusammengenommen folgt $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. □

Lemma 1.4.3. *Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Sei X_2 vollständig. Sei $X \subset X_1$ dicht. Sei $f \colon X \to X_2$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $g \colon X_1 \to X_2$. g ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $x \in X_1$, $x_n \to x$ eine Cauchyfolge mit $x_n \in X$. Setze
$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$
Nach Lemma 1.4.2 existiert der Grenzwert auf der rechten Seite für eine feste Cauchyfolge. g ist wohldefiniert, denn für zwei Cauchyfolgen $x_n \to x$ und $y_n \to x$

ist auch

$$z_n := \begin{cases} x_{n/2} & \text{für gerades } n, \\ y_{\frac{n+1}{2}} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

eine Cauchyfolge. Da konstante Cauchyfolgen zugelassen sind, ist g eine Fortsetzung von f.

Zur gleichmäßigen Stetigkeit: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass $d_1(a,b) < 3\delta \Longrightarrow d_2(f(a), f(b)) < \varepsilon/3$ für alle $a, b \in X$ gilt. Seien $x, y \in X_1$. Wähle Cauchyfolgen $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$ mit $x_n, y_n \in X$. Dann gilt für $d_1(x,y) < \delta$

$$d_2(g(x), g(y)) \le \underbrace{d_2(g(x), f(x_n))}_{<\varepsilon/3} + d_2(f(x_n), f(y_n)) + \underbrace{d_2(f(y_n), g(y))}_{<\varepsilon/3},$$

falls n groß ist. Aus $d_1(x,y) < \delta$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung $d_1(x_n, y_n) < 3\delta$ für $n \gg 1$. Somit erhalten wir für den mittleren Term aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f die Abschätzung $d_2(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/3$.

Sei h eine weitere Fortsetzung und $x_n \to x$ mit $x_n \in X$. Dann gilt

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x).$$

Somit ist die Fortsetzung von f eindeutig bestimmt. □

Definition 1.4.4 (Vervollständigung)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Vervollständigung von (X,d) ist ein Tripel $\big(\hat{X}, \hat{d}, \iota\big)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\big(\hat{X}, \hat{d}\big)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
(ii) $\iota\colon X \to \hat{X}$ ist eine Isometrie mit dichtem Bild.
(iii) Sei Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder gleichmäßig stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$, so dass $\hat{f} \circ \iota = f$ gilt, d. h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & \hat{X} \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Später nennt man auch laxerweise $\big(\hat{X}, \hat{d}\big)$ die Vervollständigung von (X,d) oder sagt, dass $\hat{X}$ die Vervollständigung von X sei.

Wir nennen $\hat{f}$ eine Fortsetzung von f, da wir X vermöge ι als Teilmenge von $\hat{X}$ auffassen können.

Zwei Vervollständigungen $\big(\hat{X}, \hat{d}, \iota\big)$ und $\big(\tilde{X}, \tilde{d}, \jmath\big)$ heißen isometrisch isomorph, falls es einen isometrischen Isomorphismus $f\colon \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $\jmath = f \circ \iota$ gibt, d. h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\jmath"] \arrow[dr, "\iota"'] & & \tilde{X} \\ & \hat{X} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 1.4.5. ⋆ Die Forderung nach $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$ kann man auch durch die Forderung nach einer eindeutigen Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$ ersetzen und erhält eine äquivalente Definition.

Beweis.

(i) Ist $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$, so ist $\hat{f}$ wegen $\hat{f} \circ \iota = f$ auf einer dichten Teilmenge eindeutig vorgegeben. Da $\hat{f}$ stetig ist, ist die Abbildung also eindeutig bestimmt.

(ii) Ist $\overline{\iota(X)} \subsetneq \hat{X}$, so können wir mit $x_0 \in \hat{X} \setminus \overline{\iota(X)}$ und $Y = [0,1]$ nach Tietze-Urysohn stetige Funktionen $\hat{f}_i \colon \hat{X} \to Y$ mit $f_i\left(\overline{\iota(X)}\right) = \{0\}$ und $\hat{f}_i(x_0) = i$ finden. Somit ist die zur Nullabbildung $f \colon X \to Y$ zugeordnete Abbildung $\hat{f}$ nicht eindeutig bestimmt. □

Theorem 1.4.6 (Vervollständigung). *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine Vervollständigung $\left(\hat{X}, \hat{d}, \iota\right)$.*

Die Vervollständigung $\left(\hat{X}, \hat{d}, \iota\right)$ ist bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Die doppelte Vervollständigung $\left(\hat{\hat{X}}, \hat{\hat{d}}, \hat{\iota} \circ \iota\right)$ ist ebenfalls isometrisch isomorph zu $\left(\hat{X}, \hat{d}, \iota\right)$.

Vergleiche dies mit der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

Beweis ⋆.

(i) Existenz: Auf dem Raum der Cauchyfolgen in X definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Es ist mit Hilfe der Dreiecksungleichung leicht zu sehen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Mit $[(x_n)_n]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge $(x_n)_n$. Sei

$$\hat{X} := \{[(x_n)_n] \colon (x_n)_n \text{ ist Cauchyfolge in X}\}.$$

Auf $\hat{X}$ definieren wir eine Metrik $\hat{d} \colon \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}_+ \equiv \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\hat{d}([(x_n)_n], [(y_n)_n]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Man rechnet direkt nach, dass $\hat{d}$ wohldefiniert und eine Metrik ist. Die Dreiecksungleichung folgt dabei aus

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n),$$

indem man zunächst auf der rechten Seite den Grenzwert $n \to \infty$ betrachtet. Die behaupteten Eigenschaften von $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ werden wir noch nachweisen.

(ii) Definiere $\iota \colon X \to \hat{X}$ durch

$$x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}],$$

wir bilden x also auf die Äquivalenzklasse der konstanten Cauchyfolge ab. Dies ist eine Isometrie.

(iii) $\iota(X)$ liegt dicht in $\hat{X}$: Sei $[(x_n)_n] \in \hat{X}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ für $n, m \geq N$ gilt. Es ist $[(x_N)_n] \in \iota(X)$ und es gilt

$$\hat{d}([(x_N)_n], [(x_n)_n]) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_N, x_n)}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

(iv) Vollständigkeit: Sei $([x_k])_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Gelte $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{k,n}, x_{k,m}) < 1/k$ für $n, m \geq N_k$. Wir definieren $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ durch $y_l := x_{l,N_l}$. Wir wollen nachweisen, dass $y := (y_l)_l$ eine Cauchyfolge in X ist und dass $[x_k] \to [y]$ in $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ gilt.

(v) $(y_l)_l$ ist eine Cauchyfolge in X: Zunächst ist

$$\hat{d}(\iota(x_{i,N_i}), [x_i]) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_{i,N_i}, x_{i,n})}_{\leq 1/i \text{ für } n \geq N_i} \leq \frac{1}{i}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
d(y_k, y_l) &\le d(y_k, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{l,m}) + d(x_{l,m}, y_l) \\
&\le \tfrac{1}{k} + d(x_{k,m}, x_{l,m}) + \tfrac{1}{l} \quad \forall\, m \ge \max\{N_k, N_l\} \\
&\le \tfrac{1}{k} + \hat{d}([x_k], [x_l]) + \left|\hat{d}([x_k], [x_l]) - d(x_{k,m}, x_{l,m})\right| + \tfrac{1}{l} \\
&\qquad \forall\, m \ge \max\{N_k, N_l\}.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. $([x_k])_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Daher können wir $k, l \in \mathbb{N}$ mit $1/k + 1/l \le \varepsilon/3$ und $\hat{d}([x_k], [x_l]) \le \varepsilon/3$ fixieren. Benutze die Definition von $\hat{d}$ und wähle m so groß, dass

$$\left|\hat{d}([x_k], [x_l]) - d(x_{k,m}, x_{l,m})\right| \le \varepsilon/3$$

gilt. Wir erhalten somit $d(y_k, y_l) \le \varepsilon$. Daher ist $(y_l)_l$ eine Cauchyfolge.

(vi) $[x_k] \to [y]$: Es gilt

$$\begin{aligned}
d(x_{k,l}, y_l) &\le d(x_{k,l}, x_{k,N_k}) + d(x_{k,N_k}, y_l) \\
&\le \tfrac{1}{k} + d(y_k, y_l) \quad \text{für } l \ge N_k.
\end{aligned}$$

Lasse nun $k, l \to \infty$ mit $l \ge N_k$. Somit folgt $\hat{d}([x_k], [y]) \to 0$ für $k \to \infty$.

Ausführlicher: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $d(y_i, y_j) < \varepsilon/2$ für $i, j \ge N$. Wähle $k \ge N$ so groß, dass $1/k < \varepsilon/2$ gilt. Wähle nun $l \ge \max\{N, N_k\}$. Dann folgt $d(x_{k,l}, y_l) < \varepsilon$. Mit $l \to \infty$ erhalten wir also $\hat{d}([x_k], [y]) \le \varepsilon$.

(vii) Fortsetzbarkeit: Sei $f\colon X \to Y$ gleichmäßig stetig. Definiere $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$ durch

$$\hat{f}([(x_n)_n]) := \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Die Wohldefiniertheit und gleichmäßige Stetigkeit von $\hat{f}$ folgen aus Lemma 1.4.3, da $\hat{f}$ die Fortsetzung der gleichmäßig stetigen Abbildung

$$\begin{aligned}
f \circ \iota^{-1}\colon \iota(X) &\to Y, \\
[(x)_n] &\mapsto f(x)
\end{aligned}$$

ist.

(viii) Eindeutigkeit: Sei $\hat{\jmath}$ die Fortsetzung von $\jmath$, also

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\jmath"'] & & \hat{X}. \arrow[dl, "\hat{\jmath}"] \\
& \tilde{X} &
\end{tikzcd}$$

Da $\jmath \circ \iota^{-1}\colon \iota\big(\hat{X}\big) \to \tilde{X}$ eine Isometrie mit dichtem Bild in $\tilde{X}$ ist, ist $\hat{\jmath}$ eine isometrische Isometrie.

(ix) Doppelte Vervollständigung: Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\hat{\iota}\circ\iota"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, "f"'] & & \hat{\hat{X}}. \arrow[ddl, "\hat{\hat{f}}"] \\
& \hat{X} \arrow[ur, "\hat{\iota}"] \arrow[d, "\hat{f}"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Zunächst existiert $\hat{f}$ zu f, da $\hat{X}$ eine Vervollständigung zu X ist. Dann existiert $\hat{\hat{f}}$ zu $\hat{f}$, da $\hat{\hat{X}}$ eine Vervollständigung zu $\hat{X}$ ist. An den äußeren Pfeilen des

Diagramms lesen wir ab, dass $\hat{\hat{X}}$ auch eine Vervollständigung von X ist, falls $\hat{\iota} \circ \iota(X) \subset \hat{\hat{X}}$ dicht liegt.

Sei also $\varepsilon > 0$. Da das Bild von $\hat{\iota}$ in $\hat{\hat{X}}$ dicht ist, gibt es zu $x_2 \in \hat{\hat{X}}$ ein $x_1 \in \hat{X}$ mit $\hat{\hat{d}}(\hat{\iota}(x_1), x_2) < \varepsilon/2$. Ebenso gibt es ein $x_0 \in X$ mit $\hat{d}(\iota(x_0), x_1) < \varepsilon/2$. Da $\hat{\iota}$ eine Isometrie ist, folgt

$$\hat{\hat{d}}(\hat{\iota} \circ \iota(x_0), x_2) \le \hat{\hat{d}}(\hat{\iota} \circ \iota(x_0), \hat{\iota}(x_1)) + \hat{\hat{d}}(\hat{\iota}(x_1), x_2) < \hat{d}(\iota(x_0), x_1) + \varepsilon/2 < \varepsilon. \qquad \square$$