10. Spektralsatz

10.1. **Spektrum.** Sei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 10.1.1. Sei X ein Banachraum und $T \in L(X,X) \equiv L(X)$.

(i) Die Menge $\rho(T) \subset \mathbb{K}$ aller rellen oder komplexen Zahlen, so dass $T - \lambda\,\mathrm{id} \equiv T - \lambda$ ein Banachraumisomorphismus ($T - \lambda$ ist stetig, bijektiv und $(T-\lambda)^{-1}$ ist ebenfalls stetig) ist, heißt Resolventenmenge von T.

(ii) $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heißt Spektrum von T.

(iii) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \colon T - \lambda \text{ ist nicht injektiv}\}$ heißt das Punktspektrum von T. $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt Eigenwert und $\ker(T - \lambda\mathbb{1})$ heißt Eigenraum.

(iv) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \colon T - \lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} = X, (T-\lambda)^{-1} \colon R(T-\lambda) \to X \text{ nicht stetig}\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von T.

(v) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon T - \lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} \neq X\}$ heißt das residuelle Spektrum oder Restspektrum von X.

Theorem 10.1.2 (Neumannsche Reihe)**.** *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $\mathrm{id} - T \equiv \mathbb{1} - T$ invertierbar, es gelten $(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n \in L(X)$ und $\|(\mathbb{1}-T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}$.*

Beweis. Aufgrund der geometrischen Reihe konvergiert die Reihe absolut:

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} T^n\right\| \le \sum_{n=0}^{N} \|T^n\| \le \sum_{n=0}^{N} \|T\|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}.$$

Die angegebene Reihe ist invers zu $\mathbb{1} - T$, denn es gilt

$$\sum_{n=0}^{N} T^n \cdot (\mathbb{1} - T) = \mathbb{1} - T^{N+1} = (\mathbb{1} - T) \cdot \sum_{n=0}^{N} T^n.$$

Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung, da $\left\|T^{N+1}\right\| \le \|T\|^{N+1} \to 0$. $\square$

Korollar 10.1.3. *Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,X)$ und gelte $ST = \mathbb{1}_X$ sowie $TS = \mathbb{1}_Y$. S heißt dann Inverse zu T. Dann gibt es eine Umgebung U von T in $L(X,Y)$, so dass alle $\tilde{T} \in U$ eine Inverse in $L(Y,X)$ besitzen.*

Der Beweis funktioniert auch für einseitige Inverse.

Beweis. Sei

$$U := \left\{\tilde{T} \in L(X,Y) \colon \|S\| \cdot \left\|\tilde{T} - T\right\| < 1\right\}.$$

Sei $\tilde{T} \in U$ beliebig. Es gilt $S\tilde{T} = ST + S\big(\tilde{T} - T\big) = \mathbb{1} + S\big(\tilde{T} - T\big)$. Dann ist $S\tilde{T} \in L(X)$ mit $\left\|\mathbb{1} - S\tilde{T}\right\| = \left\|S\big(\tilde{T} - T\big)\right\| \le \|S\| \cdot \left\|\tilde{T} - T\right\| < 1$. Somit ist $S\tilde{T} = \mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - S\tilde{T}\right)$ mit Hilfe der Neumannschen Reihe invertierbar. Sei $A \in L(X)$ die Inverse zu $S\tilde{T}$. Es folgt $\mathbb{1} = (AS)\tilde{T}$.

Analog bekommen wir eine rechtsseitige Inverse.

Rechtsseitige und linksseitige Inverse stimmen überein. $\square$

Korollar 10.1.4. *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T) \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen.*

Beweis. Wir haben in Korollar 10.1.3 gezeigt, dass $\mathbb{K} \setminus \sigma(T) = \rho(T)$ offen ist. $\square$

Lemma 10.1.5. *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|T\|$. Dann ist $T - \lambda = (-\lambda)(\mathbb{1} - \lambda^{-1}T)$ invertierbar, da $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ gilt. Somit ist $\sigma(T)$ beschränkt und die Behauptung folgt, da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist. $\square$

10.2. **Selbstadjungierte Operatoren.** In diesem Kapitel benutzen wir auch [16].

Proposition 10.2.1 (Adjungierte Abbildung)**.** *Seien E, F normierte Räume. Sei $A \in L(E, F)$. Dann gibt es eine adjungierte Abbildung $A^* \in L(F^*, E^*)$, die adjungierte oder duale Abbildung mit*

$$\langle Ax, w \rangle = \langle x, A^* w \rangle$$

für alle $(x, w) \in E \times F^*$. Die Abbildung A^* ist eindeutig bestimmt und es gilt $\|A\| = \|A^*\|$.

Beweis.
Existenz: Sei $w \in F^*$. Dann ist $\varphi(x) := \langle Ax, w \rangle$ mit $x \in E$ eine lineare Form auf E. Es gilt $\varphi \in E^*$, d. h. φ ist stetig: Es gilt nämlich

$$|\varphi(x)| = |\langle Ax, w \rangle| \le \|w\| \cdot \|Ax\| \le (\|w\| \cdot \|A\|) \cdot \|x\|$$

und daher $\|\varphi\| \le \|w\| \cdot \|A\|$. Definiere nun $A^* w := \varphi$. Nach Definition von φ ist A^* linear, also eine lineare Abbildung von F^* nach E^*. Aus $\|A^* w\| \le \|w\| \cdot \|A\|$ folgt $\|A^*\| \le \|A\|$. Andererseits folgt aus der Definition von A^*

$$|\langle Ax, w \rangle| = |\langle x, A^* w \rangle| \le \|A^* w\| \cdot \|x\| \le \|A^*\| \cdot \|w\| \cdot \|x\|.$$

Hieraus folgt mit einem Korollar zum Satz von Hahn-Banach, siehe Korollar 4.1.5, $\|Ax\| \le \|A^*\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in E$. Wir erhalten $\|A\| \le \|A^*\|$.

Eindeutigkeit: Sei $A' \in L(F^*, E^*)$ eine Abbildung, die ebenfalls $\langle Ax, w \rangle = \langle x, A' w \rangle$ für alle $(x, w) \in E \times F^*$ erfüllt. Dann erhalten wir $\langle x, (A^* - A') w \rangle = 0$ für alle $(x, w) \in E \times F^*$ und somit $A^* w = A' w$ für alle $w \in F^*$. □

Definition 10.2.2. Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$. Seien $x, y \in H$. Sei $I \colon H^* \to H$ wie im Satz von Riesz, Theorem 5.2.5. In der folgenden Rechnung schreiben wir explizit hin, wenn es sich um das Skalarprodukt und nicht im die Paarung zwischen H und H^* handelt. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle_{\text{Skp.}} &= \left\langle Ax, I^{-1} y \right\rangle = \left\langle x, A^* I^{-1} y \right\rangle = \left\langle x, I^{-1} I A^* I^{-1} y \right\rangle \\ &= \left\langle x, I A^* I^{-1} y \right\rangle. \end{aligned}$$

Dann nennen wir $I A^* I^{-1} \in L(H)$ die Hilbertraumadjungierte von A und bezeichnen diese Abbildung wieder mit A^*.

Gilt $A = A^*$, so heißt A selbstadjungiert.

Statt der Rechnung mit $I \colon H^* \to H$ in der Definition der Hilbertraumadjungierten kann man den Beweis der Existenz einer allgemeinen Adjungierten auch an Hilberträume anpassen (Übung).

Proposition 10.2.3. *Sei H ein Hilbertraum. Dann hat die Abbildung $* \colon L(H) \to L(H)$ mit $A \mapsto A^*$ die folgenden Eigenschaften:*

(i) $A^{**} = A$, *d. h. $*$ ist eine Involution.*
(ii) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$ *für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*
(iii) $(AB)^* = B^* A^*$,
(iv) $\|A\| = \|A^*\|$,
(v) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.
(vi) Besitzt A eine stetige Inverse, so auch A^*. Es gilt dann $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Beweis. Übung. □

Definition 10.2.4. Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $A \in L(H)$ heißt normal, falls $AA^* = A^* A$ gilt.

Proposition 10.2.5. *Sei H ein Hilbertraum.*

(i) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren, $A \in L(H)$ und gelte $A_n \to A$ punktweise (oder sogar in der Operatornorm). Dann ist A selbstadjungiert.
(ii) Seien A, B selbstadjungiert. Dann ist die Verknüpfung AB genau dann selbstadjungiert, wenn A und B vertauschen.

Beweis.
(i) Seien $x, y \in H$ beliebig. Dann folgt
$$\langle Ax, y\rangle \leftarrow \langle A_n x, y\rangle = \langle x, A_n y\rangle \to \langle x, Ay\rangle$$
für $n \to \infty$ und damit die Behauptung.
(ii) Dies folgt aus $AB \stackrel{?}{=} (AB)^* = B^*A^* = BA$, wobei die Gleichheitszeichen stets gelten. □

Lemma 10.2.6. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$. Dann gilt $H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = \overline{R(A^*)} \oplus N(A)$. Die Summanden stehen jeweils senkrecht aufeinander.*

Beweis. Wegen $A^{**} = A$ genügt es, die erste Gleichheit zu beweisen.

Wir erinnern weiterhin an Lemma 5.1.10, wonach $\overline{R(A)}^\perp = R(A)^\perp$ gilt.

„$N(A^*) \subset \overline{R(A)}^\perp$“: Sei $y \in N(A^*)$. Dann gilt $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Also ist $y \in R(A)^\perp$.

„$\overline{R(A)}^\perp \subset N(A^*)$“: Sei $y \in \overline{R(A)}^\perp$. Dann folgt $\langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Somit ist $y \in N(A^*)$. □

Definition 10.2.7. Sei H ein Hilbertraum. Seien $A, B \in L(H)$ selbstadjungiert.
(i) Dann ist A kleiner als B, $A \le B$, falls $\langle Ax, x\rangle \le \langle Bx, x\rangle$ für alle $x \in H$ gilt.
(ii) A heißt positiv (semidefinit) oder monoton, falls $0 \le A$ gilt.
(iii) A heißt gleichmäßig positiv definit, falls es ein $c > 0$ mit
$$c \cdot \|x\|^2 \le \langle Ax, x\rangle$$
für alle $x \in H$ gibt.

Bemerkung 10.2.8. Ist $A \ge 0$, so gilt auch $A^n \ge 0$, da wir rund die Hälfte der Operatoren A im Skalarprodukt auf die andere Seite schreiben dürfen.

Theorem 10.2.9. *Sei H ein Hilbertraum. Erfülle $A \in L(H)$*
$$\|Ax\| \ge c\|x\| \quad \textit{für alle } x \in H$$
für ein $c > 0$ und sei A^* injektiv. Dann ist A stetig invertierbar.

Die Injektivität von A^* ist automatisch gegeben, wenn A selbstadjungiert ist.

Beweis.
(i) $R(A)$ ist abgeschlossen, denn aus $Ax_x = y_n \to y$ folgt
$$\|x_n - x_m\| \le \frac{1}{c}\|Ax_n - Ax_m\| = \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|.$$
Somit bilden die x_n eine Cauchyfolge. Gelte $x_n \to x$. Dann folgt $Ax = y$.
(ii) Nach Lemma 10.2.6 gilt $H = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}$. Nach Voraussetzung ist $N(A^*) = \{0\}$. Da $R(A)$ abgeschlossen ist, folgt $H = R(A)$. Somit ist A bijektiv.
(iii) Sei B die Inverse zu A. Dann ist B linear und wegen
$$\|By\| \le \tfrac{1}{c}\|ABy\| = \tfrac{1}{c}\|y\|$$
für alle $y \in H$ ist B auch beschränkt. □

Theorem 10.2.10. *Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Es gilt

$$\langle Ax, x\rangle - \lambda\|x\|^2 = \langle (A-\lambda\mathbb{1})x, x\rangle.$$

Da A selbstadjungiert ist, erhalten wir

$$|\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2 = |\operatorname{Im}\langle (A-\lambda\mathbb{1})x, x\rangle| \le \|(A-\lambda\mathbb{1})x\| \cdot \|x\|.$$

Es ist $(A-\lambda\mathbb{1})^* = A - \overline{\lambda}\mathbb{1}$.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\left\langle \left(A - \bar{\lambda}\mathbb{1}\right) x, x\right\rangle = \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{\in\mathbb{R}} - \overline{\lambda}\underbrace{\|x\|^2}_{\in\mathbb{R}} \notin \mathbb{R}$$

für $x \neq 0$. Somit ist $(A-\lambda\mathbb{1})^*$ injektiv. Nach Theorem 10.2.9 ist $A - \lambda\mathbb{1}$ daher stetig invertierbar. ☐

Theorem 10.2.11. *Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in L(H)$ mit $A \ge 0$. Dann gilt $\sigma(A) \subset [0,\infty)$.*

Beweis. Nach Theorem 10.2.10 gilt stets $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Für $\lambda < 0$ erfüllt $A - \lambda\mathbb{1}$ die Voraussetzungen aus Theorem 10.2.9. ☐

Theorem 10.2.12 (Satz von Vigier)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von selbstadjungierten Operatoren in $L(H)$ mit*

$$A_0 \le A_1 \le \ldots \le \kappa\mathbb{1}$$

für ein $\kappa > 0$. Dann gibt es einen selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ mit $A_n \to A$ punktweise.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass man für selbstadjungierte Operatoren $B \ge 0$ ähnlich wie in der Linearen Algebra eine Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \le \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle$$

für alle $x, y \in H$ zeigt: Betrachte das Skalarprodukt $\langle (B+\varepsilon\mathbb{1})\cdot, \cdot\rangle$ und lasse am Ende $\varepsilon \to 0$.

Gelte ohne Einschränkung $0 \le A_0$ und $\kappa = 1$. Es genügt nach Proposition 10.2.5 nachzuweisen, dass $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in H$ eine Cauchyfolge ist, da Linearität und Stetigkeit erhalten sind.

Sei $x \in H$ und sei $n > m \ge 0$. Dann gilt $0 \le A_n - A_m \le \mathbb{1}$ und daraus erhalten wir mit der verallgemeinerten Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|(A_n - A_m)x\|^4 &= \langle (A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x\rangle^2 \\
&\le \langle (A_n - A_m)x, x\rangle \left\langle (A_n - A_m)^2 x, (A_n - A_m)x\right\rangle \\
&\le \langle (A_n - A_m)x, x\rangle \|A_n - A_m\|^3 \|x\|^2 \\
&\le (\langle A_n x, x\rangle - \langle A_m x, x\rangle)\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Da die Folge $\langle A_n x, x\rangle$ eine monotone beschränkte reelle Folge ist, ist sie eine Cauchyfolge. Somit ist auch $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Die Behauptung folgt. ☐

10.3. **Projektoren.**

Definition 10.3.1. Sei H ein Hilbertraum. Ein Projektor P ist ein idempotenter ($P^2 = P$) selbstadjungierter Operator in $L(H)$.

Proposition 10.3.2. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes. Dann ist die Projektion auf M wie in Theorem 5.2.2 oder Korollar 5.2.4 ein Projektor.*

Beweis. Sei $H = M \oplus M^\perp$ und $z = x + y$ mit $(x, y) \in M \times M^\perp$ wie in Korollar 5.2.4 zerlegt. Dann ist $Pz = x$. Die Linearität folgt aus der Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$. Die Stetigkeit haben wir in Lemma 5.2.3 bereits nachgewiesen. Aus $\|z\|^2 = \|Pz\|^2 + \|y\|^2$ folgt sogar $\|P\| \le 1$. $P^2 = P$ ist klar.

P ist selbstadjungiert: Seien $z_1 = x_1 + y_1$ und $z_2 = x_2 + y_2$ Zerlegungen wie oben. Dann folgt $Pz_i = x_i$ für $i = 1, 2$ und

$$\langle Pz_1, z_2\rangle = \langle x_1, z_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle = \langle z_1, x_2\rangle = \langle z_1, Pz_2\rangle. \qquad \square$$

Proposition 10.3.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $P \in L(H)$ ein Projektor. Dann ist $M := R(P) = P(H)$ ein abgeschlossener Unterraum, der genau die Fixpunkte von P enthält. P ist die Projektion aus Theorem 5.2.2 auf M.*

Beweis.

(i) Da P linear ist, ist M ein Unterraum.

(ii) Sei x ein Fixpunkt, so gilt $Px = x$, also $x \in P(H) = M$.

Sei umgekehrt $x \in P(H)$, so existiert ein $y \in H$ mit $Py = x$. Also folgt $x = Py = P^2y = Px$. Somit ist x auch ein Fixpunkt.

Wegen $M = \{x \in H : Px - \mathbb{1}x = 0\}$ ist M abgeschlossen.

(iii) Sei $x \in H$ beliebig. Dann ist $x - Px \in M^\perp$, denn es gilt für beliebiges $y \in H$

$$\langle x - Px, Py\rangle = \langle Px - P^2x, y\rangle = 0.$$

Da die Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$ eindeutig ist, ist Px durch $Px \in M$ und $x - Px \in M^\perp$ eindeutig bestimmt. Die Projektion auf M aus Theorem 5.2.2 liefert ebenfalls eine solche Zerlegung. Somit ist P gerade diese Projektion.

$\square$

Definition 10.3.4. Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$.

(i) Ein Teilraum $M \subset H$ heißt bezüglich A invariant, falls $A(M) \subset M$ gilt.

(ii) Ein Teilraum $M \subset H$ heißt bezüglich A reduzierend, falls M bezüglich A und bezüglich A^* invariant ist.

Proposition 10.3.5. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes, P der Projektor auf M. Sei $A \in L(H)$. Dann gelten*

(i) M ist genau dann bezüglich A invariant, wenn $P \circ A \circ P = A \circ P$ gilt.

(ii) M reduziert A genau dann, wenn A und P vertauschen.

Beweis.

(i) $P \circ A \circ P = A \circ P$ ist äquivalent zu $PAx = Ax$ für alle $x \in M$. Dies ist äquivalent zur Invarianz von M.

(ii) „$\Longrightarrow$“: Angenommen, M reduziert A. Dann gilt nach (i) $PA^*P = A^*P$ und ebenso $PAP = AP$. Hieraus folgt

$$PA = (A^*P)^* = (PA^*P)^* = PAP = AP.$$

„$\Longleftarrow$“: Gelte nun $AP = PA$. Dann folgt $AP = APP = PAP$, also $A(M) \subset M$.

Aus $AP = PA$ folgt $A^*P = PA^*$ und dann ebenso, dass $A^*(M) \subset M$ gilt. Also reduziert M den Operator A. $\square$

Proposition 10.3.6. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes. Dann gilt für die Projektoren*

$$\mathrm{pr}_{M^\perp} = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M\,.$$

Beweis. $\mathrm{pr}_{M^\perp}$ sowie $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_{M^\perp}$ sind selbstadjungiert und es gilt $(\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M)^2 = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M - \mathrm{pr}_M + \mathrm{pr}_M^2 = 1 - \mathrm{pr}_M$. Somit ist $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$ ein Projektor. Aus der Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$ folgt direkt, dass $(\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M)(H) = M^\perp$ gilt. Somit ist $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$ ein Projektor auf $M^\perp$. $\square$

Proposition 10.3.7. *Ein Teilraum $M \subset H$ eines Hilbertraumes ist genau dann ein $A \in L(H)$ reduzierender Teilraum, wenn A die Räume M und $M^\perp$ invariant lässt.*

In diesem Fall gibt es zu A Operatoren $A_1 \in L(M)$ und $A_2 \in L\left(M^\perp\right)$, so dass A, wenn wir H als $H = M \oplus M^\perp$ zerlegen, als

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann, d. h. es gilt für $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in M$ und $x_2 \in M^\perp$

$$Ax = A_1x_1 + A_2x_2,$$

wobei wir $A_1x_1 \in M$ und $A_2x_2 \in M^\perp$ als Elemente in H betrachten.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Reduziert M den Operator A, so vertauscht A mit pr_M, also auch mit $\mathrm{pr}_{M^\perp} = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$. Daher reduziert auch $M^\perp$ den Operator A. Somit sind M und $M^\perp$ unter A invariante Unterräume.

„$\Longleftarrow$“: Nehme an, dass A die Räume M und $M^\perp$ invariant lässt. Setze $P := \mathrm{pr}_M$. Dann folgt $AP = PAP$ nach Proposition 10.3.5. Aus der Invarianz von $M^\perp$ folgt ebenso $A(\mathbb{1} - P) = (\mathbb{1} - P)A(\mathbb{1} - P)$. Wir multiplizieren aus und erhalten

$$A - AP = A - PA \underbrace{-AP + PAP}_{=0} = A - PA.$$

Somit vertauschen A und P und wir erhalten nach Proposition 10.3.5, dass M den Operator A reduziert.

Die Zerlegung von A in Blockmatrixgestalt folgt direkt aus der Invarianz von M und $M^\perp$ unter A. $\square$

Proposition 10.3.8. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann ist $P := P_1 \circ P_2$ genau dann ein Projektor, wenn $[P_1, P_2] = 0$ gilt. In diesem Fall ist P ein Projektor auf den Raum $M := M_1 \cap M_2$.*

Beweis. Nach Proposition 10.2.5 ist P genau dann selbstadjungiert, wenn $[P_1, P_2] = 0$ gilt. Hieraus folgt dann

$$P^2 = P_1 \circ P_2 \circ P_1 \circ P_2 = P_1^2 \circ P_2^2 = P_1 \circ P_2 = P.$$

Somit ist P ein Projektor.

Es gilt $R(P) \subset M_1 \cap M_2$, da wir mit $M_{12}^{\perp(M_2)} := \{x \in M_2 \colon x \perp M_1 \cap M_2\}$ die orthogonale Zerlegung $H = (M_1 \cap M_2) \oplus M_{12}^{\perp(M_2)} \oplus M_2^\perp$ haben. Andererseits gilt $P|_M = \mathbb{1}|_M$. $\square$

Korollar 10.3.9. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann gilt $M_1 \perp M_2$ genau dann, wenn $P_1 \circ P_2 = 0$ ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Seien M_1 und M_2 orthogonal zueinander. Seien $x, y \in H$ beliebig. Dann folgt $0 = \langle P_1x, P_2y\rangle = \langle x, P_1P_2y\rangle$. Somit ist $P_1P_2 = 0$.

„$\Longleftarrow$“: Seien $x \in M_1$ und $y \in M_2$. Dann gilt $\langle x, y\rangle = \langle P_1x, P_2y\rangle = \langle x, P_1P_2y\rangle = 0$. $\square$

Proposition 10.3.10. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann ist $P := P_1 + P_2$ genau dann ein Projektor, wenn $P_1 \circ P_2 = 0$ gilt. In diesem Fall ist P ein Projektor auf $M = M_1 \oplus M_2$, die orthogonale Summe von M_1 und M_2.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Ist P ein Projektor, so ist P idempotent. Wäre $P_1P_2 \neq 0$, so folgt nach Korollar 10.3.9, dass $M_1 \not\perp M_2$ gilt. Ohne Einschränkung nehmen wir also an, dass es $M_1 \ni x = y_2 + y_2^\perp$ mit $\left(y_2, y_2^\perp\right) \in M_2 \times M_2^\perp$ und $y_2 \neq 0$ gibt. Dann gelten $P_1x = x$, $P_2y_2 = y_2$ und $P_2y_2^\perp = 0$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} Px =& (P_1 + P_2)(x) = x + P_2\left(y_2 + y_2^\perp\right) = x + y_2 \\ = P^2x =& (P_1 + P_2)(x + y_2) = x + P_1y_2 + P_2x + P_2y_2 = x + P_1y_2 + y_2 + y_2 \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$P_1y_2 = -y_2.$$

Also ist $y_2 \neq 0$ ein Eigenvektor von P_1 zum Eigenwert -1. Dies ist absurd, da Projektoren nur die Eigenwerte 0 und 1 haben, es gilt nämlich für einen Eigenvektor z und einen Eigenwert λ stets

$$\lambda z = Pz = P^2z = P(\lambda z) = \lambda^2 z,$$

also $0 = \lambda(\lambda - 1)$.

„$\Longleftarrow$“: Gelte $P_1P_2 = 0$. Aus Korollar 10.3.9 erhalten wir auch $P_2P_1 = 0$. Somit ist $P := P_1 + P_2$ idempotent. Nach Proposition 10.2.5 oder direkter Überlegung ist P auch selbstadjungiert.

Sei also P ein Projektor. Die Räume $M_1, M_2 \subset H$ stehen orthogonal aufeinander. Für $x = x_1 + x_2$ mit $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$ gilt $Px = P_1x_1 + P_1x_2 + P_2x_1 + P_2x_2 = x_1 + 0 + 0 + x_2 = x$. Also gilt $M_1 \oplus M_2 \subset R(P)$. Andererseits gilt $R(P) \subset R(P_1) \oplus R(P_2) = M_1 \oplus M_2$. Somit folgt die Behauptung. □

Proposition 10.3.11. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $M_i \subset H$, $i = 1, 2$, abgeschlossene Teilräume mit zugehörigen Projektoren P_i.*

(i) Dann ist $P := P_2 - P_1$ genau dann ein Projektor, wenn $M_1 \subset M_2$ gilt.
(ii) P projiziert auf das orthogonale Komplement von M_1 in M_2.
(iii) Es gilt

$$M_1 \subset M_2 \quad\Longleftrightarrow\quad P_1 = P_2P_1 \quad\Longleftrightarrow\quad P_1 \le P_2.$$

Beweis.

(i) Nach Proposition 10.3.6 ist $P = P_2 - P_1$ genau dann ein Projektor, wenn $Q := \mathbb{1} - P = (\mathbb{1} - P_2) + P_1$ ein Projektor ist. Nach Proposition 10.3.10 ist dies äquivalent zu $(\mathbb{1} - P_2) \circ P_1 = 0$ oder $P_1 = P_2P_1$. Dies ist äquivalent zu $M_1 \subset M_2$.

(ii) Betrachte die Einschränkungen auf M_2. Dort ist P_2 die Identität und die Behauptung folgt aus Proposition 10.3.6. Elemente von $M_2^\perp$ werden durch P_1 und P_2 auf Null abgebildet.

(iii) Die erste Äquivalenz ist klar.

„$\Longrightarrow$“: Sei $M_1 \subset M_2$. Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum M von H mit $M_2 = M_1 \oplus M$, wobei die Summe orthogonal ist, M also das orthogonale Komplement von M_1 in M_2. Sei $x \in H$. Es folgt $P_2x = P_1(P_2x) + \overline{x} = P_1x + \overline{x}$ für ein $\overline{x} \in M$. Da die Zerlegung orthogonal ist, erhalten wir $\|P_1x\|^2 \le \|P_2x\|^2$ für $x \in H$. Da beide P_i's selbstadjungiert sind, erhalten wir $\langle P_1x, x\rangle \le \langle P_2x, x\rangle$ für alle $x \in H$ und somit $P_1 \le P_2$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $P_1 \le P_2$. Sei $x \in M_1$. Dann folgt $\|x\|^2 \le \|P_2x\|^2$ wie in den letzten Zeilen oben. Andererseits gilt $\|P_2x\|^2 \le \|x\|$, da P_2 eine Projektion ist (zerlege H in $M_2 \oplus M_2^\perp$). Somit gilt $\|P_2x\|^2 = \|x\|^2$ für $x \in M_1$. Mittels orthogonaler Zerlegung von M_1 in $M_2 \cap M_1$ und das zugehörige orthogonale Komplement erhalten wir $P_2x = x$ für $x \in M_1$. Somit gilt $M_1 \subset M_2$. □

Aus dem Satz von Vigier, Theorem 10.2.12, erhalten wir

Proposition 10.3.12. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (oder fallende) Folge von Projektoren $P_n \in L(H)$. Dann gibt es einen Projektor P, so dass $P_n \to P$ punktweise konvergiert.*

Beweis. Wegen $0 \le P \le \mathbb{1}$ ist jeder Projektor gleichmäßig beidseitig beschränkt. Betrachte ohne Einschränkung den Fall einer monoton wachsenden Folge $P_0 \le P_1 \le P_2 \le \ldots$. Nach dem Satz von Vigier konvergiert somit $P_n \to P$ punktweise und P ist selbstadjungiert.

P ist auch idempotent, denn es gilt

$$\left\langle P^2x, y\right\rangle = \langle Px, Py\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, P_ny\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, y\rangle = \langle Px, y\rangle. \qquad \square$$

Bemerkung 10.3.13. Es ist leicht zu sehen, dass der punktweise Grenzwert P einer monoton wachsenden Folge von Projektoren P_n

$$R(P) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)}$$

erfüllt.

10.4. **Orthonormalbasen.**

Definition 10.4.1.
(i) Sei X ein Banach- oder Hilbertraum. Dann heißt $S \subset X$ Banach- oder Hilbertraumbasis, falls S linear unabhängig ist und $\overline{\langle S\rangle} = X$ gilt.
(ii) Eine Hilbertraumbasis S von H heißt Orthonormalbasis, falls $\|x\| = 1$ und $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \ne y \in S$ gilt.
(iii) Zur deutlicheren Unterscheidung bezeichnen wir eine Basis im Sinne der Linearen Algebra als Hamelbasis.

Beispiel 10.4.2. Die Vektoren $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$ bilden eine Orthonormalbasis von $l^2(\mathbb{N})$, aber keine Hamelbasis von $l^2(\mathbb{N})$.

Lemma 10.4.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ein Orthonormalsystem in H, d. h. gelte $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Setze $M := \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ und sei P die Projektion auf M. Dann gilt*

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Beweis. Definiere P_i als den Projektor auf den Teilraum $\langle e_i\rangle$. Dann gilt $P_ix = \langle x, e_i\rangle e_i$ für $x \in H$. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 10.3.10 per Induktion. $\square$

Theorem 10.4.4. *Jeder separable Hilbertraum H besitzt eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis, die durch Gram-Schmidt Orthonormalisierung aus einer gegebenen Basis gewonnen werden kann.*

Beweis. Nach dem Zornschen Lemma existiert eine Basis, die man aus einer abzählbaren dichten Teilmenge gewinnt.

Die Orthonormalisierung funktioniert genau so wie in der Linearen Algebra. Beachte dazu, dass die Erzeugnisse der ersten n Vektoren einer gegebenen Basis und der Orthonormalisierung davon übereinstimmen. $\square$

Proposition 10.4.5. *Sei H ein unendlich dimensionaler Hilbertraum. Dann erfüllt eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann $\overline{\langle\{e_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle} = H$, wenn sie*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

(Parsevalsche Identität) oder, äquivalent dazu,

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

für alle $x \in H$ erfüllt.

Vergleiche dies mit der Besselschen Ungleichung, Korollar 5.1.12.

Beweis.
„$\Longrightarrow$": Gelte $\overline{\langle \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle} = H$. Setze $M_n := \langle e_0, \ldots, e_n \rangle$ und $M = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} M_n$. Dann ist M dicht in H. Definiere P_n als den Projektor auf M_n. Aus Proposition 10.3.12, Bemerkung 10.3.13 und Lemma 10.4.3 erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = P_n x \to x \quad \text{für alle } x \in H$$

und somit

$$\sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|P_n x\|^2 \to \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in H.$$

„$\Longleftarrow$": Sei nun die Parsevalsche Identität erfüllt. Wir definieren Projektoren P_n durch $P_n x := \sum\limits_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Dann ist $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge von Projektoren, konvergiert also punktweise gegen einen Projektor P. Wäre $P \neq \mathbb{1}$, so folgt $R(P) \subsetneq H$. Ein zu $R(P)$ orthogonaler Vektor $y \neq 0$ steht auch auf allen Vektoren e_n senkrecht. Somit gilt für ihn die Parsevalsche Ungleichung nicht. Widerspruch. Aus $P = \mathbb{1}$ folgt die Behauptung direkt. □

10.5. **Spektralsatz.** Die Zerlegung kompakter selbstadjungierter Operatoren ist eine Verallgemeinerung der Resultate aus Kapitel 6.8, „Diagonalisierung von selbstadjungierten linearen Endomorphismen", in [13].

Lemma 10.5.1. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte reell und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.*

Beweis. Lineare Algebra. □

Lemma 10.5.2. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Sei die Familie $(e_i)_{i \in I}$ ein unendliches Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von A mit $Ae_i = \lambda_i e_i$ für $i \in I$. Dann ist 0 der einzige Häufungspunkt der Folge $(\lambda_i)_{i \in I}$ und die Menge der Eigenwerte ist höchstens abzählbar.*

Beweis. Wegen $|\lambda_i| \le \|A\|$ für $i \in I$ sind die Eigenwerte gleichmäßig beschränkt. Somit besitzen die Eigenwerte einen Häufungspunkt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass $\lambda = 0$ gilt. Somit gibt es auch höchstens abzählbar viele Eigenwerte.

Angenommen, es gälte doch $\lambda \neq 0$. Wir dürfen ohne Einschränkung $I = \mathbb{N}$ und $\lambda_i \to \lambda$ für $i \to \infty$ annehmen. Seien e_i die zugehörigen Eigenvektoren mit $\|e_i\| = 1$. Nehme weiterhin ohne Einschränkung $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e_i \rightharpoonup e$ für ein $e \in H$ an. Es gilt $\lambda_i^{-1} A e_i = e_i$. Da A kompakt ist, folgt $Ae_i \to Ae$. Somit erhalten wir

$$e_i = \lambda_i^{-1} A e_i \to \lambda^{-1} A e,$$

die Vektoren e_i konvergieren also nicht nur schwach, sondern sogar stark. Da der schwache Grenzwert eindeutig bestimmt ist, folgt auch $e_i \to e$. Da die Vektoren

$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jedoch ein Orthonormalsystem bilden, gilt $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ für $i \neq j$. Widerspruch. $\square$

Korollar 10.5.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A mit Eigenraum E_λ, so gilt $\dim E_\lambda < \infty$.*

Beweis. Andernfalls könnten wir mit dem Gram-Schmidtschen-Orthonormalisierungsverfahren induktiv ein abzählbares Orthonormalsystem in E_λ konstruieren. Widerspruch zur Kompaktheit. $\square$

Da wir für unendliche Vektorräume i. a. keine Determinante und somit auch kein charakteristisches Polynom haben, benutzen wir variationelle Methoden um Eigenwerte zu finden.

Lemma 10.5.4. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $0 \neq A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann besitzt A mindestens einen Eigenwert $\lambda \neq 0$.*

Beweis. Betrachte das Variationsproblem

$$J(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \to \max$$

für $0 \neq x \in H$ oder, äquivalent dazu,

$$j(x) = \langle Ax, x\rangle \to \max$$

für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$. Definiere $\lambda := \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$. Wir nehmen ohne Einschränkung (betrachte sonst $-A$) an, dass $\lambda > 0$ gilt.

Sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|x_n\| = 1$ eine Maximalfolge für j, d. h. gelte $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda$. Eine ohne Einschränkung nicht umbenannte Teilfolge konvergiert dann schwach: $x_n \rightharpoonup x$. Da A kompakt ist, folgt $Ax_n \to Ax$ und wir erhalten

$$\langle Ax, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle = \lambda > 0.$$

Somit ist $x \neq 0$. Da $\{x\colon \|x\| \le 1\}$ nach Definition der Norm eine konvexe Menge ist (benutze $\|tx + (1-t)y\| \le t\|x\| + (1-t)\|y\|$), folgt nach dem Lemma von Mazur, Lemma 7.2.6, $\|x\| \le 1$ (Alternative: Benutze die Unterhalbstetigkeit der Norm unter schwacher Konvergenz.). Andererseits gilt

$$\lambda = \sup_{\|y\|=1} j(y) = \sup_{y\neq 0} J(y) \ge J(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\lambda}{\|x\|^2}.$$

Somit ist $\|x\| \ge 1$. Also gilt $\|x\| = 1$, das Funktional j nimmt also, ebenso wie J, sein Maximum in x an.

Wir erhalten für beliebiges $y \in H$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \ll 1$, also $x + ty \neq 0$,

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt} J(x+ty)\right|_{t=0},\\
\langle A(x+ty), x+ty\rangle &= \langle Ax, x\rangle + t\langle Ax, y\rangle + t\langle Ay, x\rangle + t^2\langle Ay, y\rangle,\\
\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle &= \langle Ax, y\rangle + \langle y, Ax\rangle = \langle Ax, y\rangle + \overline{\langle Ax, y\rangle} = 2\operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle,\\
\|x+ty\|^2 &= \|x\|^2 + 2t\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2,\\
\left.\frac{d}{dt} J(x+ty)\right|_{t=0} &= \frac{2}{\|x\|^4}\Big(\underbrace{\|x\|^2}_{=1} \cdot \operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle - \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{=\lambda} \cdot \operatorname{Re}\langle x, y\rangle\Big)\\
&= 2\operatorname{Re}\langle Ax - \lambda x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Somit folgt $Ax = \lambda x$. $\square$

Theorem 10.5.5 (Spektralsatz)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann besitzt A höchstens abzählbar viele Eigenwerte $(\lambda_i)_{i\in I}$. Sei M_{λ_i} der (abgeschlossene) Eigenraum zum Eigenwert λ_i und E_{λ_i} der Projektor auf M_{λ_i}. Dann gelten*

$$A = \sum_{i\in I} \lambda_i E_{\lambda_i} \quad \text{und} \quad \mathbb{1} = \sum_{i\in I} E_{\lambda_i},$$

wobei die Reihen punktweise konvergieren.

Die Eigenräume zu Eigenwerten $\lambda_i \neq 0$ sind endlichdimensional. Gibt es abzählbar viele Eigenwerte λ_i, so können wir $I = \mathbb{N}$ wählen und erhalten $\lambda_i \to 0$ für $i \to \infty$.

Ist $\dim H < \infty$, so ist dieser Satz bereits aus der Linearen Algebra in äquivalenter Formulierung bekannt.

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir $A \neq 0$ annehmen. Ist $N(A) \neq \{0\}$, so ist 0 ein Eigenwert mit Eigenraum $N(A)$. Da A selbstadjungiert ist, gilt nach Lemma 10.2.6 $\overline{R(A)} \oplus N(A) = H$. Somit ist $N(A)$ ein reduzierender Unterraum, siehe Proposition 10.3.7. Wir setzen $\mathcal{H} := N(A)^\perp$. Können wir das Theorem für $A|_\mathcal{H} \in L(\mathcal{H})$ zeigen, so folgt das Theorem auch für den ursprünglichen Operator A. Wir dürfen also ohne Einschränkung annehmen, dass $N(A) = \{0\}$ gilt, dass also A injektiv ist. Wegen $A \neq 0$ folgt auch $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Der Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$ ist aus der Linearen Algebra bekannt. Sei also $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Seien $(\lambda_i)_{i\in I}$, I eine geeignete Indexmenge, die Eigenwerte von A mit Eigenräumen M_{λ_i} und Projektoren E_{λ_i}. Gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Es gilt $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Nach Lemma 10.5.4 besitzt A mindestens einen Eigenwert. Nach Lemma 10.5.2 ist I höchstens abzählbar, also gilt ohne Einschränkung $I \subset \mathbb{N}$. Nach Korollar 10.5.3 gilt $\dim M_{\lambda_i} < \infty$ für alle $i \in I$. Ist I abzählbar (noch ist nicht klar, dass es überhaupt mehr als einen Eigenwert gibt), so ist die Menge $\{\lambda_i : i \in I\}$ beschränkt und besitzt somit einen Häufungspunkt. Nach Lemma 10.5.2 ist dies Null.

Nach Lemma 10.5.1 sind die Eigenräume M_{λ_i} paarweise orthogonal zueinander. Somit konvergiert die Reihe der Projektoren E_{λ_i} punktweise gegen einen Projektor E, $E = \sum\limits_{i\in I} E_{\lambda_i}$. Wir wenden dazu Proposition 10.3.12, die Folgerung aus dem Satz von Vigier, an.

Es gilt $E = \mathbb{1}_\mathcal{H}$: Da jeder Eigenraum von A den Operator A reduziert, gilt dies auch für $R(E)$, da man in $AP_nx = P_nAx$ zum Grenzwert $APx = PAx$ übergehen kann. Somit reduziert E den Operator A. Benutze Bemerkung 10.3.13. Wäre $R(E)^\perp \neq \{0\}$, so gäbe es darin aufgrund der Injektivität von A einen Eigenvektor zu einem Eigenwert ungleich Null. Somit ist $R(E) = \mathcal{H}$. Nach Lemma 10.5.3 ist somit I abzählbar.

Es gilt $\mathbb{1} = \sum\limits_{i\in I} E_{\lambda_i}$. Die Konvergenz ist punktweise.

Sei schließlich $x \in H$ beliebig. Dann folgt $x = \sum\limits_{i\in I} E_{\lambda_i}x$. Da A stetig ist, erhalten wir

$$Ax = \sum_{i\in I} AE_{\lambda_i}x = \sum_{i\in I} \lambda_i E_{\lambda_i}x$$

wie behauptet. $\square$