4. Der Satz von Hahn-Banach

4.1. **Der Satz von Hahn-Banach.** Der Satz von Hahn-Banach besagt, dass sich ein lineares Funktional normerhaltend fortsetzen lässt. Der Beweis benutzt das Zornsche Lemma.

Lemma 4.1.1 (Zornsches Lemma, Erinnerung $\star$)**.** *Sei M eine nichtleere Menge mit einer Teilordnung $\leq$. Nehme an dass jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) eine obere Schranke $b \in M$ besitzt, d. h. dass $x \leq b$ für alle $x \in \Lambda$ gilt. Dann enthält M ein maximales Element x_0, d. h. ein Element $x_0 \in M$, so dass aus $x \leq x_0$ bereits $x = x_0$ folgt. (Beachte, dass x_0 i. a. nicht eindeutig bestimmt ist.)*

Für einen Beweis aus dem Auswahlaxiom verweisen wir auf Literatur oder Veranstaltungen zur Logik. Das Zornsche Lemma wurde bereits beim Beweis, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt, benutzt.

Wir zeigen zwei Varianten des Satzes von Hahn-Banach. Zunächst behandeln wir die etwas allgemeinere Version mit einer konvexen Funktion.

Theorem 4.1.2 (Satz von Hahn-Banach (mit einer konvexen Funktion))**.** *Sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $W \subset E$ ein Unterraum und $\varphi\colon W \to \mathbb{R}$ linear. Sei $p\colon E \to \mathbb{R}$ konvex und gelte $\varphi \leq p$ auf W. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $\tilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}$ von φ mit $\tilde{\varphi} \leq p$, d. h. eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\varphi}|_W = \varphi$ und $\tilde{\varphi} \leq p$.*

Beweis.

(i) Sei $x_0 \notin W$. Wir wollen φ zunächst auf $W \oplus \langle x_0 \rangle$ fortsetzen. Jedes Element $x \in W \oplus \langle x_0 \rangle$ läßt sich in der Form $x = w + \lambda x_0$ mit $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ darstellen. Sei ψ eine lineare Fortsetzung von φ. Dann folgt

$$\psi(x) = \psi(w) + \lambda\psi(x_0) = \varphi(w) + \lambda\psi(x_0).$$

Können wir $\psi(x_0)$ so wählen, dass $\psi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in W \oplus \langle x_0 \rangle$ gilt, so ist ψ die gesuchte Fortsetzung auf $W \oplus \langle x_0 \rangle$.

Somit ist zu zeigen, dass $\psi(x_0)$ so gewählt werden kann, dass $\varphi(w) + \lambda\psi(x_0) \leq p(w + \lambda x_0)$ für alle $\lambda \neq 0$ und alle $w \in W$ gilt. Dies ist (nach Unterscheidung für $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$) äquivalent zu

$$\sup_{\substack{w \in W \\ \mu > 0}} \frac{\varphi(w) - p(w - \mu x_0)}{\mu} \leq \psi(x_0) \leq \inf_{\substack{z \in W \\ \lambda > 0}} \frac{p(z + \lambda x_0) - \varphi(z)}{\lambda}.$$

Dazu wollen wir nachweisen, dass für alle $w, z \in W$ und alle $\lambda, \mu > 0$

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}\left(\frac{p(z + \lambda x_0)}{\lambda} + \frac{p(w - \mu x_0)}{\mu}\right) \geq \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}\left(\frac{\varphi(w)}{\mu} + \frac{\varphi(z)}{\lambda}\right)$$

gilt. Der zusätzliche Vorfaktor erleichtert nun die Rechnungen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{\lambda + \mu} p(z + \lambda x_0) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} p(w - \mu x_0) \\
\geq{} & p\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} z + \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} x_0 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} w - \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} x_0\right) \\
={} & p\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} z + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} w\right) \geq \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} z + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} w\right) \\
={} & \frac{\mu}{\lambda + \mu}\varphi(z) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\varphi(w).
\end{aligned}$$

Somit läßt sich φ wie gewünscht auf $W \oplus \langle x_0 \rangle$ fortsetzen.

(ii) Die Fortsetzung auf ganz E erhalten wir mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Betrachte dazu die Menge $\mathcal{M}$ aller Fortsetzungen von φ mit $\varphi \leq p$, d. h. die Menge aller Tupel (ψ, U), wobei $U \subset E$ ein Unterraum mit $W \subset U$ ist,

$\psi|_W = \varphi$ und $\psi \le p$ in U gelten. (φ, W) ist selber eine Fortsetzung von φ, also ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Auf $\mathcal{M}$ definieren wir eine Halbordnung durch $(\psi, U) \le \left(\tilde{\psi}, V\right)$, falls $U \subset V$ und $\tilde{\psi}|_U = \psi$ gelten. Sei also $\Lambda \subset \mathcal{M}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$, $\Lambda = \{(\psi_i, U_i) : i \in I\}$ für eine geeignete Indexmenge. Dann ist durch (ψ, U) mit $U := \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ und $\psi(x) := \psi_i(x)$ für $x \in U_i$ eine obere Schranke gegeben: $U \subset E$ ist ein Unterraum, ψ ist wohldefiniert, linear, stimmt auf W mit φ überein und erfüllt $\psi(x) \le p(x)$ für alle $x \in U$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also ein maximales Element. Dieses muss auf ganz E definiert sein, denn sonst könnte man es nach den obigen Überlegungen auf $U \oplus \langle x_0\rangle$ für ein $x_0 \in E\setminus U$ fortsetzen. Dies widerspräche der Maximalität. □

Theorem 4.1.3 (Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale)**.** *Sei E ein normierter Raum, $W \subset E$ ein Unterraum und $\varphi \in W^*$. Dann gibt es eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in E^*$ von φ, d. h. eine Abbildung $\tilde{\varphi} \in E^*$ mit $\tilde{\varphi}|_W = \varphi$ und $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Beweis.

(i) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt dies gerade aus dem Satz von Hahn-Banach mit einer konvexen Funktion: Die Norm ist wegen

$$\|tx + (1-t)y\| \le \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\|$$

für alle $x, y \in E$ und $t \in [0,1]$ konvex. Sei ohne Einschränkung $\|\varphi\| = 1$. Setze $p(x) := \|x\|$. Dann gilt $\varphi(x) \le \|x\|$. Für die Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ erhalten wir

$$\pm\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(\pm x) \le p(\pm x) = \|x\|,$$

also $\|\tilde{\varphi}\| \le 1$ und

$$\|\tilde{\varphi}\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|\tilde{\varphi}(x)\| \ge \sup_{\substack{x\in W\\ \|x\|=1}} \|\tilde{\varphi}(x)\| = \sup_{\substack{x\in W\\ \|x\|=1}} \|\varphi(x)\| = 1.$$

Somit ist $\|\tilde{\varphi}\| = 1$.

(ii) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Wir fassen E als reellen Vektorraum auf und bezeichnen diesen mit $E_\mathbb{R}$. Sei $\varphi \in E^*$. Es gilt $\varphi = \operatorname{Re}\varphi + i \operatorname{Im}\varphi$. Wegen

$$\operatorname{Re}\varphi(ix) + i\operatorname{Im}\varphi(ix) = \varphi(ix) = i\varphi(x) = i\operatorname{Re}\varphi(x) - \operatorname{Im}\varphi(x)$$

gilt $\operatorname{Re}\varphi(ix) = -\operatorname{Im}\varphi(x)$. $\operatorname{Re}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ sind reelle Formen auf $E_\mathbb{R}$. Daher können wir jede komplexe Form φ als

$$\varphi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x) - i\operatorname{Re}\varphi(ix) \tag{4.1}$$

für $x \in E$ schreiben. Umgekehrt sei ψ eine reellwertige Form auf $E_\mathbb{R}$. Dann wird durch

$$\varphi(x) := \psi(x) - i\psi(ix)$$

eine komplexe Form auf E definiert, es gilt nämlich insbesondere $\varphi(ix) = \psi(ix) - i\psi(-x) = i\psi(x) - i^2\psi(ix) = i\varphi(x)$. Für die Norm gilt $\|\varphi\| = \|\psi\|$, denn es gilt einmal $|\varphi(x)| = \sqrt{|\psi(x)|^2 + |\psi(ix)|^2} \ge |\psi(x)|$. Andererseits gibt es zu $x \in E$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $|\varphi(x)| = e^{it}\varphi(x) = \varphi\left(e^{it}x\right)$. Da ψ reellwertig ist und $|\varphi(x)| \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$|\varphi(x)| = \psi\left(e^{it}x\right) \le \|\psi\| \cdot \|x\|$$

für alle $x \in E$.

Sei also $\varphi \in W^*$. Setze $\psi := \operatorname{Re}\varphi \in (W_\mathbb{R})^*$. Dann besitzt ψ eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{\psi}$ nach $E_\mathbb{R}$. Somit ist

$$\tilde{\varphi}(x) := \tilde{\psi}(x) - i\tilde{\psi}(ix)$$

für $x \in E$ eine normerhaltende Fortsetzung von φ auf E. Wegen (4.1) handelt es sich um eine Fortsetzung. □

Korollar 4.1.4. *Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein linearer Teilraum, d. h. Unterraum, und $x_0 \in X$. Setze $d := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\|$. Sei $d > 0$. Dann gibt es $\varphi \in X^*$ mit $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x_0) = d$ und $\varphi|_M = 0$.*

Beweis. Definiere λ auf $M \oplus \langle x_0 \rangle$ durch $\lambda(y + \alpha x_0) := \alpha d$ für $y \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda\| &= \sup_{\substack{y+\alpha x_0 \neq 0 \\ y \in M,\, \alpha \in \mathbb{K}}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \\ y \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \\ z \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|-\alpha z + \alpha x_0\|} \\ &= \sup_{z \in M} \frac{d}{\|x_0 - z\|} = \frac{d}{\inf_{z \in M} \|x_0 - z\|} = \frac{d}{d} = 1.\end{aligned}$$

Eine normtreue Fortsetzung φ aus dem Satz von Hahn-Banach liefert die Behauptung. □

Korollar 4.1.5. *Sei X ein normierter Raum und X' sein Dualraum.*
1) Sei $x \in X$. Dann gilt

$$\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in X', \\ \|\varphi\| = 1}} |\langle x, \varphi \rangle|.$$

Das Supremum wird angenommen, d. h. es gibt ein $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\|x\| = \langle x, \varphi \rangle$.
2) Punkte in X lassen sich durch X' trennen. D.h., ist $\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in X'$, so gilt $x = 0$.

Beweis. 1). Wähle in Korollary 4.1.4 $M = \{0\}$., also $d = \|x\|$. 2) folgt aus 1). □

Korollar 4.1.6. *Sei X ein normierter Raum und X' sein Dualraum. Sei $X'' := (X')'$ der Dualraum von X'. Dann ise die Abbildung*

$$J : X \to X'', \quad (Jx)(\varphi) := \varphi(x)$$

eine isometrische (normtreue) Einbettung.

Proof. Übung. □

Bemerkung. Ein Banachraum X heißt *reflexiv*, wenn die kanonische Einbettung J surjektiv ist. Aus Abschnitt 3 wissen wir, dass l^p, $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv sind, aber nicht $L1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, l^1, l^∞. Die Hilberträume sind reflexiv.

Lemma 4.1.7. *Sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ offen und konvex, sowie $0 \in K$. Dann ist das Minkowski-Funktional*

$$p(x) = \inf\left\{r > 0 : \frac{x}{r} \in K\right\}$$

convex (sublinear) und $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

Beweis. Wegen $0 \in K = \mathring{K}$ existiert ein $\rho > 0$ mit $B_{2\rho}(0) \subset K$. Es folgt $\rho \frac{x}{\|x\|} \in K$ für alle x. Somit $p(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\| < \infty$.

Es ist leicht zu zeigen, dass gilt es für $t > 0$:

$$\frac{x}{t} \in K \Leftrightarrow t > p(x).$$

Insbesondere $K = \{x : p(x) < 1\}$ und $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für $\lambda \geq 0$. Sind $\frac{x}{r}, \frac{y}{s} \in K$, so folgt aufgrund der Konvexität auch $\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\frac{x}{r} + \frac{s}{r+s}\frac{y}{s} \in K$. Somit erhalten wir $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. □

Theorem 4.1.8 (Trennungssatz)**.** *Sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ offen und konvex. Sei $x_0 \in \complement K$. Dann zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varphi \in X^*$ mit*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \alpha \quad \textit{für } x \in K \quad \textit{und} \quad \operatorname{Re}\varphi(x_0) \geq \alpha.$$

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. oBdA $\alpha = 1$ und $0 \in K$ nach Translation. Sei p wie in Lemma 4.1.7. Definiere $f\colon \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ durch $f(\lambda x_0) := \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt $f(\lambda x_0) = \lambda \leq p(\lambda x_0)$ für $\lambda > 0$ (denn $\frac{\lambda x_0}{\lambda} = x_0 \notin K$) und $f(\lambda x_0) \leq 0 \leq p(\lambda x_0)$ für $\lambda \leq 0$. Somit gibt es nach Hahn-Banach eine lineare Fortsetzung $F\colon X \to \mathbb{R}$ von f mit $F \leq p$. Es gilt $F \leq p < 1$ in K. Daher ist F stetig. Weiterhin gilt $F(x_0) = f(x_0) = 1$.

Da es ein $\rho > 0$ mit $\overline{B_\rho(0)} \subset K$ gibt, erhalten wir $\frac{x}{\frac{1}{\rho}\|x\|} \in K$ für beliebiges $x \in X$, also $p(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$ und damit $F(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$. Ebenso folgt $-F(x) = F(-x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$. Somit ist F stetig und wir erhalten die Behauptung mit $\alpha = 1$ und $\varphi = F$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so fassen wir X als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf und erhalten ein $F_\mathbb{R} \in X^*_\mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Wie beim Beweis des Satzes von Hahn-Banach erhält man die Aussage für $\varphi(x) = F(x) := F_\mathbb{R}(x) - iF_\mathbb{R}(ix)$. □

Theorem 4.1.9 (Trennungssatz für konvexe Mengen)**.** *Sei X ein normierter Raum, A und B konvex, A offen und $A \cap B = \emptyset$. Dann können A, B durch ein $\varphi \in X'$ getrennt werden, d.h.,*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \operatorname{Re}\varphi(y), \quad \forall x \in A, y \in B.$$

Beweis. Setze

$$\begin{aligned} K &= \{x - y \,:\, x \in A, y \in B\} \\ &= \cup_{y \in B}\{x - y \,:\, x \in A\}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass K offen, konvex ist mit $0 \notin K$, da $A \cap B = \emptyset$. Dann wenden wir den obigem Satz 4.1.8 an und erhalten ein $\varphi \in X'$ mit $\operatorname{Re}\varphi(z) < 0$, für alle $z \in K$. Daraus folgt

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \operatorname{Re}\varphi(y), \quad \forall x \in A, y \in B.$$

□

5. Hilberträume

5.1. Hilberträume.

Definition 5.1.1. Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf H ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon H \times H \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle u, u \rangle \geq 0$ für alle $u \in H$; $\langle u, u \rangle = 0$ gilt genau dann, wenn $u = 0$ ist,
(ii) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ sowie $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ für alle $u, v, w \in H$,
(iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ für alle $u, v \in H$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$,
(iv) $\overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$.

Einen $\mathbb{K}$-Vektorraum H mit einem Skalarprodukt nennen wir Skalarproduktraum oder Prähilbertraum.

Beispiele 5.1.2.

(i) Auf $H = \mathbb{K}^n$ mit $x = \left(x^i\right)_{1 \leq i \leq n}, y \in H$ ist

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x^i \overline{y^i}$$

ein Skalarprodukt.

(ii) Auf $H = L^2(\Omega)$ ist
$$\langle f, g\rangle = \int\limits_\Omega f\overline{g}$$
ein Skalarprodukt.

Beachte, dass das Integral aufgrund der Hölderschen Ungleichung wohldefiniert ist, es gilt nämlich
$$\left|\int\limits_\Omega f\overline{g}\right| \le \left(\int |f|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int |g|^2\right)^{1/2}.$$

(iii) Analog sieht man, dass $l^2(\mathbb{N})$ mit $\left\langle \left(x^i\right), \left(y^i\right)\right\rangle := \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i\overline{y^i}$ ein Prähilbertraum ist.

Theorem 5.1.3. *Sei H ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$ eine Norm auf H.*

Auf Skalarprodukträumen wollen wir stets diese Norm verwenden.

Beweis. Lineare Algebra. □

Theorem 5.1.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.**
Sei H ein Skalarproduktraum. Dann gilt $|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$ für alle $u, v \in H$.

Beweis. Lineare Algebra. □

Definition 5.1.5. Ist ein Skalarproduktraum H mit der induzierten Norm/Metrik vollständig, so nennen wir H einen Hilbertraum.

Bemerkung 5.1.6. Sei H ein Skalarproduktraum und $\hat{H}$ die Vervollständigung als normierter Raum. Seien $H \ni u_n \to u \in \hat{H}$ sowie $H \ni v_n \to v \in \hat{H}$. Dann lässt sich das Skarprodukt auf genau eine Art und Weise stetig nach $\hat{H}$ fortsetzen, sodass $\hat{H}$ ein Hilbertraum wird, nämlich durch
$$\langle u, v\rangle_{\hat{V}} := \lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle_V.$$

Lemma 5.1.7 (Parallelogrammgleichung)**.** *Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt*
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$
für alle $u, v \in H$.

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Lemma 5.1.8 (Polarisationsformel)**.** *Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt*
$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2$$
für $\mathbb{R}$-Vektorräume und
$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \equiv \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|x + i^k y\right\|^2$$
für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum und alle $x, y \in H$.

Mit der Polarisationsformel kann man aus der Norm eines Skalarproduktraumes das Skalarprodukt rekonstruieren.

Weiterhin folgt aufgrund der Stetigkeit der Norm, dass die Abbildung $H \times H \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Beweis. Direktes Nachrechnen. Im komplexen Fall ergeben die Terme mit i gerade den Imaginärteil. □

Definition 5.1.9. Sei H ein Prähilbertraum.

(i) Zwei Vektoren $u, v \in H$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v\rangle = 0$ gilt. Wir schreiben $u \perp v$.
(ii) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Vektoren heißt orthonormal, falls $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$ gilt.
(iii) Zwei Unterräume $U_1, U_2 \subset H$ stehen orthogonal aufeinander, $U_1 \perp U_2$, falls $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$ gilt.
(iv) Sei $U \subset H$ beliebig. Dann ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ durch

$$U^\perp := \{v \in H : \langle u, v\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

definiert.

Lemma 5.1.10. *Sei H ein Hilbertraum, $M \subset H$ beliebig.*

(i) Dann ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H.
(ii) Es gilt $M^\perp = (\overline{M})^\perp = \langle M\rangle^\perp$. Auch mehrfaches Bilden der linaren Hülle oder Abschließen verändert das Ergebnis nicht mehr.
(iii) Es gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Beweis.

(i) Sei $y \in H$. Definiere f durch $x \mapsto \langle x, y\rangle$. Da f stetig ist, ist $\{y\}^\perp = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. Wegen $M^\perp := \bigcap\limits_{y\in M} \{y\}^\perp$ ist auch $M^\perp$ abgeschlossen.
Der Nachweis, dass $M^\perp$ ein Unterraum ist, ist einfach.
(ii) Aus $A \subset B$ folgt stets $A^\perp \supset B^\perp$. Also ist nur $M^\perp \subset \left(\overline{M}\right)^\perp$ und $M^\perp \subset \langle M\rangle^\perp$ zu zeigen.
  (a) $M^\perp \subset \left(\overline{M}\right)^\perp$: Seien $x \in M^\perp$ und $y \in \overline{M}$. Dann ist $\langle x, y\rangle = 0$ zu zeigen. Zu y gibt es $y_n \in M$ mit $y_n \to y$. Da das Skalarprodukt stetig ist, folgt aus $0 = \langle x, y_n\rangle$ auch $0 = \langle x, y\rangle$.
  (b) $M^\perp \subset \langle M\rangle^\perp$: Seien $x \in M^\perp$ und $y \in \langle M\rangle$. Dann gibt es endlich viele $m_i \in M$ und $\lambda^i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le N$, mit $y = \sum\limits_{i=1}^N \lambda^i m_i$. Es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle m_i, x\rangle = \langle y, x\rangle.$$

  Die Inklusion folgt.
(iii) Sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann folgt $0 = \langle x, x\rangle$, also $x = 0$. Offensichtlicherweise ist $0 \in M \cap M^\perp$. □

Proposition 5.1.11 (Pythagoras)**.** *Sei H ein Skalarproduktraum. Sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine orthonormale Familie in H. Sei $x \in H$. Dann gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2.$$

Beweis. Schreibe

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i}_{=:u_1} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i}_{=:u_2}.$$

Dann gilt $u_1 \perp u_2$. Also folgt $\|x\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$ durch direktes Ausmultiplizieren. Aufgrund der Orthogonalität der $(x_i)_i$ erhalten wir weiterhin

$$\|u_1\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2.$$

Somit folgt die behauptete Gleichheit. □

Korollar 5.1.12 (Besselsche Ungleichung)**.**
Sei H ein Prähilbertraum und sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine orthonormale Familie in H. Dann folgt

$$\|x\|^2 \ge \sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i\rangle|^2$$

für alle $x \in H$.

Aufgrund der Monotonie der Summe und der gleichmäßigen oberen Schranke $\|x\|^2$ gilt die Ungleichung auch für beliebige, d. h. nicht notwendigerweise endliche, orthonormale Familien in H.

Definition 5.1.13.

(i) Seien H_1, H_2 Prähilberträume. Dann heißt $U \in L(H_1, H_2)$ Isometrie, falls

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in H_1$ gilt.

(ii) Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann heißt eine surjektive Isometrie Hilbertraumisomorphismus oder unitär. Gibt es einen Hilbertraumisomorphismus $U \in L(H_1, H_2)$, so heißen H_1 und H_2 isomorph.

Definition 5.1.14 (Direkte Summe)**.**

(i) Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann definieren wir die direkte Summe als den Vektorraum $H_1 \oplus H_2 := \left\{\left(x^1, x^2\right) : x^1 \in H_1,\, x^2 \in H_2\right\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \left(x^1, x^2\right), \left(u^1, u^2\right)\right\rangle := \left\langle x^1, u^1\right\rangle + \left\langle x^2, u^2\right\rangle.$$

(ii) Seien $(H_i)_{i\in I}$ Hilberträume. Dann definieren wir

$$\bigoplus_{i\in I} H_i := \left\{ \left(x^i\right)_{i\in I} : \sum_{i\in I} \left\|x^i\right\|_{H_i}^2 < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \left(x^i\right), \left(y^i\right)\right\rangle := \sum_{i\in I} \left\langle x^i, y^i\right\rangle.$$

Bemerkung 5.1.15.

(i) Die direkte Summe von Hilberträumen ist wieder ein Hilbertraum. Bei der unendlichen direkten Summe geht man dabei analog zum Beweis für $l^2(\mathbb{N})$ vor um die Vollständigkeit nachzuweisen.

(ii) In der (Linearen) Algebra fordert man, dass nur in endlich vielen Komponenten ein von Null verschiedener Eintrag stehen darf. Hier bekommt man mit einer solchen Forderung i. a. keinen vollständigen Raum. Nach Definition können aber höchstens abzählbar viele Einträge von Null verschieden sein; sonst konvergiert die Summe nicht.

(iii) Den Nachweis, dass die unendliche Summe, mit der wir das Skalarprodukt definieren, existiert, führt man wie bei l^2 oder L^2.

(iv) Versieht man die l^2-Norm mit Gewichten, betrachtet also $\sum\limits_{i\in I} a_i\langle x_i, y_i\rangle$ für $a_i > 0$, so bekommt man i. a. nicht isomorphe Hilberträume.

5.2. **Projektion auf konvexe Teilmengen.**

Definition 5.2.1 (Konvexität)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $K \subset V$ konvex, falls für alle $x, y \in K$ und alle $t \in [0,1]$ auch

$$tx + (1-t)y \in K$$

gilt.

Theorem 5.2.2 (Projektion auf konvexe Teilmengen)**.**
Sei H ein Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $y_0 \in H$. Dann gibt es ein nächstes Element $x_0 \in K$, d. h. ein $x_0 \in K$ mit $\|y_0 - x_0\| \le \|y_0 - x\|$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wir benutzen die sogenannte direkte Methode der Variationsrechnung. Ohne Einschränkung Sei $y_0 = 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge in K für die Funktion $K \ni x \mapsto \|x\|$, gelte also $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \inf\limits_{x\in K} \|x\| =: d$. Zunächst wollen wir nachweisen, dass x_n eine Cauchyfolge ist. Aufgrund der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\Big\|\underbrace{\frac{x_n + x_m}{2}}_{\in K}\Big\|^2 \\ &\le 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2 \to 0\end{aligned}$$

für $\min\{m,n\} \to \infty$. Da K als abgeschlossene Teilmenge von H vollständig ist, existiert $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ in K. Da die Norm auf H stetig ist, folgt $\|x_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = d$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\hat{x}_0 \in K$ ein weiteres nächstes Element. Da wir gezeigt haben, dass jede Minimalfolge eine Cauchyfolge ist, gilt dies auch für die Folge

$$z_n := \begin{cases} x_0 & \text{für gerades n,} \\ \hat{x}_0 & \text{für ungerades n.} \end{cases}$$

Somit folgt $x_0 = \hat{x}_0$. □

Lemma 5.2.3. *Sei H ein Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $\pi \colon H \to K$ die Abbildung, die $x \in H$ den Punkt $p \in K$ mit $\|x - p\| = \inf\limits_{q\in K} \|x - q\|$ zuordnet. Dann ist π stetig.*

Beweis. Sei $x \in H$. Setze $d(x) := d(x, K) = \inf\limits_{y\in K} \|x - y\| = \|x - \pi(x)\|$. Dann ist d stetig: Es gilt nämlich für $x, y \in H$ zunächst $d(y) = \|y - \pi(y)\| \le \|y - \pi(x)\|$ und damit folgt

$$d(y) - d(x) \le \|y - \pi(x)\| - \|x - \pi(x)\| \le \|(y - \pi(x)) - (x - \pi(x))\| = \|x - y\|.$$

Aus Symmetriegründen folgt die Stetigkeit.

Angenommen, π ist nicht stetig. Dann gibt es zu K einen Punkt, ohne Einschränkung nach Verschiebung der Situation den Nullpunkt, ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $x_n \to 0$ mit $\|\pi(x_n) - \pi(0)\| > \varepsilon$. Nehme an, dass $\|0 - \pi(0)\| = r > 0$ ist; sonst folgt $0 \in K$, $\pi(0) = 0$, $d(0) = 0$ und damit $d(x_n) \to 0$ für $x_n \to 0$, also auch $\pi(x_n) \to 0$.

Die Idee ist nun, auszunutzen, dass $\pi(0)$ und $\pi(x_n)$ beinahe auf einer Sphäre mit Radius r liegen, aber ihr Mittelpunkt, der aufgrund der Konvexität ebenfalls in K liegt, näher liegt, woraus wir einen Widerspruch erhalten.

Da $x \mapsto \|x - \pi(x)\|$ stetig ist, folgt $\|x_n - \pi(x_n)\| \to r$ für $n \to \infty$. Wir erhalten also mit der Parallelogrammgleichung

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Wir wenden dies mit $x = \pi(0)$ und $y = \pi(x_n)$ an und erhalten wegen $\frac{\pi(0)+\pi(x_n)}{2} \in K$

$$\begin{aligned} r^2 = d(0)^2 &\le \left\| 0 - \frac{\pi(0) + \pi(x_n)}{2} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\pi(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|\pi(x_n)\|^2 - \frac{1}{4}\|\pi(0) - \pi(x_n)\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}d(0)^2 + \frac{1}{2}\left(\|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\|\right)^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \\ &= \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\|\pi(x_n) - x_n\|^2}_{=d(x_n)^2 \to r^2} + \underbrace{\|x_n\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|\pi(x_n) - x_n\|}_{\to r} + \frac{1}{2}\underbrace{\|x_n\|^2}_{\to 0} - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \\ &\to r^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Widerspruch. ☐

Zu Theorem 5.2.2 erhalten wir

Korollar 5.2.4. *Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann können wir jeden Vektor $z \in H$ eindeutig als $z = x + y$ mit $x \in M$ und $y \in M^\perp$ schreiben, d. h. es gilt $H = M \oplus M^\perp$.*

Aus der Konstruktion und Lemma 5.2.3 erhalten wir, dass (x, y) stetig von z abhängt.

Im nachfolgenden Beweis und gegebenenfalls später notieren wir manchmal nur den Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn sich der Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ leicht aus dem Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ablesen lässt.

Beweis. Sei $z \in H$. Sei $x \in M$ der Punkt in M mit minimalem Abstand zu z. Solch ein x existiert nach Theorem 5.2.2. Setze $y := z - x$.

Wir behaupten, dass $y \in M^\perp$ ist. Nach Definition von x folgt

$$\|z - x\|^2 \le \|z - x + \lambda u\|^2 = \|z - x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle u, z - x\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $u \in M$. Aus $0 \le \operatorname{Re}(\lambda\langle u, z - x\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2$ folgt für reelle λ, dass $0 = \operatorname{Re}(\langle u, z - x\rangle)$ und für $\lambda = -it$, $t \in \mathbb{R}$, dass $0 = \operatorname{Im}(\langle u, z - x\rangle)$ gilt. Also ist $y \in M^\perp$.

Zur Eindeutigkeit: Gelte $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ mit $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M^\perp$. Dann folgt $M \ni x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in M^\perp$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ erhalten wir hieraus $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. ☐

Theorem 5.2.5 (Riesz)**.** *Sei X ein Hilbertraum und $T \in X^*$. Dann existiert genau ein $x_T \in X$ mit*

$$Tx = \langle x, x_T\rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

Es gilt $\|T\| = \|x_T\|$. Die Abbildung $I\colon X^* \to X$ mit $T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d. h. bis auf komplexes Konjugieren von Skalaren linear).

Beweis.

(i) Konstruktion von x_T: $M := N(T) = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen. Also ist $X = M \oplus M^\perp$ nach Theorem 5.2.4. Im Falle $M = X$ setzen wir $x_T := 0$. Gelte daher ab jetzt $M \neq X$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$. Dann folgt $Ty \neq 0$. Definiere $x_T := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y$. Wir erhalten $\|x_T\| = \frac{|Ty|}{\|y\|} \neq 0$ und damit $Tx_T = \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot Ty = \|x_T\|^2 \neq 0$.

Behauptung: Es gilt $Tx = \langle x, x_T\rangle$ für alle $x \in X$. Wir schreiben

$$x = \frac{Tx}{Tx_T}x_T + \left(x - \frac{Tx}{Tx_T}x_T\right) =: x_\perp + x_M.$$

Die Notation legt nahe, dass $x_\perp \in M^\perp$ und $x_M \in M$ gelten. Die erste Behauptung ist klar, die zweite folgt aus

$$Tx_M = T\left(x - \frac{Tx}{Tx_T}x_T\right) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T}Tx_T = 0$$

nach Definition von M. Wir erhalten aus den obigen Rechnungen

$$\langle x, x_T\rangle = \langle x_\perp + x_M, x_T\rangle = \frac{Tx}{Tx_T}\|x_T\|^2 + 0 = \frac{Tx}{Tx_T}Tx_T = Tx.$$

(ii) $I\colon T \mapsto x_T$ ist eine Isometrie: Es gilt $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}|Tx| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}|\langle x, x_T\rangle| \le \|x_T\|$ sowie $\|T\| \ge \left|T\left(\frac{x_T}{\|x_T\|}\right)\right| = \|x_T\|$ aufgrund der obigen Rechnungen.

(iii) x_T ist eindeutig bestimmt: Für ein weiteres $\tilde{x}_T$ mit $Tx = \langle x, x_T\rangle = \langle x, \tilde{x}_T\rangle$ für alle x folgt $0 = \langle x, x_T - \tilde{x}_T\rangle$ für alle x; wir wählen $x = x_T - \tilde{x}_T$ und erhalten $x_T = \tilde{x}_T$.

(iv) I ist konjugiert linear: Für $T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ erhalten wir

$$Tx = \lambda_1 T_1 x + \lambda_2 T_2 x = \lambda_1\langle x, x_{T_1}\rangle + \lambda_2\langle x, x_{T_2}\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda_1}x_{T_1} + \overline{\lambda_2}x_{T_2}\right\rangle$$

und daher $IT = x_T = \overline{\lambda_1}x_{T_1} + \overline{\lambda_2}x_{T_2} = \overline{\lambda_1}IT_1 + \overline{\lambda_2}IT_2$.

(v) I ist surjektiv: Zu $y \in X$ ist durch $Tx := \langle x, y\rangle$ ein lineares Funktional mit $IT = y$ definiert.

(vi) I ist injektiv, da $\|T\| = \|x_T\|$ gilt. □

6. Der Bairesche Kategoriesatz

6.1. **Der Bairesche Kategoriesatz und Anwendungen.**

Definition 6.1.1. Sei E ein metrischer Raum.

(i) Eine Menge $A \subset E$ heißt nirgends dicht, falls $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ gilt.

(ii) Eine Menge $A \subset E$, die sich als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen schreiben läßt, heißt von erster Kategorie oder mager.

(iii) Eine Menge $A \subset E$, die nicht von erster Kategorie ist, heißt von zweiter Kategorie oder fett.

Beispiele 6.1.2.

(i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist von erster Kategorie.

(ii) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ ist aufgrund des (nachfolgend bewiesenen) Baireschen Kategoriesatzes von zweiter Kategorie, denn sonst wäre $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ als abzählbare Vereinigung von mageren Mengen darstellbar.

Theorem 6.1.3 (Bairescher Kategoriesatz)**.** *Sei E ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset E$ mager. Dann ist $E \setminus A$ dicht in E. Insbesondere ist E eine Menge zweiter Kategorie.*

Beweis.

(i) Da A eine Menge erster Kategorie ist, gibt es Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{mit} \quad \mathring{\overline{A_n}} = \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass alle Mengen A_n abgeschlossen sind, sonst ersetzen wir sie durch $\overline{A_n}$. Definiere $G_n := E \setminus A_n \equiv \complement A_n$. Dann sind die Mengen G_n offen. Setze

$$G := \complement A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Sei nun $\emptyset \neq \Omega \subset E$ offen. Wir behaupten, dass $G \cap \Omega \neq \emptyset$ gilt.

(ii) Wir konstruieren eine Folge von offenen Kugeln B_n mit $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \subset \overline{B_n} \subset \Omega \cap G_n$ für alle n mit $\operatorname{diam} B_n \to 0$. Aus der Vollständigkeit von E folgt dann
$$\emptyset \neq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B_k} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega \cap G_n \subset \Omega \cap G.$$
Hieraus erhalten wir den Baireschen Kategoriesatz.

(iii) Konstruktion der Kugeln B_n: Da jede der Mengen A_n abgeschlossen und nirgends dicht ist, ist der Schnitt einer beliebigen offenen Menge mit G_n offen und nicht leer.

Somit gibt es zur offenen Menge Ω eine Kugel B_0 mit $\operatorname{diam} B_0 < 1/0 = \infty$ und $\overline{B_0} \subset \Omega \cap G_0$. Zu B_0 gibt es eine Kugel B_1 mit $\operatorname{diam}(B_1) < 1/1$ und $\overline{B_1} \subset B_0 \cap G_1$. ... Zu B_i gibt es eine Kugel B_{i+1} mit $\operatorname{diam}(B_{i+1}) < \frac{1}{i+1}$ und $\overline{B_{i+1}} \subset B_i \cap G_{i+1}$. ... Somit sind die oben verwendeten Kugeln konstruiert. □

Korollar 6.1.4. *Sei (E,d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der Durchschnitt einer abzählbaren Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von dichten offenen Teilmengen von E wieder dicht in E.*

Beweis. Falls nicht, so gibt es $r > 0$ und $x \in E$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \complement \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Die Mengen $C_n := \complement A_n \cap \overline{B_r(x)}$ sind abgeschlossen und erfüllen $\mathring{C}_n = \emptyset$. Aus $\overline{B_r(x)} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ erhalten wir einen Widerspruch zum Baireschen Kategoriesatz. □

Die Bezeichnungen „Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit“ und „Satz von Banach-Steinhaus“ sind in der Literatur nicht klar getrennt.

Theorem 6.1.5 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie in $L(E,F)$, die punktweise beschränkt ist, d. h. es gibt für alle $x \in E$ ein $c(x) > 0$ mit*
$$\sup_{i\in I} \|A_i x\| \le c(x).$$
Dann ist die Familie gleichmäßig beschränkt, d. h. es gibt ein $C > 0$ mit
$$\sup_{i\in I} \|A_i\| \le C.$$

Beweis. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir
$$W_n := \left\{ x \in E\colon \sup_{i\in I} \|A_i x\| \le n \right\} = \bigcap_{i\in I} \underbrace{\{x \in E\colon \|A_i x\| \le n\}}_{=\text{ abgeschlossen}}.$$
W_n ist als Schnitt von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen. Nach Voraussetzung gilt $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Nach dem Baireschen Kategoriesatz gibt es somit ein W_n mit $\mathring{W}_n \neq \emptyset$. Also gibt es $x_0 \in E$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(x_0) \subset W_n$ und
$$\sup_{i\in I} \sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|A_i x\| \le n.$$
Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $i \in I$
$$n \ge \sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|A_i x\| = \sup_{y\in B_\rho(0)} \|A_i(y + x_0)\| \ge \underbrace{\sup_{y\in B_\rho(0)} \|A_i y\|}_{=\rho\|A_i\|} - \underbrace{\|A_i x_0\|}_{\le c(x_0)}.$$
Umordnen liefert die behauptete in $i \in I$ gleichmäßige Schranke für $\|A_i\|$. □

Als direkte Folgerung erhalten wir

Theorem 6.1.6 (Banach-Steinhaus)**.** *Sei E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen $A_i \in L(E,F)$, die punktweise beschränkt ist. Dann ist $(A_i)_{i\in I}$ gleichmäßig stetig (d. h. δ in der üblichen Definition von Stetigkeit hängt nur von ε und x_0 ab). (Aufgrund der Linearität ist die Familie sogar gleichmäßig gleichgradig stetig, d. h. δ hängt auch nicht mehr von x_0 ab.)*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $i \in I$ und alle $x, y \in E$ mit $\|x-y\| < \delta$ auch $\|A_i x - A_i y\| < \varepsilon$ gilt. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es ein $c > 0$ mit $\|A_i\| \le c$ für alle i. Aus $\|A_i x - A_i y\| = \|A_i(x-y)\| \le \|A_i\| \cdot \|x-y\| \le c \cdot \|x-y\|$ sehen wir, dass die Behauptung folgt, wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$ wählen. □

Eine weitere Folgerung ist

Proposition 6.1.7. *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(E,F)$. Sei $A\colon E \to F$ eine Abbildung. Nehme an, dass $A_n x \to Ax$ für $n \to \infty$ gilt. (Die A_n's konvergieren also punktweise gegen A.) Dann ist $A \in L(E,F)$ und es gilt*

$$\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| < \infty.$$

Beweis. Es ist einfach zu sehen, dass A wieder eine lineare Abbildung ist. Wir benutzen die punktweise Konvergenz, die punktweise Beschränktheit impliziert und den Satz über die gleichmäßige Beschränktheit und erhalten

$$\liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty.$$

Weiterhin gilt

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \liminf_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|x\|.$$

Hieraus folgt $\|A\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$. □

Theorem 6.1.8 (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Seien E, F Banachräume. Dann ist jede surjektive Abbildung $A \in L(E,F)$ offen.*

Elementar einzusehen ist, dass jede offene Abbildung $A \in L(E,F)$ auch surjektiv ist.

Beweis.

(i) Wir bezeichnen Kugeln in E mit $B^E_r(x)$, Kugeln in F mit $B^F_r(y)$. Zunächst wollen wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r > 0$ mit $B^F_r(0) \subset \overline{A\left(B^E_{2\varepsilon}(0)\right)}$ gibt: Fixiere $\varepsilon > 0$. Dann gilt $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} nB^E_\varepsilon(0)$. Da A surjektiv ist, gilt

$$F = A(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA\left(B^E_\varepsilon(0)\right).$$

Da F ein Banachraum ist, ist F ein Raum zweiter Kategorie. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{\overline{n_0 A\left(B^E_\varepsilon(0)\right)}} = n_0 \overset{\circ}{\overline{A\left(B^E_\varepsilon(0)\right)}} \ne \emptyset$. Also gilt auch $\overset{\circ}{\overline{A\left(B^E_\varepsilon(0)\right)}} \ne \emptyset$. Es gibt also $x_0 \in B^E_\varepsilon(0)$ und $r > 0$ mit $B^F_r(0) + Ax_0 \equiv B^F_r(Ax_0) \subset \overline{A\left(B^E_\varepsilon(0)\right)}$. Es folgt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$B^F_r(0) = B^F_r(Ax_0) - \underbrace{Ax_0}_{\in A(B^E_\varepsilon(0))} \subset \overline{A\left(B^E_{2\varepsilon}(0)\right)}.$$

Bis auf die Tatsache, dass auf der rechten Seite der Abschluss von $A\left(B^E_{2\varepsilon}(0)\right)$ und nicht $A\left(B^E_{2\varepsilon}(0)\right)$ selbst steht, zeigt dies die Behauptung.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon_i := \frac{\varepsilon}{2^i}$ für $i \in \mathbb{N}^+$. Dann gibt es nach Teil (i) eine Folge $r_i > 0$ mit $B^F_{r_i}(0) \subset \overline{A\left(B^E_{\varepsilon_i}(0)\right)}$. Ohne Einschränkung können wir r_i als (monotone) Nullfolge wählen. Wir behaupten, dass $B^F_{r_1}(0) \subset A\left(B^E_{\varepsilon}(0)\right)$ gilt:

Sei $y \in B^F_{r_1}(0)$. Wegen $y \in B^F_{r_1}(0)$ und $B^F_{r_1}(0) \subset \overline{A\left(B^E_{\varepsilon_1}(0)\right)}$ gibt es ein $x_1 \in B^E_{\varepsilon_1}(0)$ mit $\|y - Ax_1\| < r_2$ (statt r_2 könnte man dies auch mit jeder anderen positiven Zahl erreichen). Nun ist $y - Ax_1 \in B^F_{r_2}(0)$ und $B^F_{r_2}(0) \subset \overline{A\left(B^E_{\varepsilon_2}(0)\right)}$. Somit gibt es $x_2 \in B^E_{\varepsilon_2}(0)$ mit $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < r_3$. Iterativ finden wir x_i's mit

$$\left\| y - A\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\| < r_{n+1}$$

für $n \geq 1$. Wegen $\|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$ ist die Reihe $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i =: x$ absolut konvergent und es gilt $\|x\| < \varepsilon$. Außerdem gilt $y = Ax$. Die Behauptung folgt.

(iii) Sei $\emptyset \neq \Omega \subset E$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$, so dass $B^E_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ gilt. Wir haben gezeigt, dass es $r > 0$ mit $B^F_r(0) \subset A\left(B^E_\varepsilon(0)\right)$ gibt. Somit erhalten wir

$$B^F_r(Ax_0) = Ax_0 + B^F_r(0) \subset Ax_0 + A\left(B^E_\varepsilon(0)\right) = A\left(B^E_\varepsilon(x_0)\right) \subset A(\Omega).$$

Die Behauptung folgt, da Ax_0 ein beliebiger Punkt in $A(\Omega)$ ist. □

Korollar 6.1.9 (Satz von der inversen Abbildung)**.** *Seien E, F Banachräume. Sei $A \in L(E, F)$ bijektiv. Dann ist A ein Homöomorphismus.*

Zu Korollar 6.1.9 erhalten wir

Korollar 6.1.10. *Seien $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ und $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume mit*

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$$

für alle $x \in X$ und ein $c > 0$. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d. h. es gibt $C > 0$ mit $\frac{1}{C}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $X_2 \ni x \mapsto x \in X_1$ stetig. Die Behauptung folgt also aus Korollar 6.1.9. □

Lemma 6.1.11. *Sei X ein Banachraum, sei Y ein normierter Raum und sei $T \colon X \to Y$ ein Isomorphismus normierter Räume, d. h. T ist linear, bijektiv und die Operatoren T und T^{-1} sind stetig. Dann ist auch Y ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Dann ist aufgrund der Stetigkeit auch $(T^{-1}y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Also gibt es $x \in X$ mit $T^{-1}y_n \to x$. Nochmals aufgrund der Stetigkeit folgt $y_n \to Tx \in Y$. Somit ist Y ein Banachraum. □

6.2. **Dicht definierte Operatoren.**

Bemerkung 6.2.1. Sei $X := C^0([0, 2\pi])$. Definiere auf $C^1([0, 2\pi]) \equiv D(\partial) \subset X$ den Ableitungsoperator $\partial \colon D(\partial) \to X$. Wegen $\|\partial(x \mapsto 1/n \sin(nx))\|_{C^0} = 1$ ist $\partial \colon D(\partial) \to X$ nicht stetig. Daher betrachtet man in der Funktionalanalysis auch Operatoren, die nicht auf dem gesamten Banachraum, sondern lediglich auf einer dichten Teilmenge definiert sind.

Wir schreiben $D(T)$ für den Unterraum, auf dem ein linearer Operator T definiert ist.

Definition 6.2.2. Seien X, Y normierte Räume, $D(T) \subset X$ ein linearer Teilraum und $T \colon D(T) \to Y$ linear.

(i) Dann heißt $G(T) := \{(x, Tx) \colon x \in D(T)\}$ der Graph von T.
(ii) T heißt abgeschlossen, falls $G(T) \subset X \oplus Y$ abgeschlossen ist.
(iii) T heißt abschließbar, falls es einen Operator $\overline{T}$ mit $G\left(\overline{T}\right) = \overline{G(T)}$ gibt.

Lemma 6.2.3. *Seien X, Y Banachräume.*

(i) Sei $T: D(T) \to Y$ ein (auf einem linearen Teilraum $D(T)$ definierter) linearer Operator. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $x_n \in D(T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ für ein $y \in Y$ folgt, dass $x \in D(T)$ und $Tx = y$ gelten.
(ii) Sei $T \in L(X, Y)$. Dann ist T abgeschlossen.

Beweis.
(i) Klar.
(ii) Sei $x_n \to x$ eine Folge mit $Tx_n \to y$. Dann gilt $Tx_n \to Tx$ aufgrund der Stetigkeit, also $Tx = y$. Somit ist T nach (i) abgeschlossen. □

Lemma 6.2.4. *Seien X, Y Banachräume und $T: D(T) \to Y$ ein auf einem linearen Teilraum $D(T) \subset X$ definierter linearer Operator. Dann definiert*

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

auf $D(T)$ eine Norm, die Graphennorm. Der Raum $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn der Operator T abgeschlossen ist.

Beweis.
„$\Longleftarrow$“: Sei T abgeschlossen. Sei $x_n \in D(T)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_T$. Dann sind x_n und Tx_n Cauchyfolgen in X bzw. Y, es gibt also – da X und Y Banachräume sind – $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x_n \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_X$ und $Tx_n \to y$ bezüglich $\|\cdot\|_Y$. Nach Lemma 6.2.3 erhalten wir $x \in D(T)$ und $Tx = y$. Somit folgt $x_n \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_T$, $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist also ein Banachraum.

„$\Longrightarrow$“: Sei $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum. Sei (x_n, Tx_n) eine Cauchyfolge in $G(T)$. Wegen $\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y$ ist x_n eine Cauchyfolge in $(D(T), \|\cdot\|_T)$, besitzt also einen Grenzwert $x \in D(T)$ mit $\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - Tx\|_Y \to 0$ für $n \to \infty$. Somit gilt $(x_n, T_n) \to (x, Tx) \in G(T)$, $G(T)$ ist also abgeschlossen. □

Lemma 6.2.5. *Seien X, Y Banachräume, $D(T) \subset X$ ein Unterraum und der lineare Operator $T: D(T) \to Y$ sei abgeschlossen. Dann sind die Aussagen*

(i) es gibt ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in D(T)$ und
(ii) T ist injektiv und $R(T) = \operatorname{im}(T)$ ist abgeschlossen

äquivalent.

Beweis.
„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Wir benutzen die Graphennorm $\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ für $x \in X$.

Der Operator $\tilde{T}: (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ mit $\tilde{T}x := Tx$ ist nach Definition surjektiv und nach (i) injektiv. Es gilt $\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y \equiv \|x\|_T$ für alle $x \in D(T)$. Somit ist $\tilde{T}$ stetig mit Operatornorm $\left\|\tilde{T}\right\| \leq 1$. $\tilde{T}^{-1}$ existiert und ist nach (i) wegen $2\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X + \|Tx\|_Y \geq \min\{c, 1\} \cdot \|x\|_T$ stetig. Somit ist $\tilde{T}: (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ ein Isomorphismus normierter Räume. Nach Lemma 6.2.4 ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum, da T nach Voraussetzung abgeschlossen ist. Nach Lemma 6.1.11 ist also auch $(R(T), \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum und damit insbesondere als Teilmenge von Y abgeschlossen.

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Folgt direkt aus Theorem 6.2.6 (ii), angewandt auf $\hat{T}: D(T) \to R(T)$ mit $\hat{T}x := Tx$. □

Theorem 6.2.6 (Stetigkeit der Inversen)**.** *Seien X, Y Banachräume, $D(T) \subset X$ ein linearer Teilraum. Sei $T: D(T) \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator.*

(i) Sei T surjektiv. Dann ist T eine offene Abbildung.
(ii) Ist T bijektiv, so ist $T^{-1}: Y \to D(T)$ stetig.

Beweis.

(i) Da T abgeschlossen ist, ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ nach Lemma 6.2.4 ein Banachraum. Wegen $\|Tx\|_Y \le \|Tx\|_Y + \|x\|_X \equiv \|x\|_T$ ist $\tilde{T}\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $\tilde{T}x := Tx$ stetig mit Operatornorm ≤ 1.

Sei nun $U \subset D(T)$ bezüglich $\|\cdot\|_X$ offen. Da $\|\cdot\|_T$ auf $D(T)$ eine feinere Topologie als $\|\cdot\|_X$ erzeugt, ist $U \subset D(T)$ auch bezüglich $\|\cdot\|_T$ offen. Somit ist $\tilde{T}U = TU \subset Y$ nach dem Satz von der offenen Abbildung, Theorem 6.1.8, offen.

(ii) Die Offenheit impliziert gerade, dass T^{-1} stetig ist. □

Theorem 6.2.7 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien E, F Banachräume. Sei $A\colon E \to F$ linear. Dann ist A genau dann stetig, wenn* $\operatorname{graph} A \subset E \times F$ *abgeschlossen ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: (Dies haben wir bereits in Lemma 6.2.3 (ii) gezeigt.) Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\operatorname{graph} A$. Es gilt $y_n = Ax_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine Cauchyfolge. Da E ein Banachraum ist, gibt es ein $x \in E$ mit $x_n \to x$. Da A stetig ist, folgt $y_n = Ax_n \to Ax$. Somit folgt $(x_n, y_n) \to (x, Ax) \in \operatorname{graph} A$ und $\operatorname{graph} A$ ist abgeschlossen.

„$\Longleftarrow$“: $G := \operatorname{graph} A \equiv G(A) \subset E \oplus F$ ist ein linearer Teilraum. Da G abgeschlossen ist, ist G mit der von $E \oplus F$ induzierten Norm ein Banachraum. Seien $\pi_E\colon E \times F \to E$ und $\pi_F\colon E \times F \to F$ die (stetigen) Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. Die Einschränkung $\pi_E|_G\colon G \to E$ ist linear und stetig. $\pi_E|_G$ ist die Abbildung $(x, Ax) \mapsto x$. Daher ist $\pi_E|_G$ bijektiv und somit nach Korollar 6.1.9 ein Homöomorphismus. Daher ist $A = \pi_F \circ (\pi_E|_G)^{-1}$ stetig. □

Theorem 6.2.8 (Satz von Hellinger-Toeplitz)**.** *Sei X ein Hilbertraum und*

$$T\colon X \to X$$

ein linearer Operator. Gelte

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

für alle $x, y \in X$. Dann ist T stetig.

Derselbe Beweis funktioniert auch, wenn auf der rechten Seite ein Operator $S\colon X \to X$ steht.

Beweis. Wir weisen nach dass $G(T) \subset X \oplus X$ abgeschlossen ist. Dann folgt die Stetigkeit aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Gelte $G(T) \ni (x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Zeige, dass $(x, y) \in G(T)$ ist. Sei $z \in X$ beliebig. Dann folgt, da das Skalarprodukt stetig ist,

$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, z\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Tz\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tz\right\rangle \\ &= \langle x, Tz\rangle = \langle Tx, z\rangle.\end{aligned}$$

Aus $\langle Tx - y, z\rangle = 0$ für alle $z \in X$ folgt mit $z = Tx - y$ dass $Tx = y$ gilt. □