3.5. **Lusin, Titze-Urysohn und Riesz.**

Theorem 3.5.1 (Lusin)**.** *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Zu $U \subset X$ offen mit $\mu(U) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein kompaktes $K \subset U$, so dass gilt:*

(1) $f_{|K}$ *stetig,*
(2) $\mu(U \backslash K) < \varepsilon$.

Beweis. Setze

$$U_{j,k} = \{x \in U : \frac{k}{j} \le f(x) < \frac{k+1}{j}\} \quad (j \in \mathbb{N}, k \in Z).$$

Es ist klar, dass $U_{j,k}$ meßbar ist. Aus Lemma 4.3 in Analysis III haben wir $K_{j,k} \subset U_{j,k}$ kompakt mit $\mu(U_{j,k} \backslash K_{j,k}) < 2^{-j-|k|}$. Daraus gilt

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \mu(U \backslash \cup_{k=-N}^{N} K_{j,k}) &= \mu(U \backslash \cup_{k=-\infty}^{\infty} K_{j,k}) \\ &\le \mu(\cup_{k=-\infty}^{\infty} U_{j,k} \backslash K_{j,k}) \\ &\le \sum_{\infty}^{\infty} \mu(U_{j,k} \backslash K_{j,k}) < 2^{-j}\varepsilon. \end{aligned}$$

Wähle $N(j)$, so dass mit $K_j = \cup_{k=-N(j)}^{N(j)} K_{j,k}$ gilt:

$$\mu(U \backslash K_j) < 2^{-j}\varepsilon.$$

Setze $K := \cap_{j=1}^{\infty} K_j$. Wir haben

$$\mu(U \backslash K) \le \mu(\cup_{j=1}^{\infty} U \backslash K_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U \backslash K_j) < \varepsilon.$$

Setze $f_j(x) = \frac{k}{j}$ für $x \in K_{j,k}$. f_j ist stetig auf K_j, da $\operatorname{dist}(K_{j,k}, K_{j,k'}) > 0$ für $k \neq k'$. Aus Definition haben wir

$$|f(x) - f_j(x)| \le \frac{1}{j} \text{ für } x \in K \subset K_j.$$

D.h. F_j gleichmäßig auf K gegen f konvergiert. Also f ist stetig auf K. □

Theorem 3.5.2 (Tietze-Urysohn)**.** *Sei $K \subset (X, d)$ abgeschlossen und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Fortsetzung $\bar{f} \in C^0(X)$, also $\bar{f}_{|K} = f$, mit*

$$\sup_{x\in X} |\bar{f}(x)| = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Beweis. oBdA nehmen wir, dass $\sup_{x\in K} |f(x)| = 1$. Zu A, B abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es $\varphi \in C^0(X, [-1, 1])$ mit $\varphi(A) = 1$, $\varphi(B) = -1$; etwa

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x, B)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}.$$

Konstruiert induktiv $f_k \in C^0(X)$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit

(1) $|f_k(x) - f_{k-1}(x)| \le \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ für $x \in X$, $k \ge 1$
(2) $|f(x) - f_k(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^k$ für $x \in K$, $k \ge 0$

Start: $f_0 = 0$.
Sei f_{k-1} schon gefunden für $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in K : f_{k-1}(x) \le f(x) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^k\} \\ B_k &= \{x \in K : f_{k-1}(x) \ge f(x) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^k\}. \end{aligned}$$

Wähle φ_k wie oben und setze

$$f_k = f_{k-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \varphi_k.$$

(1) ist offensichtlicht. (2) ergibt sich mit Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} x \in A_k \Rightarrow 0 &\leq f(x) - f_{k-1}(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in B_k \Rightarrow 0 &\geq f(x) - f_{k-1}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &\geq -\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k = -\left(\frac{2}{3}\right)^k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in K\backslash(A_k \cup B_k) \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| &\leq |f(x) - f_{k-1}(x)| + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^k. \end{aligned}$$

Nach (1), (2) strebt $f_k \to \bar{f}$ gleichmäßig auf X und $\bar{f}_{|K} = f$. Ferner

$$\bar{f}(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x) - f_{k-1}(x)| \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

□

Proof of Theorem 3.3.3. Theorem 3.3.3 folgt aus Theorem 3.5.1 und Theorem 3.5.2. □

Definition 3.5.3. Sei (X, d) *σ-kompakter* metrischer Raum, d.h., die Abstandskuglen $\{x : d(x, x_0) \leq R\}$ sind kompakt. Ein Maß μ auf X heißt *Radonmaß*, falls

(i) μ ist Borelregulär, d.h., alle Borelmenge sind meßbar und zu jeder Menge $A \subset X$ gibt es eine Borelmenge $B \supset A$ mit $\mu(B) = \mu(A)$.
(ii) $\mu(K) < \infty$ $\forall$ Kompaktum $K \subset X$.

Beispiel. Beispielsweise ist $\mathbb{R}^n$, ausgestattet mit der Standardmetrik, σ-kompakt, denn $\{x : d(x, x_0) \leq R\}$ ist kompakt. $\mathcal{L}^n$ ist ein Radonmaß.

Theorem 3.5.4. *Sei $\mu = \mathcal{L}^n$ oder μ ein Radonmaß auf σ-kompaktem metrischem Raum. Dann ist $L^p(\mu)$ separabel für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Es reicht aus, jede Funtion $u \in C_c^0(X)$ zu approximieren, denn $C_c^0(X)$ ist dicht in $L^p(\mu)$ für $1 \leq p < \infty$. Setze

$$B_n = \{x : d(x, x_0) < n\} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Überdecke $\overline{B}_n$ durch endlich viele Kugeln $B_{\frac{1}{n}}(x_{n,j})$, $(1 \leq j \leq j_n)$, mit Mittelpunkten $x_{n,j} \in \overline{B}_n$. Definiere

$$\begin{aligned} \xi_{n,j}(x) &:= \begin{cases} 1 - n\, d(x, x_{n,j}), & \text{falls } d(x, x_{n,j}) < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ \xi_{n,0}(x) &:= \operatorname{dist}(x, B_n) \end{aligned}$$

und

$$\eta_{n,j}(x) = \frac{\xi_{n,j}(x)}{\sum_{k=0}^{j_n} \xi_{n,k}(x).}$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass gilt

- $\eta_{n,j} \in C_c^0(X)$ für $1 \leq j \leq j_n$.

- $\sum_{j=0}^{j_n} \eta_{n,j}(x) = 1$ für alle $x \in X$ (Teilung der Eins).

Sei nun $u \in C_c^0(X)$ mit $spt\, u \in B_n$. Setze

$$\alpha_j = u(x_{n,j}) \quad \text{für } 1 \leq j \leq j_n.$$

Daraus haben wir

$$\begin{aligned} |u(x) - \sum_{j=1}^{j_n} \alpha_j \eta_{n,j}| &\leq |\sum_{j=1}^{j_n} (u(x) - \alpha_j)\eta_{n,j}| \\ &\leq osc(u, \frac{1}{n}) \to 0 \text{ mit } n \to \infty. \end{aligned}$$

Also span$\{\eta_{n,j} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq j_n\}$ ist dicht. Wähle linerakombinationen mit rationalen Koeffizienten.

□

Bemerkung. l^∞ und $L^\infty(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) sind nicht separabel.

Bemerkung. Wir heben auch gezeigt, dass $C^0(X)$ separabel ist, falls X kompakt ist.

Im folgenden interessieren wir uns den Dualraum vom $L^p(\mu)$. Betrachte für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$J : L^q(\mu) \to L^p(\mu)', \quad (Jv)u = \int_X uv\, d\mu.$$

Lemma 3.5.5. *$J : L^q \to L^p(\mu)'$ ist isometrisch, d.h., $\|Jv\| = \|v\|_{L^q(\mu)}$ für alle $v \in L^q(\mu)$.*

Beweis. Jv ist stetig, denn $|(Jv)u| \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$ nach der Ungleichung von Hölder. Es folgt $\|Jv\| \leq \|v\|_{L^q}$, also Jv ist stetig.

$J : L^q \to L^p(\mu)'$ is stetig, denn die Operatornorm $\|J\|$ ist kleiner oder gleich 1. oBdA nehmen wir an, dass $\|v\|_{L^q} = 1$. Sei zunächst $q < \infty$ ($p > 1$). Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_q : \{v \in L^q(\mu) : \|v\|_{L^q} = 1\} &\to \{u \in L^p(\mu) : \|v\|_{L^p} = 1\} \\ \mathcal{D}_q(v) &= |v|^{q-2}v. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass

$$\|\mathcal{D}_q(v)\|_{L^q} = (\int |v|^{p(q-1)} d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\int |v|^q d\mu)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

(denn $p = \frac{q}{q-1}$) und

$$(Jv)(\mathcal{D}_q(v)) = \int |v|^q d\mu = 1 = \|\mathcal{D}_q(v)\|_{L^q}.$$

Also gilt $\|Jv\| = 1$.

Sei nun $q = \infty$ und $p = 1$. Wähle eine Ausschöpfung $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ von X, E_j messbar, mit $\mu(E_j) < \infty$ (z. B., Kugeln von Raduis j) und $E_{j,\delta} = \{x \in E_j : |v(x)| \geq 1 - \delta\}$. Es gilt $\mu(E_{j,\delta}) > 0$ für j hinreichend groß, denn $\|v\|_{L^\infty} = 1$. Setze $u = (\operatorname{sign} v)\chi_{E_{j,\delta}} \in L^1(\mu)$. Wir haben

$$(Jv)u = \int_{E_{j,\delta}} |v| d\mu \geq (1 - \delta)\mu(E_{j,\delta}) = (1 - \delta)\|u\|_{L^1}$$

Mit $\delta \searrow 0$ folgt $\|Jv\| = 1$. □

Theorem 3.5.6 (Darstellungssatz von Riesz)**.** *Sei μ maß auf X, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ mit $1 \le p < \infty$. Dann ist*

$$J : L^q(\mu) \to L^p(\mu)', \quad (Jv)u = \int_X uv\, d\mu$$

ein normtreuer Isomorphismus. Für $p = 1$muß das mass σ-endlich sein.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $1 < p < \infty$. Sei $\varphi \in L^p(\mu)'$ gegeben, oBdA $\|\varphi\| = 1$. Sei $S = \{u \in L^p(\mu) : \|u\|_{L^p} = 1\}$. Wir haben also $\sup_{u \in S} \varphi(u) = 1$.

Angennomen, wir haben schon $v_0 \in L^q(\mu)$ mit $Jv_0 = \varphi$. Nach Lemma 3.5.5 gilt

$$\|v_0\|_{L^q} = \|Jv_0\| = \|\varphi\| = 1.$$

Es folgt $\|\mathcal{D}_q(v_0)\|_{L^p} = 1$. Also $\varphi_{|S}$ hat in $u_0 := \mathcal{D}_q(v_0) \in S$ ein Maximum.

Ansatz. Bestimme Maximumstelle $u_0 \in S$ von $\varphi_{|S}$ und setze $v_0 = \mathcal{D}_q^{-1}(u_0) = \mathcal{D}_p(u_0)$ (Bemerkung: $\mathcal{D}_q$ und $\mathcal{D}_p$ sind zueinander invers.)

Schritt 1. Sei $u_0 \in S$ mit $\varphi(u_0) = \sup_{u \in S} \varphi(u) = 1$ Dann gilt $J(\mathcal{D}_q(u_0)) = \varphi$, d.h., $v_0 = \mathcal{D}_p(u_0)$ ist eine Lösung der Darstellungsaufgabe.

Beweis. Sei $G : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$, $G(u) = \int |u|^p d\mu$. Sei $|t| < 1$ und $u \in L^p(\mu)$ beliebig. Wir haben

$$\partial_t |u_0 + tu|^p = p|u_0 + tu|^{p-2}(u_0 + tu)u$$

und

$$|\partial_t |u_0 + tu|^p| \le p(|u_0| + |u|)^p \le p2^{p-1}((|u_0|^p + |u|^p) \in L^1.$$

Nach der Parameterdifferentiation gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u_0 + tu\|^{-1}_{L^p}{}_{|t=0} &= \frac{d}{dt} G(u_0 + tu)^{-\frac{1}{p}}_{|t=0} \\
&= -\frac{1}{p} G(u_0)^{-\frac{1}{p}-1} \frac{d}{dt} \int |u_0 + tu|^p d\mu_{|t=0} \\
&= -\int |u_0|^{p-2} u_0 u d\mu \\
&= -\langle J(\mathcal{D}_p(u_0)), u\rangle.
\end{aligned}$$

Aus der Maximaleigenschaft von u_0 folgt

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt}\varphi\left(\frac{u_0 + tu}{\|u_0 + tu\|_{L^p}}\right)_{|t=0} &= \varphi(u) - \langle J(\mathcal{D}_p(u_0)), u\rangle \varphi(u_0), \\
&= \varphi(u) - \langle J(\mathcal{D}_p(u_0)), u\rangle, \qquad \forall u
\end{aligned}$$

Schritt 2. Existenz einer Maximalstelle.

Sei $u_k \in S$ mit $\varphi(u_k) \to \sup_{u \in S} \varphi(u) = 1$. Wir wollen zeigen, dass u_k eine Cauchyfolge ist. Dazu behaupten wir folgende gleichmäßige Konvexitätseigenschaft des Normballs:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ so dass gilt

$$\|u\|_{L^p} = \|v\|_{L^p} = 1, \|\frac{u+v}{2}\|_{L^p} \ge 1 - \delta \Rightarrow \|u - v\|_{L^p} < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Für die Maximalfolge gilt für k, l groß,

$$1 - \delta \le \frac{1}{2}(\varphi(u_k) + \varphi(u_l)) = \varphi(\frac{u_k + u_l}{2}) \le \|\frac{u_k + u_l}{2}\|_{L^p}$$

Aus (3.2) gilt

$$\|u_k - u_l\|_{L^p} \leq \varepsilon \quad \text{für } k, l \text{ groß.}$$

Also konvergiert $\{u_k\}$ gegen die gesuchte Stelle $u_0 \in S$. Beweisende für $p > 1$.

□

Lemma 3.5.7 (Gleichmäßge Konvexität von $L^p(\mu)$.). *Zu $1 < p < \infty$ gibt es eine Konstante $c = c(p)$, so dass für alle $u, v \in L^p(\mu)$ gilt:*

$$\frac{1}{2}(\|u\|_{L^p}^p + \|v\|_{L^p}^p) - \|\frac{u+v}{2}\|_{L^p}^p \geq \begin{cases} c\|u-v\|_{L^p}^p, & p \geq 2 \\ c(\|u\|_{L^p}^{p-2} + \|v\|_{L^p}^{p-2})\|u-v\|_{L^p}^2, & 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

Beweis. $f(x) = |x|^p$ ist konvex für $x \in \mathbb{R}$, genauer

$$f'(x) = p|x|^{p-2}x,$$

$$f''(x) = p(p-1)|x|^{p-2} > 0 \quad \text{für } x \neq 0.$$

Wir behaupten:

(3.3)
$$\frac{1}{2}(|u_0|^p + |x_1|^p) - |\frac{x_0 + x_1}{2}|^p \geq \begin{cases} c(p)|x_0 - x_1|^p, & p \geq 2 \\ c(p)(|u_0| + |x_1|)^{p-2}|x_0 - x_1|^2, & 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

oBdA nehmen wir an, dass $x_1 = 1$ und $x_0 = x \in [-1, 1]$. Setze

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{2}(1 + |x|^p) - (\frac{1+x}{2})^p \geq 0 \\ \tau(x) &= \begin{cases} |1-x|^p, & p \geq 2 \\ (1+|x|)^{p-2})|1-x|^2, & 1 < p \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= \frac{p}{2}|x|^{p-2}x - (\frac{1+x}{2})^{p-1} < 0 \quad \text{für } x < 1 \\ \sigma(1) &= 0 = \tau(1), \\ \sigma'(1) &= 0 = \tau'(1), \\ \sigma'(1) &= \frac{p(p+1)}{4} \\ \tau''(1) &= \begin{cases} 0, & p \geq 2 \\ 2^{p-1}, & 1 < p \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Wähle $\mu = \mu(p) > 0$ mit $\sigma''(1) - \mu\tau''(1) > 0$. Dann gibt $\delta = \delta(p) > 0$ mit

$$\sigma(x) - \mu\tau(x) \geq 0, \text{ für } 1 - \delta \leq x \leq 1.$$

Für $x \leq 1 - \delta$ verwende

$$\sigma(x) \geq \sigma(1-\delta) \geq \frac{\sigma(1-\delta)}{2^{p+1}}\tau(x).$$

Es folgt

$$\sigma(x) \geq c(p)\tau(x) \quad \text{mit } c(p) = \min\{\mu, \frac{\sigma(1-\delta)}{2^{p+1}}\}.$$

(3.3) ist gezeigt.

$p \geq 2$: Nach der Integration über (3.3) folgt die Behauptung.

$1 < p < 2$: Verwendung der Hölder Ungleichung mit $\frac{2}{2-p}$ und $\frac{2}{p}$ liefert

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{L^p}^2 &= \left(\int (|u|+|v|)^{\frac{p}{2}(2-p)}(|u|+|v|)^{\frac{p}{2}(p-2)}|u-v|^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \left(\int (|u|+|v|)^p\right)^{\frac{(2-p)}{p}} \int (|u|+|v|)^{p-2}|u-v|^2 d\mu \\
&\leq \frac{1}{c(p)}(\|u\|_{L^p}+\|v\|_{L^p})^{2-p}\left(\frac{1}{2}(\|u\|_{L^p}^p+\|v\|_{L^p}^p) - \|\frac{u+v}{2}\|_{L^p}^p.\right)
\end{aligned}$$

Es bleibt die Einbettung

$$J : L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)'$$

zu untersuchen.

Beweis von $L^1(\mu)' = L^\infty(\mu)$.

Sei $\varphi \in L^1(\mu)'$ gegeben. Für $A \subset X$ meßbar, $\mu(A) < \infty$ und $p \geq 1$ definiere

$$\varphi_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_p(u) = \varphi(\chi_A u).$$

φ_p ist stetig, denn aus der Hölder Ungleichung gilt

$$|\varphi_p(u)| \leq \|\varphi\|\|\chi_A u\|_{L^1} \leq \|\varphi\|\mu(A)^{\frac{1}{q}}\|u\|_p.$$

Nach Rieszschem Darstellungssatz für $1 < p < \infty$ existiert $v_p \in L^q(\mu)$ mit

$$\langle Jv_p, u\rangle = \int uv_p d\mu = \varphi_p(u) = \varphi(\chi_A u), \quad \forall u \in L^p(\mu).$$

Daraus folgt

$$\langle J(\chi_{X\setminus A}v_p), u\rangle = \langle Jv_p, \chi_{X\setminus A}u\rangle = \varphi(0) = 0, \quad \forall u \in L^p(\mu).$$

Da J isometrisch ist, gilt $v_p = 0$ f.ü. aud $X\setminus A$.

Sei $p < p'$ und $u \in L^{p'}(\mu)$. Dann $q > q'$ und $v_p \in L^{q'}(\mu)$ (da $v_p = 0$ f.ü. auf $X\setminus A$.) Also haben wir

$$\begin{aligned}
\int uv_{p'}d\mu &= \varphi_{p'}(u) \\
&= \varphi(\chi_A\chi_A u) \\
&= \int \chi_A uv_p d\mu \quad (\text{da } \chi_A u \in L^p) \\
&= \int uv_p d\mu.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $v_p = v_{p'} =: v$ fast überall, und

$$\|v\|_{L^q} = \|\varphi_p\| \leq \|\varphi\|\mu(A)^{\frac{1}{q}} \to \|\varphi\| \text{ mit } p \searrow 1.$$

Also $v \in L^\infty$ sowie

$$\int uvd\mu = \varphi(\chi_A u) \quad \forall u \in L^p(\mu), p > 1 \text{ bliebig}$$

Da L^p dicht in L^1, ergibt sich die Darstellungsformell auf L^1.

Wähle eine Ausschöpfung $X = \cup_k A_k$, A_k meßbar und $\mu(A_k) < \infty$. Seien $v_k \in L^\infty(\mu)$, $\|v_k\| \leq \|\varphi\|$ wie oben konstruiert. Für $k < k'$ und $u \in L^1(\mu)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int u(\chi_{A_k} v_{k'})d\mu &= \int (u\chi_{A_k})v_{k'}d\mu \\
&= \varphi(\chi_{A_{k'}} u\chi_{A_k})d\mu \\
&= \varphi(\chi_{A_k} u) \quad \text{da } A_k \subset A_{k'} \\
&= \int u v_k d\mu.
\end{aligned}$$

Also $v_{k'} = v_k =: v \in L^\infty$ auf $A_{k'}$, und v hat die gewünschte Darstellungseigenschaft.
□

Bemerkung. $J : L^1(\mu) \to L^\infty(\mu)'$ ist nicht surjektiv.