2. Normierte Räume und Hilberträume

2.1. Normierte Räume.

Bemerkung 2.1.1. Wir sagen, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sei, wenn V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ ist.

Definition 2.1.2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ Norm, wenn $\|\cdot\|$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:
(i) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.
(ii) $\|v\| = 0$ gilt genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$.
(iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ für alle $u, v \in V$. (Dreiecksungleichung)

Lemma 2.1.3. *Sei V ein normierter Raum. Dann ist $V \ni x \mapsto \|x\|$ stetig.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| :$$

Gelte $x_n \to x$. Dann konvergiert die rechts Seite gegen Null, somit folgt auch $\|x_n\| \to \|x\|$. ☐

Bemerkung 2.1.4.
(i) Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum vermöge $d(x, y) := \|x - y\|$. Wenn nicht anders angegeben, wollen wir auf normierten Räumen stets diese induzierte Metrik betrachten. (Details: Analysisvorlesung.)
(ii) Einen vollständigen normierten Raum nennen wir Banachraum.
(iii) Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Dann wird auf
$$V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2)\colon v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$$
durch $\|(v_1, v_2)\|_{V_1 \oplus V_2} := \|v_1\|_{V_1} + \|v_2\|_{V_2}$ eine Norm definiert. Wie beim Nachweis, dass die „Taxinorm“ eine Norm ist, rechnet man auch hier nach, dass man eine Norm erhält.
(iv) Seien $(V_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I$, normierte Räume. Dann ist
$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{(v_i)_{i \in I} \colon v_i \in V_i,\ \|(v_i)_{i \in I}\| < \infty\} \quad \text{mit} \quad \|(v_i)_{i \in I}\| := \sum_{i \in I} \|v_i\|_{V_i}$$
ein normierter Raum.
(v) Auf den direkten Summen gibt es auch weitere Normen, z. B. l^p-Normen, vergleiche den nächsten Abschnitt.
(vi) Sind die normierten Räume sogar Banachräume, so sind die oben definierten direkten Summen ebenfalls Banachräume.
(vii) Ist I unendlich, so gilt automatisch für höchstens abzählbar viele $i \in I$ die Ungleichung $v_i \neq 0$.

Bei Quotientenräumen muss man sich im Gegensatz zur linearen Algebra auf abgeschlossene Teilmengen beschränken um wieder einen Banachraum zu erhalten. Das folgende Theorem ist falsch, wenn wir aus den stetigen Funktionen mit C^0-Norm auf $[0, 1]$ den (nach Stone-Weierstraß dichten) Unterraum der Polynome herausdividieren, der Quotientenraum ist nicht einmal normiert, da die positive Definitheit verloren geht.

Theorem 2.1.5 (Quotientenräume von Banachräumen)**.** *Sei X ein Banachraum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist der Quotientenraum X/M mit*

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beschränken uns auf die nichttrivialen Nachweise.

(i) $\|[x]\|$ ist unabhängig vom Vertreter aus $x+M$ wohldefiniert.

(ii) Da M abgeschlossen ist, ist $\|[x]\| \neq 0$ für $[x] \neq M$.

(iii) Dreiecksungleichung: Sei $\varepsilon > 0$. Seien $x, y \in X$ und $a, b \in M$ mit $\|x-a\| \le \operatorname{dist}(x, M) + \varepsilon$ sowie $\|y-b\| \le \operatorname{dist}(y, M) + \varepsilon$. Dann folgt

$$\inf_{z\in M} \|x+y-z\| \le \|x+y-a-b\| \le \|x-a\|+\|y-b\| \le \operatorname{dist}(x, M)+\operatorname{dist}(y, M)+2\varepsilon.$$

Die Dreiecksungleichung folgt.

(iv) X/M ist ein Banachraum: Sei $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|[x_n] - [x_{n+1}]\| < 2^{-n}$ gilt. Wir wollen nun Vertreter wählen, die in X eine Cauchyfolge bilden. Wähle $z_0 \in [x_0]$ beliebig. Dann finden wir induktiv $z_{n+1} \in [x_{n+1}]$ mit

$$\|z_{n+1} - z_n\| \le \|[x_{n+1} - x_n]\| + 2^{-n} = \|[x_{n+1}] - [x_n]\| + 2^{-n}.$$

Die z_n bilden eine Cauchyfolge in X, da

$$\begin{aligned}\|z_{n+m} - z_n\| &\le \sum_{i=n}^{n+m-1} \|z_{i+1} - z_i\| \le \sum_{i=n}^{n+m-1} \left(\|[x_{i+1}] - [x_i]\| + 2^{-i}\right)\\ &\le \sum_{i=n}^{n+m-1} 2\cdot 2^{-i} \le 2^{-n+1}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\ldots\right) = 2^{-n+2}.\end{aligned}$$

Setze $z := \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Wir erhalten

$$\|[x_n] - [z]\|_{X/M} = \|[z_n] - [z]\|_{X/M} \le \|z_n - z\| \to 0$$

für $n \to \infty$. Also gilt $[x_n] \to [z]$ in X/M. □

2.2. **Lineare Abbildungen.** Ist T eine lineare Abbildung so schreiben wir wie in der Linearen Algebra auch Tu statt $T(u)$.

Definition 2.2.1. Wir schreiben $R(T) = \operatorname{im}(T)$ für das Bild von T und $N(T)$ für den Kern von T.

Definition 2.2.2. Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann heißt T beschränkt, falls es ein $c \ge 0$ mit

$$\|Tv\|_W \le c\cdot \|v\|_V$$

für alle $v \in V$ gibt.

Wir definieren die Operatornorm von T, $\|T\|$, durch

$$\|T\| := \sup_{\|v\|\le 1} \|Tv\|.$$

Bemerkung 2.2.3. Äquivalent zur Beschränktheit für lineare Abbildungen sind:

(i) T bildet beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab.

(ii) $\sup\limits_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \le c$.

Es gilt

$$\|T\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|.$$

Theorem 2.2.4. *Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) T ist beschränkt,

(ii) T ist in allen Punkten stetig,

(iii) T ist im Ursprung stetig.

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Gelte $u_n \to u$ für $n \to \infty$. Dann folgt

$$\|Tu - Tu_n\| = \|T(u - u_n)\| \le \|T\| \cdot \|u - u_n\| \to 0$$

für $n \to \infty$.
„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Klar.
„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Falls T unbeschränkt ist, gibt es Vektoren $v_n \in V$, ohne Einschränkung mit $\|v_n\| = 1$, und $\|Tv_n\| =: r_n \to \infty$, ohne Einschränkung $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $u_n := \frac{v_n}{r_n}$. Dann folgt $u_n \to 0$ und es gilt

$$\|Tu_n\| = \frac{\|Tv_n\|}{r_n} = 1$$

im Widerspruch zur Stetigkeit von T. □

Definition 2.2.5.
(i) Seien V, W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Definiere $L(V, W)$ als den Raum der stetigen linearen Abbildungen T von V nach W. $L(V, W)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird mit der Operatornorm $\|T\|$ zu einem normierten Raum (einfache Rechnung).
(ii) Seien V, W normierte Räume. Dann heißen V und W isomorph, falls es eine stetige, bijektive lineare Abbildung $T\colon V \to W$ mit stetiger Inverser gibt. T heißt dann Isomorphismus (zwischen normierten Räumen). Gilt zusätzlich noch $\|T(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so heißt T normtreuer Isomorphismus.

Lemma 2.2.6. *Ist W ein Banachraum, so auch $L(V, W)$.*

Beweis.
(i) Sei $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L(V, W)$ und $u \in V$. Wir definieren T durch $Tu := \lim\limits_{n\to\infty} T_n u$. Der Grenzwert existiert, da $(T_n u)_n$ eine Cauchyfolge ist; es gilt nämlich $\|T_n u - T_m u\| \le \|T_n - T_m\| \cdot \|u\|$. Da W vollständig ist, ist T wohldefiniert. Die Linearität von T ist klar.
(ii) T ist stetig: Wir benutzen, dass aus $u_n \to u$ auch $\|u_n\| \to \|u\|$ folgt. Da $A \mapsto \|A\|$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichun Lipschitzstetig (mit Lipschitzkonstante eins) ist und $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge ist, ist auch $\|T_n\|$ eine Cauchyfolge und konvergiert daher in $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\|Tu\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n u\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n u\| \le \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|u\|,$$

wobei wir rechts den Limes superior nachträglich wieder als Limes schreiben dürfen. Es folgt $\|T\| \le \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.
(iii) $T_n \to T$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n \ge N$ gilt. Sei nun $u \in V$ beliebig. Es gilt

$$\|Tu - T_n u\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m u - T_n u\| \le \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\| \cdot \|u\| \le \varepsilon \cdot \|u\|$$

für alle $n \ge N$. Somit erhalten wir $\|T - T_n\| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$. □

Definition 2.2.7. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir setzen $V^* := L(V, \mathbb{K})$, den Raum der stetigen linearen Funktionale auf V. ($V' = V^*$ ist eine weitere verbreitete Bezeichnung.) Sei $\varphi \in V^*$, $u \in V$. Statt $\varphi(u)$ schreiben wir auch $\langle u, \varphi \rangle$. Mit der Operatornorm oder dualen Norm auf V^* gilt

$$|\langle u, \varphi \rangle| \le \|\varphi\|_{V^*} \cdot \|u\|_V.$$

Theorem 2.2.8. *Sei V ein normierter Raum, $\hat{V}$ seine Vervollständigung als metrischer Raum. Dann kann man $\hat{V}$ auf genau eine Art zu einem Banachraum machen, so dass die Einbettung $\iota\colon V \to \hat{V}$ linear und normtreu ist.*

Beweis. Wir identifizieren V mit $\iota(V)$.

(i) $u+v$: Seien $u, v \in \hat{V}$. Gelte $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$ sowie $V \ni v_n \to v \in \hat{V}$. Dann ist $u_n + v_n$ eine Cauchyfolge in V. Wir definieren $v + u := \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n)$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Auswahl der Cauchyfolgen.

(ii) λu: Für $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist λu_n eine Cauchyfolge in V. Wir definieren $\lambda u := \lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n$. Auch diese Definition ist von der Wahl der Cauchyfolge unabhängig.

(iii) $\|\cdot\|$: Sei $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$. Dann ist auch $\|u_n\|_V$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Cauchyfolge. Wir definieren $\|u\|_{\hat{V}} := \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_V$. Man rechnet leicht nach, dass dies eine Norm ist.

(iv) Vollständigkeit: $\|\cdot\|_{\hat{V}}$ induziert eine Metrik $\tilde{d}$ auf $\hat{V}$. Wir müssen nachweisen, dass $\tilde{d} = \hat{d}$ gilt. Nach Definition ist mit Bezeichnungen wie oben

$$\tilde{d}(u,v) = \|u-v\|_{\hat{V}} = \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_V = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = \hat{d}(u,v).$$

Die Behauptung folgt. □

Theorem 2.2.9 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei V ein normierter Raum, W ein Banachraum und $T \in L(V,W)$. Dann besitzt T genau eine Fortsetzung $\hat{T} \in L\big(\hat{V}, W\big)$ und es gilt $\big\|\hat{T}\big\| = \|T\|$.*

Dies folgt auch direkt aus Lemma 1.4.3.

Beweis.

(i) Existenz: Sei $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$. Dann ist Tu_n eine Cauchyfolge, da $\|Tu_n - Tu_m\| \le \|T\| \cdot \|u_n - u_m\|$ gilt. Wir setzen $\hat{T}u := \lim\limits_{n\to\infty} Tu_n$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Cauchyfolge. $\hat{T}$ ist linear und eine Fortsetzung von T.

(ii) Stetigkeit: Es gilt

$$\big\|\hat{T}u\big\| = \lim_{n\to\infty} \|Tu_n\| \le \|T\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|T\| \cdot \|u\|.$$

Somit ist $\big\|\hat{T}\big\| \le \|T\|$.

(iii) Gleichheit der Normen: Für $u \in V \subset \hat{V}$ gilt $\|Tu\| = \big\|\hat{T}u\big\| \le \big\|\hat{T}\big\| \cdot \|u\|$. Wir bilden nun das Supremum über alle u mit $\|u\| = 1$ und erhalten $\|T\| \le \big\|\hat{T}\big\|$. Zusammen mit der Stetigkeit folgt also $\|T\| = \big\|\hat{T}\big\|$.

(iv) Eindeutigkeit: Seien $\hat{T}$ und $\tilde{T}$ zwei solche Fortsetzungen. Sei $u \in \hat{V}$ und sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $u_n \in V$ und $u_n \to u$. Dann erhalten wir aufgrund der Stetigkeit

$$\hat{T}u = \lim_{n\to\infty} \hat{T}u_n = \lim_{n\to\infty} Tu_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}u_n = \tilde{T}u. \qquad \square$$

Für multilineare Abbildungen gibt es eine ähnliche Charakterisierung der Stetigkeit wie bei linearen Abbildungen.

Proposition 2.2.10. *Seien E_i, $1 \le i \le n$, und F normierte Räume. Setze $E := \bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i$. Sei $A\colon E \to F$ multilinear. Dann ist A genau dann stetig, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass*

$$\big\|A\left(x^1, \ldots, x^n\right)\big\| \le c \cdot \big\|x^1\big\| \cdot \ldots \cdot \|x^n\|$$

für alle $\left(x^1, \ldots, x^n\right) \in E$ gilt.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Widerspruchsbeweis. Nehme an, dass A stetig ist, die Abschätzung aber nicht gilt. Dann gibt es Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_k^i\right)_{\substack{1\le i\le n\\ k\in\mathbb{N}}}$ in E mit

$$\|A(x_k)\| > k\cdot \left\|x_k^1\right\|\cdot\ldots\cdot\|x_k^n\|.$$

Setze $y_k^i := \frac{1}{k^{1/n}}\frac{x_k^i}{\left\|x_k^i\right\|}$. Dann gilt $y_k\to 0$ für $k\to\infty$ aber $\|A(y_k)\|>1$. Widerspruch zur Stetigkeit von A.

„$\Longleftarrow$“: Nehme die Abschätzung an. Gelte $x_k\to y$. Dann gibt es ein $C>0$ so dass $\left\|x_k^i\right\|\le C$ für alle $1\le i\le n$ und alle $k\in\mathbb{N}$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^n\right) - A\left(y^1,\ldots,y^n\right)\right\|\\
\le{}&\left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^n\right) - A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-1},y^n\right)\right\|\\
&\quad+\left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-2},x_k^{n-1},y^n\right) - A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-2},y^{n-1},y^n\right)\right\|+\ldots\\
&\quad+\left\|A\left(x_k^1,y^2,\ldots,y^n\right) - A\left(y^1,y^2,\ldots,y^n\right)\right\|\\
\le{}&\left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-1},x_k^n-y^n\right)\right\| + \left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-2},x_k^{n-1}-y^{n-1},y^n\right)\right\|+\ldots\\
&\quad+\left\|A\left(x_k^1-y^1,y^2,\ldots,y^n\right)\right\|\\
\le{}& c\cdot C^{n-1}\sum_{i=1}^n\left\|x_k^i-y^i\right\|\to 0
\end{aligned}$$

für $k\to\infty$. Somit ist A stetig. □

Definition 2.2.11. Seien E_i, $1\le i\le n$, und F normierte Räume. Setze $E := \bigoplus\limits_{i=1}^n E_i$. Sei $A\colon E\to F$ multilinear und stetig. Dann heißt

$$\|A\| := \sup_{\|x^1\|,\ldots,\|x^n\|=1}\left\|A\left(x^1,\ldots,x^n\right)\right\|$$

die Norm der multilinearen Abbildung.

Bemerkung 2.2.12.

(i) Die Menge aller stetigen multilinearen Abbildungen $E_1\times\ldots\times E_n\to F$ zwischen normierten Räumen, die wir mit $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ bezeichnen, ist mit der in Definition 2.2.11 eingeführten Norm ein normierter Raum.

(ii) Ist F zusätzlich vollständig, so ist $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ ein Banachraum.

(iii) Seien E,F,G normierte Räume. Dann ist die Abbildung

$$A\in L(E,F;G)\to L(E,L(F,G))\ni\tilde A$$

mit $A(x,y)=\big(\tilde A(x)\big)(y)$ eine normtreuer Isomorphismus.

Analog erhält man einen normtreuen Isomorphismus

$$L(E_1,\ldots,E_n;F)\to L(E_1,L(E_2,\ldots,L(E_n,F)\ldots)).$$

Details: Übung.

3. L^p-Räume

3.1. Dreiecksungleichung und Folgenräume.

Theorem 3.1.1 (Höldersche Ungleichung, Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei $1<p<\infty$. Dann heißt q mit $1<q<\infty$ und $\frac1p+\frac1q=1$ der zu p konjugierte*

(Hölder-)Exponent. Sei Ω ein Maßraum mit Maß μ. Seien f, g messbar. Dann gelten die Höldersche Ungleichung

$$\int\limits_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \le \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_\Omega |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}$$

und die Minkowskische Ungleichung

$$\left(\int\limits_\Omega |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int\limits_\Omega |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Mit der Norm $\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ (es ist noch nachzuweisen, dass es sich hierbei um eine Norm handelt) können wir die Ungleichungen in der folgenden Form schreiben:

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q},$$
$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Dieselben Resultate gelten auch für $(p, q) = (1, \infty)$ oder $(p, q) = (\infty, 1)$, die Beweise sind anders, aber einfacher (Übung).

Beweis.

(i) Höldersche Ungleichung: Setze $A := \|f\|_{L^p}$ und $B := \|g\|_{L^q}$. Die Fälle $A \in \{0, \infty\}$ oder $B \in \{0, \infty\}$ sind einfach (Übung). Sei also $0 < A, B < \infty$. Wir setzen $F := |f|/A$ und $G := |g|/B$. Dann gilt $\|F\|_{L^p} = \|G\|_{L^q} = 1$. Betrachte $x \in \Omega$ mit $0 < F(x), G(x) < \infty$. Dazu gibt es $s, t \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = e^{s/p}$ und $G(x) = e^{t/q}$. Nun gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Somit erhalten wir aus der Konvexität der Exponentialfunktion

$$F(x)G(x) = e^{s/p+t/q} \le \tfrac{1}{p} e^s + \tfrac{1}{q} e^t = \tfrac{1}{p} F(x)^p + \tfrac{1}{q} G(x)^q.$$

Die Ungleichung zwischen der linken und der rechten Seite gilt für beliebige $x \in \Omega$. Wir integrieren die Ungleichung und erhalten

$$\int\limits_\Omega FG \, d\mu \le \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Nach Umstellung erhalten wir daraus gerade die Höldersche Ungleichung.

(ii) Minkowskische Ungleichung: Wir wollen wieder ohne Einschränkung annehmen, dass die linke Seite der behaupteten Ungleichung strikt positiv und die Terme auf der rechten Seite der Ungleichung endlich sind. Aus der Konvexität von $[0, \infty) \ni t \to t^p$ erhalten wir

$$\left(\frac{|f+g|}{2} \right)^p \le \tfrac{1}{2} \left(|f|^p + |g|^p \right).$$

Somit gilt $\|f+g\|_{L^p} < \infty$.

Mit der Hölderschen Ungleichung und $p+q=pq$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p}^p &= \int |f+g|^p = \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1}\\
&\le \|f\|_{L^p}\cdot\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|g\|_{L^p}\cdot\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\
&= (\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})\cdot\left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}\\
&= (\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})\cdot\|f+g\|_{L^p}^{p/q}.
\end{aligned}$$

Umordnen liefert die Behauptung. □

Korollar 3.1.2. $\mathbb{R}^n$ *mit der p-Norm* $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ *ein Banachraum.*

Beweis. Die Dreiecksungleichung ist gerade die Minkowskische Ungleichung für Funktionen, die auf den Intervallen $[0,1)$, $[1,2)$, …, $[n-1,n)$ konstant sind. Die übrigen Eigenschaften einer Norm sind elementar.

Sei $x_i = (x_{i,k})_{1\le k\le n}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Wegen $|x_{i,k}-x_{j,k}| \le \|x_i - x_j\|_p$ für alle $1\le k\le n$ bilden auch die k-ten Komponenten eine Cauchyfolge. Setze $x := (x_k)_{1\le k\le n}$ mit $x_k := \lim\limits_{i\to\infty} x_{i,k}$. Dann folgt $\|x_i - x\|_p \to 0$ für $p\to\infty$, da sämtliche Komponenten konvergieren. □

Definition 3.1.3. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann heißen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, wenn es eine Konstante $c>0$ mit

$$\tfrac{1}{c}\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le c\cdot\|u\|_1$$

für alle $u\in X$ gibt.

Theorem 3.1.4. *Auf* $\mathbb{R}^n$ *sind je zwei Normen äquivalent.*

Dieser Satz gilt auch für beliebige endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Die nachfolgend definierten Normen $l^p(\mathbb{N})$ sind für verschiedene Werte von p keine äquivalenten Normen auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Wir folgen [**?**].

Beweis. Sei $x = \sum\limits_{i=1}^n x^i e_i$ mit der Standardbasis $\{e_i\}_i$ des $\mathbb{R}^n$. Bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\|\cdot\|$ eine fixierte andere Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen nur die Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$. Für beliebige Normen folgt die Aussage dann aufgrund der Transitivität in der Definition der Äquivalenz von Normen.

(i) Es gilt
$$\|x\| \le \sum_{i=1}^n \left|x^i\right|\cdot\|e_i\| \le c\|x\|_\infty \quad \text{mit} \quad c := \sum_{i=1}^n \|e_i\|.$$

(ii) Falls es kein $c>0$ mit $c\cdot\|x\|_{L^\infty} \le \|x\|$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$ gibt, finden wir eine Folge $(x_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\|x_k\|_\infty > k$. Definiere die Folge $(y_k)_k$ durch $y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$. Diese Folge ist bezüglich der Supremumsnorm beschränkt. Somit sind die Komponenten y_k^i, $1\le i\le n$, $k\in\mathbb{N}$, gleichmäßig beschränkt. Ohne Einschränkung dürfen wir also nach Auswahl einer Teilfolge annehmen, dass $y_k^i \to y^i$ für $k\to\infty$ konvergiert. Wir erhalten $\|y_k - y\|_\infty \to 0$ für $k\to\infty$. Somit gilt nach (i) auch $\|y_k - y\| \to 0$ für $k\to\infty$. Nun gilt $\|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{\|x_k\|_\infty} = \frac{1}{\|x_k\|_\infty} \to 0$ für $k\to\infty$. Wir erhalten $y=0$. Weiterhin folgt $1 = \|y_k\|_\infty \to 0$ für $k\to\infty$. Widerspruch. □

Theorem 3.1.5. *Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist der Raum*

$$l^p(\mathbb{N}) := \left\{ (x^n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_{l^p(\mathbb{N})} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p}$$

ein Banachraum.

Allgemeiner definiert man Räume $l^p(A)$ für Funktionen $f \colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_{l^p(A)} := \left(\sum_{x\in A} |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung und die Vollständigkeit:

Dreiecksungleichung: Seien $x, y \in l^p(\mathbb{N})$ Es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung auf $\mathbb{R}^k$ mit der entsprechenden Norm $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} |x^n|^p \right)^{1/p}$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{N} |x^n + y^n|^p \right)^{1/p} &\le \left(\sum_{n=1}^{N} |x^n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y^n|^p \right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y^n|^p \right)^{1/p} = \|x\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|y\|_{l^p(\mathbb{N})}.\end{aligned}$$

Somit ist $x + y$ mit komponentenweiser Addition wieder in $l^p(\mathbb{N})$ und mit $N \to \infty$ erhalten wir die Dreiecksungleichung.

Vollständigkeit: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $l^p(\mathbb{N})$. Dann folgt für $k \le N$ aus

$$\left| x_i^k - x_j^k \right| \le \left(\sum_{l=1}^{N} \left| x_i^l - x_j^l \right|^p \right)^{1/p} \le \|x_i - x_j\|_{l^p(\mathbb{N})},$$

dass auch $\left(x_i^k\right)_{i\in\mathbb{N}}$ für festes $k \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge ist. Definiere $x = (x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $x^k := \lim\limits_{i\to\infty} x_i^k$. Wir lassen $j \to \infty$ und erhalten

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left| x_i^k - x^k \right|^p \right)^{1/p} \le f(i)$$

mit $f(i) \to 0$ für $i \to \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $i \gg 1$ mit $f(i) \le \varepsilon$. Lasse nun $N \to \infty$ und erhalte $\|x_i - x\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \varepsilon$. Es folgt $\|x\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \|x_i\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|x - x_i\|_{l^p(\mathbb{N})} < \infty$. Somit ist $x \in l^p(\mathbb{N})$ und $l^p(\mathbb{N})$ ist vollständig. □

3.2. **Vollständigkeit.**

Bemerkung 3.2.1. Um den Raum der messbaren Funktionen zu einem normierten Raum zu machen, betrachten wir Äquivalenzklassen von Funktionen und identifizieren Funktionen (ohne dies später explizit hervorzuheben), die fast überall übereinstimmen.

Sei $1 \le p < \infty$. Für alle messbaren Funktionen f auf Ω setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

und definieren $L^p(\Omega,\mu)$ als den Raum aller messbaren Funktionen f mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty.$$

Im Fall $p = \infty$ verfahren wir genauso, benutzen aber $\|f\|_\infty := \sup\limits_\Omega |f|$, das wesentliche Supremum von f.

Theorem 3.2.2. *Sei $1 \le p \le \infty$. Sei μ ein positives Maß auf Ω. Dann ist $L^p(\Omega,\mu)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei zunächst $1 \le p < \infty$. Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega,\mu)$. Gelte (nach Auswahl einer Teilfolge ohne Einschränkung) $\|f_{i+1} - f_i\|_{L^p} < 2^{-i}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$g_k := \sum_{i=0}^k |f_{i+1} - f_i| \quad \text{und} \quad g := \sum_{i=0}^\infty |f_{i+1} - f_i|.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt $\|g_k\|_{L^p} < 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Fatou ($\int \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int f_n$ für $f_n \ge 0$), angewandt auf g_k^p, folgt $\|g\|_{L^p} \le 2$. Somit gilt fast überall $g(x) < \infty$. Also konvergiert

$$f_1(x) + \sum_{i=1}^\infty (f_{i+1}(x) - f_i(x))$$

für fast alle $x \in \Omega$. Wir definieren $f(x)$ als diesen Grenzwert für diese x und sonst $f(x) := 0$. Somit gilt fast überall

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x).$$

Nach [**?**, Theorem 1.14] sind das Supremum und der Limes superior messbarer Funktionen selbst wieder messbar. Somit ist auch f messbar. Wir wollen nun zeigen, dass f_i auch in L^p gegen f konvergiert: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_{L^p} < \varepsilon$ für $m, n \ge N$. Sei $m > N$. Dann folgt mit Fatou

$$\int_\Omega |f - f_m|^p \, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int_\Omega |f_i - f_m|^p \, d\mu \le \varepsilon^p.$$

Hieraus folgt $f - f_m \in L^p(\Omega,\mu)$, also auch $f \in L^p(\Omega,\mu)$. Weiterhin folgt hieraus $\|f - f_m\|_{L^p} \to 0$ für $m \to \infty$.

Sei nun $p = \infty$. Definiere

$$A_k := \{x \in \Omega \colon |f_k(x)| > \|f_k\|_{L^\infty}\}$$

und

$$B_{m,n} := \{x \in \Omega \colon |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_n - f_m\|_{L^\infty}\}.$$

Setze $E := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \cup \bigcup\limits_{m,n\in\mathbb{N}} B_{m,n}$. Dann ist E als abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst wieder eine Nullmenge. In $\Omega \setminus E$ konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Funktion, die wir f nennen, auf E setzen wir $f(x) := 0$. Es folgt $f \in L^\infty$ sowie $\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0$ für $n \to \infty$. □

Im Verlauf des Beweises haben wir auch das folgende Resultat mitbewiesen:

Theorem 3.2.3. *Sei Ω ein Raum mit positivem Maß μ. Sei $1 \le p \le \infty$. Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega,\mu)$ mit Grenzwert f. Dann besitzt f_n eine Teilfolge, so dass $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ konvergiert.*

3.3. **Approximierbarkeit.** Wir wollen untersuchen, wie sich L^p-Funktionen approximieren lassen.

Theorem 3.3.1. *Sei Ω eine Menge mit positivem Maß μ. Sei S die Menge aller messbaren Treppenfunktionen s (=endliche Summe von charakteristischen Funktionen messbarer Teilmengen) auf Ω mit $\mu(\{x\colon s(x) \neq 0\}) < \infty$. Ist $1 \le p < \infty$, dann ist S dicht in $L^p(\Omega, \mu)$.*

Beweis. Sei $f \in L^p$ und gelte ohne Einschränkung $f \ge 0$. Dann gibt es (punktweises Abrunden auf das nächste Vielfache von 2^{-n} und Betrachten von $\min(\cdot, n)$) Treppenfunktionen s_n mit

- $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le f$,
- $s_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ in Ω.

Aus $0 \le s_n \le f$ folgt $s_n \in L^p$ und daher gilt $s_n \in S$. Wegen $|f - s_n|^p \le f^p$ folgt nach dem Satz über die dominierte Konvergenz $\|f - s_n\|_{L^p} \to 0$ für $n \to \infty$. Somit ist $f \in \overline{S}^{L^p}$. □

Lemma 3.3.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f \in L^\infty(\Omega)$, so gibt es Treppenfunktionen f_k mit $\|f - f_k\|_{L^\infty} \to 0$ für $k \to \infty$.*

Der Beweis funktioniert analog auch für $\mathbb{K}^n$-wertige Funktionen statt für reellwertige Funktionen.

Beweis. Setze $R := \|f\|_{L^\infty}$. Zerlege $[-R, R]$ für $k \in \mathbb{N}$ in endlich viele (ohne Einschränkung nichtleere) Intervalle A_i, $1 \le i \le n_k$, mit $\operatorname{diam} A_i \le \frac{1}{k}$. Wähle $a_i \in A_i$. Wir erhalten

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n_k} \chi_{f^{-1}(A_i)} a_i \right\|_{L^\infty} \le \frac{1}{k}.$$

Die Behauptung folgt. □

Um mit stetigen Funktionen approximieren zu können, benötigen wir noch ein vorbereitendes Resultat. Die folgenden Resultate gelten nicht nur im $\mathbb{R}^k$, siehe [**?**], wir beschränken uns jedoch auf diesen wichtigsten Fall:

Theorem 3.3.3 (Lusin)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und μ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^N$. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ messbar. Sei $A \subset \Omega$ mit $\mu(A) < \infty$ und gelte $f = 0$ außerhalb von A. Dann gibt es ein $g \in C^0_c(\Omega)$ (stetig mit kompaktem Träger) mit*

$$\mu(\{x \in \Omega\colon f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon \quad \textit{und} \quad \sup_{x \in \Omega} |g(x)| \le \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Beweis. Die Supremumsschranke werden wir erst ganz am Schluss beweisen.

Nehme zunächst an, dass A kompakt ist und $0 \le f \le 1$ gilt. Sei s_n eine approximierende Folge wie im Beweis von Theorem 3.3.1. Setze $t_0 := s_0$, $t_n := s_n - s_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist $2^n t_n$ die charakteristische Funktion einer Menge $T_n \subset A$ und es gilt $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Fixiere eine offene Menge V mit $A \subset V$, so dass $\overline{V} \subset \Omega$ kompakt ist. Dann gibt es (z. B. [**?**, Theorem 2.17]) kompakte Teilmengen K_n und offene Teilmengen V_n mit $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ und $\mu(V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es stetige Funktionen h_n mit $h_n = 1$ in K_n und $h_n = 0$ außerhalb von V_n. Definiere nun $g(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} h_n(x)$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe ist g stetig. Weiterhin gilt $\operatorname{supp} g \subset \overline{V}$. Nun gilt $2^{-n} h_n(x) = t_n(x)$ außerhalb von $V_n \setminus K_n$. Also erhalten wir $f = g$ außerhalb von $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (V_n \setminus K_n)$. Diese Ausnahmemenge hat jedoch höchstens Maß 2ε. Dies zeigt die Behauptung, falls A kompakt ist und $0 \le f \le 1$ gilt.

Als nächstes gilt die Behauptung auch, wenn A nicht kompakt ist, da es zu A eine kompakte Menge K mit $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ gibt.

Gelte nun auch nicht mehr notwendigerweise $0 \le f \le 1$. Definiere $B_n := \{x \in \Omega \colon |f(x)| > n\}$. Es gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$. Wir erhalten $\mu(B_n) \to 0$, da die Funktionen $f_n = \chi_{\{x\in A\colon |f(x)|<n\}}$ monoton gegen die integrierbare Funktion χ_A konvergieren. Außer auf B_n gilt $f = (1-\chi_{B_n})f$ und $(1-\chi_{B_n})f$ ist beschränkt. Daher folgt auch der allgemeine Fall.

Falls g die Supremumsabschätzung nicht erfüllt, ersetze g durch

$$\hat{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } |g(x)| \le \sup|f|, \\ \frac{g(x)}{|g(x)|} \cdot \sup|f| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $\hat{g}$ stetig. Die Behauptung folgt. □

Theorem 3.3.4. *Sei $1 \le p < \infty$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und μ das Lebesguemaß. Dann gilt*

$$\overline{C_c^0(\Omega)}^{L^p(\Omega,\mu)} = L^p(\Omega,\mu).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sei s wie in Theorem 3.3.1. Da solche Treppenfunktionen dicht in $L^p(\Omega,\mu)$ liegen, genügt es, s bis auf $\varepsilon > 0$ in $L^p(\Omega,\mu)$ zu approximieren. Nach Lusin gibt es eine Funktion $g \in C_c^0(\Omega)$ mit $g(x) = s(x)$ außerhalb einer Menge vom Maß kleiner als ε mit $\|g\|_{L^\infty} \le \|s\|_{L^\infty}$. Somit folgt

$$\|g-s\|_{L^p} \le 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_{L^\infty}.$$

Somit folgt die Behauptung. □

3.4. **Dualraum.** Zur Erinnerung wiederholen wir die Formulierung des Satzes von Radon-Nikodym.

Theorem 3.4.1 (Radon-Nikodym)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Sei $\nu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ eine σ-additive Abbildung mit $|\nu|(\Omega) < \infty$. Sei ν bezüglich μ absolutstetig. Dann gibt es genau ein $f \in L^1(\mu)$ mit $\nu(E) = \int\limits_E f\,d\mu$ für alle $E \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Beispielsweise [**?**, Satz 4.11]. □

Theorem 3.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $1 \le p < \infty$. Sei $q \in (1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sei $f \in L^q(\Omega)$. Definiere $J\colon L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ durch*

$$(J(f))(g) := \int\limits_\Omega g\bar{f} \quad \text{für } g \in L^p(\Omega).$$

Dann ist J ein konjugiert linearer isometrischer Isomorphismus.

Siehe [**?**, Satz 4.12] für eine allgemeinere Formulierung des Satzes mit σ-endlichen Maßräumen, d. h. der Raum ist abzählbare Vereinigung von Mengen endlichen Maßes.

Der Dualraum von L^∞ ist nicht L^1 sondern größer: Auf $C^0 \subset L^\infty$ definieren wir $\delta_x(f) := f(x)$. Dies ist ein stetiges lineares Funktional auf C^0 mit der Supremumsnorm. Dann lässt sich dies nach dem Satz von Hahn-Banach, Theorem **??**, zu einem stetigen linearen Funktional auf L^∞ fortsetzen.

q heißt der zu p konjugierte oder duale Exponent. Er wird auch mit p' bezeichnet.

Beweis.

(i) Nach der Hölderschen Ungleichung gilt $\|J(f)\| \le \|f\|_{L^q}$. Somit ist J wohldefiniert. Klar ist, dass J konjugiert linear ist.

(ii) J ist injektiv: Aus $J(f) = 0$ folgt im Fall $p > 1$ mit $g := |f|^{q-2}f \in L^p(\Omega)$ (da $|g|^p = |f|^q \in L^1$ ist) $(J(f))(g) = \int\limits_\Omega |f|^q = 0$ Somit ist $f = 0$ und wir erhalten die Injektivität für $p > 1$. Im Fall $p = 1$ ist mit $f \in L^\infty$ die Funktion $g := \chi_{\Omega_i} f \in L^1$, wobei $\Omega_i \nearrow \Omega$ eine Ausschöpfung von Ω durch Mengen von endlichem Maß ist. Somit folgt aus $0 = Jf$ auch $0 = (J(f))(g) = \int\limits_{\Omega_i} |f|^2$ und daher $f = 0$ (fast überall) in Ω_i. Mit $i \to \infty$ erhalten wir $f = 0$.

(iii) J ist normtreu: Für $p > 1$ gelten mit $g := |f|^{q-2}f$

$$\|g\|_p = \left(\int |f|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \left(\int |f|^q\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int |f|^q\right)^{\frac{q-1}{q}} = \|f\|_{L^q}^{q-1}$$

und

$$|(Jf)(g)| = \int |f|^q = \|f\|_{L^q}^q = \|f\|_{L^q} \cdot \|f\|_{L^q}^{q-1} = \|f\|_{L^q} \cdot \|g\|_{L^p}.$$

Also ist $\|Jf\| \geq \|f\|_{L^q}$.

Im Fall $p = 1$ wählen wir zu $\varepsilon > 0$ eine Menge $A \subset \Omega$ sodass ohne Einschränkung $|f| \geq \sup|f| - \varepsilon \equiv M - \varepsilon > 0$ in A und $0 < |A| < \infty$ gelten. Setze

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f}{M\cdot|A|}\chi_A & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gelten $1 \geq \|g\|_{L^1} \geq \frac{M-\varepsilon}{M}$ und

$$\begin{aligned} |(Jf)(g)| &\geq \int \frac{f\bar{f}}{M\cdot|A|}\chi_A \geq \int \frac{(M-\varepsilon)^2}{M}\frac{\chi_A}{|A|} = \int\limits_A \frac{(M-\varepsilon)^2}{M} \underbrace{\frac{M}{|f|}}_{\geq 1} \underbrace{\frac{|f|\chi_A}{M\cdot|A|}}_{=g} \\ &\geq \frac{(M-\varepsilon)^2}{M} \cdot \|g\|_{L^1} \to M \cdot \|g\|_{L^1} = \sup|f| \cdot \|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

für $\varepsilon \to 0$. Also erhalten wir $\|Jf\| \geq \|f\|_{L^\infty}$.

(iv) Sei $F \in (L^p(\Omega))^*$. Wir behaupten, dass es ein $f \in L^q(\Omega)$ mit

$$F = J(f) \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^q} \leq \|F\|_{(L^p)^*}$$

gibt.

(v) Sei zunächst $|\Omega| < \infty$. Wir wollen nachweisen, dass ν, durch $\nu(E) := F(\chi_E)$ für messbare Mengen definiert, die Voraussetzungen des Satzes von Radon-Nikodym erfüllt. Betrachte dazu disjunkte messbare Mengen $E_1, \ldots, E_m$ mit $\nu(E_i) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |\nu(E_i)| &= \sum_{i=1}^m \sigma_i \nu(E_i), \quad \text{wobei } \sigma_i := \frac{\overline{\nu(E_i)}}{|\nu(E_i)|} \text{ ist,} \\ &= F\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i \chi_{E_i}\right) \leq \|F\|_{(L^p)^*} \cdot \left\|\sum_{i=1}^m \sigma_i \chi_{E_i}\right\|_{L^p} \\ &= \|F\| \cdot \left(\sum_{i=1}^m |E_i|\right)^{1/p}, \quad \text{da } |\sigma_i| = 1, \\ &\leq \|F\| \cdot |\Omega|^{1/p}. \end{aligned}$$

Somit ist die totale Variation von ν endlich.

Seien nun E_i, $i \in \mathbb{N}$, messbar mit $E_i \subset E_{i+1}$ und gelte $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Wir erhalten

$$|\nu(E) - \nu(E_i)| = |F(\chi_{E \setminus E_i})| \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot |E \setminus E_i|^{1/p} \to 0$$

für $i \to \infty$ aus dem Satz von der monotonen Konvergenz. Dies ist äquivalent zur σ-Additivität für disjunkte Mengen A_k, denn es gilt

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \nu(A_k) = \lim_{i\to\infty} \left\{ \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - \nu\left(\bigcup_{k=1}^{i} A_k\right)\right\} = 0.$$

Die Absolutstetigkeit ist klar.

Somit können wir den Satz von Radon-Nikodym anwenden und erhalten $f \in L^1(\Omega)$ mit

$$F(\chi_E) = \int\limits_{\Omega} \chi_E \bar{f}$$

für alle messbaren Mengen E. Nach Lemma 3.3.2 lassen sich Funktionen $g \in L^\infty(\Omega)$ durch endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen χ_E mit messbaren Mengen $E \subset \Omega$ in L^∞ approximieren. Es gilt $L^\infty \subset L^p$. Somit ist F auch auf L^∞ stetig und wir erhalten

$$F(g) = \int\limits_{\Omega} g\bar{f} \tag{3.1}$$

für alle $g \in L^\infty$.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le Q < \infty$. Wir setzen

$$A_m := \{x \in \Omega \colon 0 < |f(x)| \le m\}$$

und

$$g := \chi_{A_m} |f|^{Q-2} f.$$

Dann ist $g \in L^\infty$ und wir erhalten aus (3.1)

$$\int\limits_{A_m} |f|^Q = F(g) \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot \|g\|_{L^p} = \|F\|_{(L^p)^*} \cdot \left(\int\limits_{A_m} |f|^{p(Q-1)}\right)^{1/p}.$$

Ist $p > 1$, so verwenden wir $Q = q$. Dann folgt $p(Q-1) = q$. Also folgt durch Kürzen

$$\left(\int\limits_{A_m} |f|^q\right)^{1/q} \le \|F\|_{(L^p)^*}.$$

Lasse nun $m \to \infty$. Dann folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz $f \in L^q(\Omega)$ und $\|f\|_{L^q(\Omega)} \le \|F\|$.

Ist $p = 1$, so wählen wir $Q \in \mathbb{N}$ und erhalten per Induktion

$$\int\limits_{A_m} |f|^Q \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot \int\limits_{A_m} |f|^{Q-1} \le \|F\|^Q_{(L^p)^*} \cdot |A_m|.$$

Hieraus folgt

$$\|\chi_{A_m} f\|_{L^Q(\Omega)} = \left(\int\limits_{A_m} |f|^Q\right)^{1/Q} \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot |A_m|^{1/Q} \le \|F\|_{(L^p)^*} \cdot |\Omega|^{1/Q}.$$

Mit $Q \to \infty$ folgt $\|\chi_{A_m} f\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|F\|_{(L^p)^*}$. Mit $m \to \infty$ folgt $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|F\|_{(L^p)^*}$ wie behauptet.

Die Gleichung (3.1) gilt für $g \in L^\infty(\Omega)$. Da solche Funktionen dicht in $L^p(\Omega)$ liegen, siehe z. B. Theorem 3.3.4, können wir auf beiden Seiten eine gegebene Funktion $g \in L^p(\Omega)$ durch $g_k \in L^\infty(\Omega)$ approximieren und erhalten, da die rechte Seite aufgrund der L^q-Abschätzung für f nach Hölder stetig ist, $F = J(f)$:

$$F(g) \leftarrow F(g_k) = \int\limits_\Omega g_k \bar f \to \int\limits_\Omega g \bar f.$$

Dies zeigt die Behauptung im Fall $|\Omega| < \infty$.

(vi) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge. (Dieser Teil ist im Euklidischen technisch einfacher als der Beweis für allgemeine σ-endliche Maßräume.) Wähle eine Ausschöpfung von Ω durch Mengen Ω_m, $m \in \mathbb{N}$, mit $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$, $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m = \Omega$ sowie $|\Omega_m| < \infty$. (Bis auf die Endlichkeit des Maßes wird dies auch mit $\Omega_m \nearrow \Omega$ abgekürzt.) Wir definieren $F_m(g) := F(\chi_{\Omega_m} g)$ für $g \in L^p(\Omega_m)$ (ohne Notationsänderung durch 0 nach $\Omega \setminus \Omega_m$ fortgesetzt; die charakteristische Funktion steht nur der Deutlichkeit halber da) und erhalten $\|F_m\|_{(L^p(\Omega_m))^*} \le \|F\|_{(L^p(\Omega))^*}$, da $L^p(\Omega_m) \subset L^p(\Omega)$ vermöge dieser Fortsetzung. Somit ist $F_m \in (L^p(\Omega_m))^*$. Nach Teil (v) existiert somit für jedes $m \in \mathbb{N}$ genau ein $f_m \in L^q(\Omega_m)$ (das wir ohne Notationsänderung ebenfalls durch 0 fortsetzen) mit

$$F_m(g) = \int\limits_\Omega g\overline{f_m} = \int\limits_{\Omega_m} g\overline{f_m}$$

für alle $g \in L^p(\Omega_m)$. Ebenfalls nach (v) gilt $\|f_m\|_{L^q(\Omega_m)} = \|F_m\|_{(L^p(\Omega_m))^*}$. Wie beim Beweis der Injektivität sieht man, dass $f_m = f_k$ fast überall in $\Omega_m \cap \Omega_k$ gilt. Somit erhalten wir $|f_m| \le |f_k|$ für $\Omega_m \subset \Omega_k$. Weiterhin folgt in diesem Fall

$$\|f_m\|_{L^q(\Omega)} \le \|f_k\|_{L^q(\Omega)} = \|F_k\|_{(L^p(\Omega_k))^*} \le \|F\|_{(L^p(\Omega))^*} < \infty.$$

Wir definieren

$$f(x) := f_m(x) \quad \text{für ein } m \text{ mit } x \in \Omega_m.$$

Es folgt $\|f\|_{L^q(\Omega)} \le \|F\|_{(L^p)^*} < \infty$ nach dem Satz über die dominierte Konvergenz.

Sei nun $g \in L^p(\Omega)$ beliebig. Wir setzen $g_m := \chi_{\Omega_m} g$ und erhalten $g_m \to g$ für $m \to \infty$ in L^p, da $p < \infty$. Es gilt

$$F(g_m) = F_m(g_m) = \int\limits_{\Omega_m} g_m \overline{f_m} = \int\limits_\Omega g_m \bar f = (J(f))(g_m).$$

Lasse nun $m \to \infty$. Da $f \in L^q(\Omega)$ ist, konvergieren beide Seiten der Gleichung. Somit gilt $F(g) = (J(f))(g)$ für alle $g \in L^p(\Omega)$. Also folgt $F = J(f)$ mit $f \in L^q(\Omega)$.

Wir haben bereits ganz am Anfang nachgewiesen, dass J eine Isometrie ist, also $\|F\|_{(L^p)^*} = \|J(f)\|_{(L^p)^*} = \|f\|_{L^q}$ gilt. □

Korollar 3.4.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p \le \infty$, $\frac1p + \frac1q = 1$. Dann sind für $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in L^p(\Omega)$

(ii) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *und es gibt ein $c > 0$ mit* $\left|\int\limits_\Omega \zeta f\right| \le c \cdot \|\zeta\|_{L^q(\Omega)}$ *für alle* $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$.

Es gilt $c \ge \|f\|_{L^q(\Omega)}$.

Beweis. Die Aussage über c folgt aus dem ersten Teil („(i)$\Longrightarrow$(ii)“) für $1 < p < \infty$, da in der Hölderschen Ungleichung Gleichheit gilt, wenn f^p und g^q (in der dortigen Notation) Vielfache voneinander sind. Für $p = 1, \infty$ ist dies leicht direkt zu sehen.

„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Aus der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\left|\int\limits_\Omega \zeta f\right| \le \|\zeta\|_{L^q(\Omega)} \cdot \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Nach Voraussetzung ist F mit $F(\zeta) := \int\limits_\Omega \zeta f$ auf $C_c^\infty(\Omega)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$ stetig. Ist $p > 1$, so gilt $q < \infty$ und $C_c^\infty(\Omega)$ liegt nach Theorem 3.3.4 und Glättung bezüglich $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$ dicht in L^q. Also lässt sich F nach Theorem 2.2.9 eindeutig zu einem stetigen Funktional $\tilde{F}$ auf $L^q(\Omega)$ fortsetzen. Dieses läßt sich nach Theorem 3.4.2 mit $\tilde{f} \in L^p(\Omega)$ als $F(g) = \int\limits_\Omega g\tilde{f}$ für alle $g \in L^q(\Omega)$ darstellen. Dabei durften wir die komplexe Konjugation auch weglassen. Es gilt $\int\limits_\Omega gf = \int\limits_\Omega g\tilde{f}$ für alle $g \in C_c^\infty(\Omega)$. Nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, Lemma **??**, folgt daher $f = \tilde{f}$ fast überall.

Sei nun $p = 1$. Wir definieren

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{für } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $D \Subset \Omega$ und $(\eta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine Standard Diracfolge wie bei Glättungen. Für kleines $\varepsilon > 0$ gilt $\zeta_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * (\chi_D g) \in C_0^\infty(\Omega)$. Nach Voraussetzung folgt

$$\left|\int\limits_\Omega \zeta_\varepsilon f\right| \le c \cdot \|\zeta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \le c.$$

Aus der L^1-Konvergenz $\zeta_\varepsilon \to \chi_D g$ folgt, dass eine Teilfolge punktweise fast überall konvergiert. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir hieraus

$$\int\limits_D |f| = \left|\int\limits_D gf\right| \le c.$$

□