(iv) Sei nun $\delta > 0$. Da Ω beschränkt ist, existieren endlich viele Punkte $x_i^0 \in \partial\Omega$ und Radien $r_i > 0$, so dass $V_i = \Omega \cap B_{r_i/2}(x_i^0)$ wie in (i) ist und $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i/2}(x_i^0)$ gilt. Wie oben gezeigt, gibt es also $v_i \in C^\infty\left(\overline{V}_i\right)$ mit $\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \le \delta$. Wähle noch $V_0 \Subset \Omega$, so dass $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N V_i$ gilt. Nach Theorem 8.2.1 gibt es $v_0 \in C^\infty\left(\overline{V}_0\right)$ mit $\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \le \delta$.

(v) Sei nun ζ_i eine den Mengen V_i untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Definiere $v := \sum_{i=0}^N \zeta_i v_i$. Es gilt $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &= \left\|\sum_{i=0}^N D^\alpha(\zeta_i v_i) - \sum_{i=0}^N D^\alpha(\zeta_i u)\right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \\ &\le c \cdot \sum_{i=0}^N \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \\ &\le c \cdot (N+1)\delta,\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt benutzt haben, dass die Ableitungen der Funktionen ζ_i gleichmäßig beschränkt sind. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 8.2.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $1 \le p < \infty$ ist $(W^{1,p} \cap C^\infty)(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ (Satz 8.2.3). Dagegen ist i.a. $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.

Wir wiederholen die Definitionen von $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$ (Definition 8.1.7).

Definition 8.2.7.

(i) Wir definieren

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt.

(ii) $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$ is separabel für $1 \le p < \infty$ und reflexiv für $1 < p < \infty$.

8.3. **Anwendungen.**

Als eine Folgerung von Darstellungssatz von Riesz (Satz 5.2.5) haben wir

Theorem 8.3.1 (Darstellung von Bilinearformen)**.** *Sei $B : X \times X \to \mathbb{K}$ beschränkte Sesquilinearform auf dem Hilbertraum X, d.h., für alle $x, y, z \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

(i) $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x,z) + \beta B(y,z)$

(ii) $B(z, \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} B(z,x) + \bar{\beta} B(z,x)$

mit $\|B\| = \sup_{\|x\|,\|y\|=1} |B(x,y)| < \infty$*. Dann gibt es genau ein* $T = T_B \in L(X,X)$ *mit*

$$B(x,y) = \langle Tx, y\rangle \text{ für alle } x, y \in X.$$

Außerdem gilt $\|T\| = \|B\|$*.*

Korollar 8.3.2 (Satz von Lax-Milgram)**.** *Sei $B : X \times X \to \mathbb{K}$ beschränkte Bilinearform auf dem reellen Hilbertraum X, und B sei koerziv:*

$$B(x,x) \geq \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \in X, \text{ mit einem } \lambda > 0.$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{R}_B : X \to X^*, \quad (\mathcal{R}_B y)(x) = B(x,y)$$

invertierbar (insbesondere surjektiv) und

$$\|\mathcal{R}_B^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Zusatz. Sei B symmetrisch. Dann ist $\mathcal{R}_B^{-1}\varphi = y_0$ die eindeutig bestimmte Minimalstelle des Funktionals

$$Q(y) = \frac{1}{2}B(y,y) - \varphi(y).$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$, $a = (a_{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq n}$ und sei L ein Operator

$$Lv = -\operatorname{div}(aDv) = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\alpha(a_{\alpha\beta}\partial_\beta v).$$

Definition 8.3.3. Die L zugeordnete Bilinearform auf dem Hilbertraum $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist

$$B(u,v) = \int_\Omega \langle Du, aDv\rangle = \int_\Omega a_{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta v$$

B ist beschränkte.

Definition 8.3.4. Wir fassen L auf als Operator

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)', \quad (Lu)(v) = \int_\Omega a_{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta v = B(u,v).$$

L ist stetig.

Wir interessieren uns nun dafür, ob L surjektiv ist. Wir wollen den Satz von Lax-Milgram verwenden.

Frage: ist B koerziv auf $W_0^{1,2}(\Omega)$?

Theorem 8.3.5 (Poincaré-Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $1 \leq p < \infty$ gilt*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d\|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

mit $d = \operatorname{diam}\Omega$.

Lemma 8.3.6. *Sei L elliptisch mit Konstante $\mu > 0$, d.h.,*

$$\langle \xi, a(x)\xi\rangle \geq \mu|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist die zugeordnete Bilinearform B auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ koerziv mit Konstante $\lambda = \frac{\mu}{(1+d)^2}$, $d = \operatorname{diam}\Omega$.

Theorem 8.3.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ sei elliptisch mit Konstante $\mu > 0$. Dann ist $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ invertierbar und $\|L^{-1}\| \leq \frac{(1+d)^2}{\mu}$.*

Beispiel 8.3.8. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Definiere $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$,

$$\varphi(u) = \int fu.$$

Es ist leicht zu zeigen $\|\varphi\| \leq \|f\|_{L^2}$. Sei $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ Lösung von $Lv = \varphi$. Dann gilt

$$\int \langle Du, aDv\rangle = \int fu \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

mit $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{(1+d)^2}{\mu}\|f\|_{L^2}.$$

v heißt schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lv = f \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beispiel 8.3.9. Sei $g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Definiere $\gamma \in W_0^{1,2}(\Omega)'$

$$\gamma(u) = -\int_\Omega \langle Du, g\rangle.$$

Man kann zeigen, dass gilt $\|\gamma\| \leq \|g\|_{L^2}$. Sei $v \in W^{1,2}(\Omega)$ Lösung von $Lv = \gamma$. Wir haben

$$\|v\|_{W^{1,2}} \leq \frac{(1+d)^2}{\mu}\|g\|_{L^2}$$

und

$$\int \langle Du, aDv\rangle = -\int \langle Du, g\rangle, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

v ist schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lv = \operatorname{div} g \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

9. Kompakte Operatoren und Fredholmoperatoren

Motivation: Operator $L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ $L_0 v = -\operatorname{div}(aDv)$ wie in Subsection 8.3.

$$Kv = -\operatorname{div}(bv) + \langle c, Dv\rangle + qv = \text{Terme niederer Ordnung}$$

oder

$$(Kv)(u) = \int_\Omega (\langle b, Du\rangle v + \langle c, Dv\rangle u + quv).$$

L_0 ist Isomorphismus (Satz von Lax-Milgram). Dagegen ist L aber i.a. kein Isomorphismus.

Beispiel 9.0.10. $Lu = -u'' + u$ auf $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist weder injektiv noch surjektive.

9.1. **Kompakte Operatoren.**

Definition 9.1.1. Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X,Y)$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $\{x_n\} \subset X$ die Folge $\{Kx_n\}$ eine konvergente Teilfolge hat. Wir bezeichnen den Vektorraum der kompakten Operatoren mit $K(X,Y) \subset L(X,Y)$.

Lemma 9.1.2. *Für $K \in L(X,Y)$ sind äquivalent:*
(1) K ist kompakt.
(2) $K(M)$ ist relativ kompakt in Y für jede beschränkte Menge $M \subset X$.
(3) Falls X reflexiv: K ist vollstetig, d.h., $x_n \rightharpoonup x$ schwach in $X \implies Kx_n \to Kx$ stark in Y.

Beispiel 9.1.3. (1) $K \in L(X,Y)$ mit $\dim \operatorname{Bild} K < \infty \implies K$ kompakt.
(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. Inklusion $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ ist kompakt.
(3) $\mathbb{I} \in L(X,X)$ ist nicht kompakt, fall $\dim X = \infty$

Lemma 9.1.4. *Die kompakten Operatoren $K(X,Y)$ bilden einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$.*

Theorem 9.1.5. *(1) Bei Verkettung gilt:*
stetig $\otimes$ kompakt = kompakt   kompakt $\otimes$ stetig = kompakt
(2) $K : X \to Y$ kompakt $\Longrightarrow K' : Y' \to X'$ kompakt.

9.2. **Fredholmoperatoren.**

Definition 9.2.1. Seien X, Y Banachräume. $T \in L(X,Y)$ heißt *Fredholmoperator* ($T \in F(X,Y)$), falls $\operatorname{Bild} T$ ist abgeschlossener Unterraum und $\ker T$, $\operatorname{coker} T := Y/T(X)$ sind endlichdimensional.

$\dim \ker T$= Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogene Gleichung $Tx = 0$.
$\dim \operatorname{coker} T$=Anzahl der linear unabhängigen bedingunge, die $y \in Y$ erfüllen nuss, damit die inhomogene Gleichung $Tx = y$ lösbar ist.

Definition 9.2.2. Sei $T \in L(X,Y)$ Fredholmoperator.

$$\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \in \mathbb{Z}$$

heißt *Index* von T.

Bemerkung 9.2.3. Falls X, Y endlichdimensionl sind, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(T) &= \dim \ker T - (\dim Y - \dim \operatorname{Bild} T) \\ &= \dim X - \dim Y. \text{(Dimensionsformel)} \end{aligned}$$

Dann ist der Index also uninteressant (da nicht abhängig von T).

Beispiel 9.2.4. $(x_1, x_2, \cdots) \to (0, x_1, x_2, \cdots)$ hat Index -1.
$(x_1, x_2, \cdots) \to (x_2, x_3, \cdots)$ hat Index 1.
Isomorphismusen haben natürlich Index null.

Theorem 9.2.5 (kanonische Isomorphismen für T, T')**.** *Sei $T \in L(X,Y)$ und* $\operatorname{Bild}(T)$ *abgeschlossen. Dann ist* $\operatorname{Bild}(T')$ *auch abgeschlossen und es gilt*

- $\ker(T') \cong (\operatorname{coker} T)'$
- $(\operatorname{coker} T') \cong (\ker T)'$

Korollar 9.2.6. *Sei $T \in L(X,Y)$ Fredholmoperator. Dann ist $T' \in L(Y', X')$ ebenfalls Fredholmsch und* $\operatorname{ind}(T') = -\operatorname{ind}(T)$.

Korollar 9.2.7. *Sei $T \in L(X,Y)$ mit abgeschlossenem Bild. Dann gilt das Kriterium*

$$Tx = y \Longleftrightarrow \psi(y) = 0 \text{ für alle } \psi \in \ker T'.$$

Lemma 9.2.8. *Sei V Unterraum eines Banachraums X. Falls* $\dim V < \infty$ *oder falls V abgeschlossen mit* $\dim(X/V) < \infty$*, so hat V ein abgeschlossenes Komplement.*

Theorem 9.2.9. *Die Menge $F(X,Y)$ der Fredholmoperatoren ist offen in $L(X,Y)$. Der Index ist auf $F(X,Y)$ local konstant.*

Theorem 9.2.10 (über kompakte Operatoren von Riesz)**.** *Sei $K \in L(X,Y)$ ein kompakter Operator. Dann ist $T = \mathbb{I} - K$ ein Fredholmoperator mit Index null.*

Korollar 9.2.11. *$T \in L(X,Y)$ ist genau dann Fredholmoperator, wenn es S_1, $S_2 \in L(X,Y)$ gibt, so dass gilt:*

$$\mathbb{I} - S_1 T, \quad \mathbb{I} - TS_2 \text{ sind kompakt.}$$

(Und es kann $S_1 = S_2 = S$ gewählt werden.)

Korollar 9.2.12. *Sei $T_0 \in L(X,Y)$ ein Fredholmoperator, $K \in L(X,Y)$ kompakt. Dann ist $T = T_0 + K$ ebenfalls Fredholmsch und*

$$\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T_0).$$

Theorem 9.2.13. *Seien $T_1 \in L(X,Y)$, $T_2 \in L(Y,Z)$ Fredholmsch. Dann ist $T_2T_1 \in L(X,Z)$ Fredholmsch und es gilt*

$$\operatorname{ind}(T_2T_1) = \operatorname{ind}(T_2) + \operatorname{ind}(T_1).$$

9.3. **Anwendung auf elliptischee Randwertptrobleme.**

Theorem 9.3.1 (Einbettungssatz von Rellich)**.** *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt, und $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Inklusion $I : W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ kompakt.*

Lemma 9.3.2. *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(1) $\|u \circ \tau_h - u\|_{L^p} \leq |h| \|Du\|_{L^p}$ ($h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$)
(2) $\|u_\rho - u\|_{L^p} \leq \rho \|Du\|_{L^p}$ ($u_\rho = \eta_\rho * u$, $\int \eta = 1$)

Lemma 9.3.3. *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator*

$$\begin{array}{rcl} K : W_0^{1,2}(\Omega) & \to & W_0^{12}(\Omega)' \\ (Kv)(u) & = & \int_\Omega (\langle b, Du \rangle v + \langle c, Dv \rangle u + quv) \end{array}$$

für $b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $q \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist K kompakt.

Theorem 9.3.4. *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator $L = L_0 + K$ mit*

$$\begin{array}{rcl} L_0 v & = & -\operatorname{div}(aDv) \\ Kv & = & -\operatorname{div}(bv) + \langle c, Dv \rangle + qv \end{array}$$

und den Voraussetzungen:

(B) beschränkte Koeffizienten:

$$a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R})), \quad b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad q \in L^\infty.$$

(E) Elliptizität: $\langle \xi, a(x)\xi \rangle \geq \mu |\xi|^2, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ und einem $\mu > 0$.

Dann ist $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ ein Fredholmoperator vom Index null. Insbesondere gilt die Alternativ

$$L \text{ injektiv} \Longleftrightarrow L \text{ surjektiv.}$$

Theorem 9.3.5 (Lösbarkeitskriterium für Dirichletproblem)**.** *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator $L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ wie in Satz 9.3.4. Für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ sind äquivalent:*

(1) $Lv = \varphi$ besitzt eine Lösung $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,
(2) $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in \ker(L^*)$, wobei $L^* := L \circ J : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ bezeichnet als den adjungierten Operator von L, es gilt $L^* v = -\operatorname{div}(a^* Dv) - \operatorname{div}(cv) + \langle b, Dv \rangle + qv$.