FUNKTIONALANALYSIS

GUOFANG WANG

ZUSAMMENFASSUNG. Dieses Skript basiert auf den Skripts von Prof. E. Kuwert und Prof. O. Schürer.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Topologische Grundlagen 3
1.1. Topologische Räume 3
1.2. Stetige Abbildungen 4
1.3. Kompaktheit 5
1.4. Vervollständigung 8
2. Normierte Räume und Hilberträume 11
2.1. Normierte Räume 11
2.2. Lineare Abbildungen 12
3. L^p-Räume 16
3.1. Dreiecksungleichung und Folgenräume 16
3.2. Vollständigkeit $\star$ 19
3.3. Räume der Hölderstetigen Funktionen 20
4. Der Satz von Hahn-Banach 20
4.1. Der Satz von Hahn-Banach 20
5. Hilberträume 25
5.1. Hilberträume 25
5.2. Projektion auf konvexe Teilmengen 28
6. Der Bairesche Kategoriesatz 30
6.1. Der Bairesche Kategoriesatz und Anwendungen 30
7. Schwache Konvergenz und Reflexivität 34
7.1. Schwache Konvergenz 34
7.2. Reflexivität 37
8. Sobolevräume 39
8.1. Definition und grundlegende Eigenschaften 39
8.2. Approximierbarkeit 45
8.3. Fortsetzbarkeitssätze 48
8.4. Spuren von Sobolevfunktionen 49
9. Anwendungen 52
9.1. Die Direkte Methode 52
9.2. Satz von Lax-Milgram 54
10. $L^p(\Omega)$ 57
10.1. $1 < p < \infty$ 58
10.2. $p = 1$ oder $p = \infty$ 60
10.3. Reflexivität und Separabilität von $L^p(\Omega)$ 61
11. Kompakte Operatoren und Fredholmoperatoren 62
11.1. Kompakte Operatoren 62
11.2. Fredholmoperatoren 66
11.3. Anwendung auf elliptischee Randwertptrobleme 71
12. Spektralsatz 73

12.1. Spektrum 73
12.2. Selbstadjungierte Operatoren 73
12.3. Projektoren 76
12.4. Orthonormalbasen 79
12.5. Spektralsatz 81

Einführung

Das Skript ist basiert auf den Skripts von Herrn Kuwert und Herrn Schuerer.

In dieser Vorlesung geht es hauptsächlich um unendlich dimensionale Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen ihnen.

Thema: Seien X, Y Funktionenräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A : X \to Y$ lineare Abbibildung.

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$$

i.a. $\dim X = \dim Y = \infty$. We wollen die Lsüngen von linearen Gleicheung $Au = f$ untersuchen. Lösungsverfahren der linearen Algebra sind nictht anwendar.

Beispiel 1. $X = \{x = (x_1, x_2, x_3 \cdots) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}\}$
(i) $A : X \to X, A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. A is linear, injektiv, aber nicht surjektiv.
(ii) $B : X \to X$, $B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$. B is linear, surjektiv, aber nicht injektiv.

Beispiel 2. $X = C^0([-\pi, \pi])$, $A : X \to X$, $(Au)(t) = (\sin t)u(t)$
A ist linear, aber hat keinen Eihenwert: Angenommen, A hat einen Eigenwert: $Au = \lambda u$, $u \neq 0$, und $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.,

$$(\sin t)u(t) = \lambda u(t), \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Daraus folgt $\{t : u(t) \neq 0\} \subset \{t : \sin t = \lambda.\}$ Das ist unmöglich.

Beispiel 3. Dirichlet-Prinzip für elliptische Randwertprobleme.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ veschänkt mit glatten Rand. Sei $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gegeben. Gesucht ist eine Lösung $u \in C_0^\infty(\Omega)$ des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Variationasansatz: Funktional $F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 - \int_\Omega fv$.

Lemma 0.0.1. *Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $F(u) \leq F(v) \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt*

$$-\Delta u = f$$

Proof. Sei $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann gilt

$$F(u + \varepsilon\eta) = F(u) + \varepsilon \int_\Omega \langle Du, D\eta\rangle - \varepsilon \int_\Omega f\eta + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |D\eta|^2.$$

Daraus folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} F(u + \varepsilon\eta) = \int_\Omega \langle Du, D\eta\rangle - \int_\Omega f\eta = -\int_\Omega (\Delta u + f)\eta.$$

Aus dem Lemma von Variationsrechnung folgt

$$-\Delta u = f.$$

□

(I) Minimieren $F = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 - \int_\Omega fv$ in $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ ist formal analog zu
(II) Minimieren $F(x) = \frac{1}{2}|x|^2 - \langle a, x\rangle$ in $\mathbb{R}^n$.

1. Topologische Grundlagen

1.1. Topologische Räume.

Definition 1.1.1. Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}X$ heißt Topologie auf X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,
(ii) $\mathcal{O}$ ist unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen, d. h. aus $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, I eine beliebige (Index-)Menge, folgt auch $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.
(iii) $\mathcal{O}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d. h. aus $O_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, n$, folgt auch $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$.
(Es genügt hier für $O_1, O_2 \in \Omega$ auch $O_1 \cap O_2 \in \Omega$ zu fordern.)

$(X, \mathcal{O})$ (oder auch X) heißt *topologischer Raum*.

Eine Menge $A \subset X$ heißt *offen*, falls $A \in \mathcal{O}$ gilt. $B \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus B \in \Omega$ gilt.

Definition 1.1.2. Sei (X, Ω) ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge von X.

(i) Sei $x \in X$. Dann heißt $U \subset X$ *Umgebung* von x, falls es ein $V \in \Omega$ mit $x \in V \subset U$ gibt.
(ii) $x \in X$ heißt *Berührpunkt* von A, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat.
(iii) Die Menge der Berührpunkte von A heißt *Abschluss* (oder abgeschlossene Hülle) von A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.
(iv) Ein Punkt x ist ein *innerer Punkt* von A, falls A eine Umgebung von x ist.
(v) Das *Innere* von A ist als die Menge der inneren Punkte definiert und wird mit $\mathring{A}$ bezeichnet, der einfacheren Schreibweise wegen aber auch mit $\operatorname{int}(A)$.
(vi) Ein Punkt x heißt *Randpunkt*, $x \in \partial A$, wenn er Berührpunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

Definition 1.1.3. Sei (X, Ω) ein topologischer Raum.

(i) Sei $A \subset X$. Dann ist (A, Ω_A) mit
$$\Omega_A := \{O \cap A \colon O \in \mathcal{O}\}$$
ein topologischer Raum. Ω_A heißt *induzierte Topologie* (oder *Relativtopologie* oder Spurtopologie).
Beispiel: $(1/2, 1]$ ist in $[0, 1]$ offen.
(ii) Sei $A \subset X$. Dann heißt A *dicht* in X, falls $\overline{A} = X$ gilt.
Sei $A \subset B \subset X$. Dann heißt A dicht in B, falls A dicht in (B, Ω_B) ist.
(iii) X heißt *separabel*, falls es eine höchstens abzählbare Teilmenge $A \subset X$ mit $\overline{A} = X$ gibt.
(iv) Seien Ω_1, Ω_2 Topologien auf X. Dann heißt Ω_1 *gröber* als Ω_2, falls $\Omega_1 \subset \Omega_2$ gilt. Gilt $\Omega_1 \supset \Omega_2$, so heißt Ω_1 *feiner* als Ω_2.

Bemerkung 1.1.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Setze $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(y, x) < \varepsilon\}$. Dann ist
$$\mathcal{O} := \{A \subset X \colon \forall\, x \in A\ \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A\}$$
eine Topologie auf X. (Beweis: Analysis-Vorlesung.) Auf metrischen Räumen werden wir stets diese von der Metrik induzierte Topologie verwenden.

Ein topologischer Raum (X, Ω) heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X gibt, die die vorgegebene Topologie induziert.

Der Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist nicht metrisierbar, falls X mehr als zwei Punkte enthält, da es dann Mengen $B_\varepsilon(x) \neq X$ gibt.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vekotrraum versehen mit einer Norm. Dann ist $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.

Definition 1.1.5. Zwei Metriken heißen äquivalent, falls sie die gleiche Topologie induzieren.

Definition 1.1.6. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$ mit $x_n \in B_r(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.
(ii) Eine Menge $A \subset X$ heißt beschränkt, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$ mit $A \subset B_r(x_0)$ gibt.

Lemma 1.1.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine Metrik auf X, die zu d äquivalent ist, so dass X in dieser Metrik beschränkt ist.*

Beweis. Setze $\hat{d}(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. □

Definition 1.1.8. Sei (X, Ω) ein topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Dann heißt U *Umgebung* von A, falls U Umgebung für alle Punkte von A ist.

Definition 1.1.9. Sei (X, Ω) ein topologischer Raum. Und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann heißt $x_0 \in X$

(i) *Häufungspunkt* der Folge, falls in jeder Umgebung von x_0 unendlich viele Folgeglieder enthalten sind.
(ii) *Grenzwert* der Folge, falls außerhalb jeder Umgebung von x_0 nur endlich viele Folgeglieder liegen.

1.2. **Stetige Abbildungen.**

Definition 1.2.1. Seien (X_i, Ω_i), $i = 1, 2$, topologische Räume. Sei $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung.

(i) Dann heißt f stetig, falls für alle offenen Mengen $U \subset X_2$ auch $f^{-1}(U)$ in X_1 offen ist.
(ii) f heißt offen, falls für alle offenen Mengen $U \subset X_1$ auch $f(U)$ in X_2 offen ist.
(iii) f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.
(iv) f heißt in $x_0 \in X_1$ stetig, falls es zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$ gibt.

Beispiel 1.2.2. Sei $X = C^0([0, 1])$. Dann definieren $\|f\|_{L^1([0,1])} := \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx$ und $\|f\|_{L^\infty([0,1])} := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ Normen auf X. Sie induzieren Metriken auf X vermöge $d_1(f, g) := \|f - g\|_{L^1([0,1])}$ und $d_\infty(f, g) := \|f - g\|_{L^\infty([0,1])}$. Wir wollen zukünftig stets annehmen, dass die Metrik auf einem normierten Raum die von der Norm induzierte Metrik ist.

Dann ist $\mathrm{id} : (X, d_\infty) \to (X, d_1)$ stetig, denn es gilt

$$\|f\|_{L^1([0,1])} = \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty([0,1])},$$

also auch $d_1(f,g) \le d_\infty(f,g)$. Die Umkehrung $\mathrm{id}\colon (X,d_1) \to (X,d_\infty)$ ist jedoch nicht stetig, denn für $f_n(x) := x^n$ gilt

$$\|f_n\|_{L^1([0,1])} = \int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \quad \text{aber} \quad \|f_n\|_{L^\infty([0,1])} = 1.$$

Also erhalten wir $d_1(f_n,0) \to 0$, aber $d_\infty(f_n,0) \not\to 0$.

Definition 1.2.3. Seien (X_1,d_1) und (X_2,d_2) metrische Räume. Dann heißt die Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ Isometrie, falls

$$d_2(f(x),f(y)) = d_1(x,y)$$

für alle $x,y \in X_1$ gilt. Eine bijektive Isometrie heißt isometrischer Isomorphismus.

Theorem 1.2.4. *Sei $\mathbb{R}^n$ der euklidische Raum, d. h. der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik oder Standardmetrik (wie immer, wenn wir die Metrik des $\mathbb{R}^n$ nicht explizit angeben). Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein isometrischer Isomorphismus. Dann gilt $f(x) = Ax + b$ für eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$.*

Der Nachweis, dass Abbildungen dieser Form isometrische Isomorphismen sind, ist einfach. Der Beweis der umgekehrten Implikation findet sich in der Vorlesung LA.

1.3. **Kompaktheit.**

Definition 1.3.1.

(i) Sei (X,Ω) ein topologischer Raum. Dann heißt X *(überdeckungs-)kompakt*, falls jede Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} A_i$$

durch offene Mengen A_i, $i \in I$, d. h. eine offene Überdeckung, eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{j=1}^N A_{i_j}$$

besitzt.

(In der Topologie heißt ein überdeckungskompakter T_2-Raum kompakt.)

(ii) Sei (X,Ω) ein topologischer Raum. Dann heißt $A \subset X$ *relativ kompakt*, wenn $\overline{A} \subset X$ kompakt ist.

(iii) Sei (X,Ω) ein topologischer Raum. Dann heißt X *(folgen-)kompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

(iv) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann heißt X *präkompakt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_i \in X$, $1 \le i \le N$, mit

$$X = \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon(x_i)$$

gibt.

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt kompakt, falls A mit von X induzierter Metrik bzw. Topologie kompakt ist. Wir wollen ebenso einen Teilraum $A \subset X$ vollständig, beschränkt, präkompakt, … nennen, falls dies für A mit der von X induzierten Topologie oder Metrik gilt.

Theorem 1.3.2. *Seien X, Y topologische Räume. Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ (überdeckungs-)kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Da f stetig ist, ist auch $\big(f^{-1}(U_i)\big)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Sei ohne Einschränkung $\big(f^{-1}(U_i)\big)_{1\le i\le N}$ eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist $(U_i)_{1\le i\le N}$ eine endliche Überdeckung von $f(X)$. $\square$

Theorem 1.3.3. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist (überdeckungs-)kompakt.
(ii) X ist folgenkompakt.
(iii) X ist präkompakt und vollständig.

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Sei $(x_n)_n$ eine Folge. Definiere

$$F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}.$$

Die Mengen F_n sind abgeschlossen, $U_n := X\setminus F_n$ ist also offen. Wir behaupten, dass es ein $a\in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ gibt. Dies ist dann der gesuchte Häufungspunkt der Folge. Falls es kein solches a gibt, ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, was äquivalent zu $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ ist. Somit ist $(U_n)_n$ eine offene Überdeckung von X und endlich viele der Mengen U_n überdecken bereits X, ohne Einschränkung gelte $\bigcup\limits_{n=1}^{N} U_n = X$. Dies ist äquivalent zu $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_n = \emptyset$. Es gilt aber $\bigcap\limits_{i=1}^{N} F_n = F_N \neq \emptyset$. Widerspruch.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Da X folgenkompakt ist, ist X auch vollständig.

Falls X nicht präkompakt ist, gibt es ein $\varepsilon>0$, so dass $\bigcup\limits_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i) \subsetneq X$ für alle $x_i\in X$ und alle N gilt. Fixiere nun $x_0\in X$ beliebig und wähle $x_{n+1}\in X\setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n} B_\varepsilon(x_i)\neq\emptyset$ beliebig. Es gilt stets $d(x_i,x_j)\ge\varepsilon$ für $i\neq j$. Somit besitzt $(x_n)_n$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“:

Nehme an, dass es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ ohne endliche offene Teilüberdeckung gibt. $n=0$: Da X präkompakt ist, gibt es endlich viele offene Kugeln vom Radius $1=2^{-0}$, die X überdecken. Mindestens eine davon, $B_{2^{-0}}(x_0)$, wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt.

Seien $x_0,x_1,\dots,x_n$ bereits definiert. Dann wird X von endlich vielen Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ überdeckt. Mindestens eine davon, $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1})$ wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt. Wir können dabei $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1})\cap B_{2^{-n}}(x_n)\neq\emptyset$ annehmen. (Sonst würden nämlich alle Bälle vom Radius $2^{-(n+1)}$ mit nichtleerem Schnitt mit $B_{2^{-n}}(x_n)$ endlich durch Mengen in $\mathcal{U}$ überdeckt und das würde somit auch für $B_{2^{-n}}(x_n)$ gelten. Widerspruch.) Also gilt $d(x_n,x_{n+1}) < 2^{-(n+1)}+2^{-n} < 2^{-(n-1)}$ und somit für $p\in\mathbb{N}$

$$d(x_n,x_{n+p}) < 2^{-(n-1)} + 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \ldots + 2^{-(n+p-2)} < 2^{-(n-2)}.$$

Daher ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X, konvergiert also gegen ein $x\in X$ und wir erhalten $d(x_n,x)\le 2^{-(n-2)}$ durch Grenzübergang $p\to\infty$. x liegt aber in einer offenen Menge aus $\mathcal{U}$. Dies gilt auch für $B_\varepsilon(x)$. Nach Dreiecksungleichung gilt aber $B_{2^{-n}}(x_n)\subset B_{2^{-(n-2)}+2^{-n}}(x)\subset B_\varepsilon(x)$ für große Werte von n. Widerspruch zur Wahl von x_n.

(Die Idee: Definiere die Eigenschaft “eine Menge wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt” mit $(*)$. Wir zeigen die Implikation mit Widerspruch. d.h., wir nehmen an, dass X die Eigenschaft $(*)$ besitzt. Wir zeigen die Behauptung

Für jede $A \subset X$ mit $(*)$ und $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; B_\varepsilon(x)$ auch mit $(*)$ und $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.
Der Beweis der Behauptung: Da X präkompakt ist, existiert N und $B_\varepsilon(x_i)$ $(x_j \in X, j = 1, 2 \cdots, N)$ mit $A \subset X \subset \cup_{j=1}^N B_\varepsilon(x_j)$. oBdA können wir annehmen, dass $A \cap B_\varepsilon(x_j) \neq \emptyset$, für alle $j = 1, \cdots, N$. Es ist nun leicht to sehen, dass eine vom $B_\varepsilon(x_i)$ $(x_j \in X, j = 1, 2 \cdots, N$ die Eigenschaft $(*)$ besitzt.)

□

Theorem 1.3.4. *Sei Y ein metrischer Raum. Sei $X \subset Y$ kompakt. Dann ist X*
(i) beschränkt,
(ii) abgeschlossen sowie
(iii) separabel.

Nur für die Abgeschlossenheit ist der umgebende Raum wichtig.

Beweis.
(i) Folgt aus der Präkompaktheit.
(ii) Folgt aus der Folgenkompaktheit.
(iii) Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es endlich viele Kugeln mit Radius $1/n$, die X überdecken. Sei X_n die endliche Menge der zugehörigen Mittelpunkte. Dann ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ die gesuchte höchstens abzählbare dichte Teilmenge. □

Definition 1.3.5. Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,\forall\, x, y \in X_1 : \; d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 1.3.6. *Seien X, Y metrische Räume. Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Falls nicht, gibt es $\varepsilon > 0$ und Punkte $a_n, b_n \in X$ mit $d_X(a_n, b_n) < 1/n$ aber $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon$. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge der a_n, ohne Einschränkung gelte also $a_n \to a \in X$ für $n \to \infty$. Nach Dreiecksungleichung gilt $d_X(a, b_n) \leq d_X(a, a_n) + d_X(a_n, b_n)$, also gilt auch $b_n \to a$ für $n \to \infty$. Da aber f in a stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ gilt. Sei n so groß, dass $a_n, b_n \in B_\delta(a)$ gilt. Wir erhalten dann $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \leq d_Y(f(a_n), f(a)) + d_Y(f(a), f(b_n)) < \varepsilon$. Widerspruch. □

Definition 1.3.7. Seien (X, d) und (Z, D) metrische Räume und sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i\colon X \to Z$.
(i) $(f_i)_{i\in I}$ heißt *gleichgradig stetig*, falls

$$\forall x \in X \,\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,\forall i \in I \,\forall y \in X\colon d(x, y) < \delta \implies D(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

(ii) $(f_i)_{i\in I}$ heißt *gleichmäßig gleichgradig* stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,\forall i \in I \,\forall x, y \in X\colon d(x, y) < \delta \implies D(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 1.3.8 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge gleichgradig stetiger Funktionen $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge, ohne Einschränkung $(f_n)_n$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert: $f_n \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$.*

Proof. Beweisidee: Mit einem Diagonalfolgenargument erhalten wir eine Teilfolge, die auf einer dichten Teilmenge konvergiert. Aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit konvergiert die Teilfolge überall, und gleichmäßig.

Schritt 0. Aus die Kompaktheit von X ist X separabel ist. (Wie oben uberdecken wir X fur jedes k mit Ballen des Radius $1/k$. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Menge A_k, so dass $X = \cup_{x\in A_k} U_{1/k}(x)$. Also ist die abzahlbare Menge $A := \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k$

dicht.) Sei $A = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\overline{A} = X$. Wir sollen eine konvergente Teilfolge von $\{f_n\}_n$ finden.

Schritt 1. Wir finden zunachst eine Teilfolge, die in jedem x_j konvergiert. Dazu benutzen wir ein Diagonalargument zusammen mit der gleichmäßigen Beschranktheit. Da $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ eine beschrankte Folge in $\mathbb{R}$ ist, besitzt sie eine konvergente Teilfolge $\{f_{n,1}(x_1)\}$. Die Folge $\{f_{n,1}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ ist wiederum beschrankt in $\mathbb{R}$, also besitzt sie eine konvergente Teilfolge $\{f_{n,2}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$. Jetzt wiederholen wir das Argument und betrachten die Diagonalfolge $\{f_{n,n}\} =: \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Diese Folge ist eine Teilfolge von $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, die nach Konstruktion in jedem x_j konvergiert.

Schritt 2. Jetzt zeigen wir, dass $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergiert. Dazu benötigen wir die gleichgradige Stetigkeit. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme δ aus der Definition der gleichgradigen Stetigkeit. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \cdots, x_l \in A$, so dass die Kugeln um sie mit Radius δ ganz X überdecken. Sei jetzt $x \in X$ beliebig. Betrachte x_j mit $d(x, x_j) < \delta$. Da $g_n(x_j)$ nach Schritt 1 konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ gilt. Damit erhalten wir

$$|g_n(x) - g_m(x)| \le |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_m(x)| < 3\varepsilon,$$

wobei wir bei dem ersten und dem letzten Summanden die gleichgradige Stetigkeit benutzt haben. Also ist g_n eine Cauchyfolge. □

Bemerkung 1.3.9. Im $\mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge kompakt. In metrischen Räumen gilt dies i. a. nicht mehr: In $l^2(\mathbb{N})$ (siehe folgendes Kapitel) ist $\overline{B_1(0)}$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt, da die Vektoren $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ für $i \neq j$ die Gleichheit $d(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ erfüllen.

1.4. **Vervollständigung.**

Definition 1.4.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt Cauchyfolge, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \colon \forall\, n, m \ge N \colon d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$
(ii) X heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Lemma 1.4.2. *Sei $f \colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ gleichmäßig stetig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_1. Dann ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_2.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass
$$d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$
gilt. Da $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X_1 ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $d_1(x_n, x_m) < \delta$ für alle $n, m \ge N$ gilt. Zusammengenommen folgt $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \ge N$. □

Lemma 1.4.3. *Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Sei X_2 vollständig. Sei $X \subset X_1$ dicht. Sei $f \colon X \to X_2$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $g \colon X_1 \to X_2$. g ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. (Serie 1, Aufgabe 1) □

Definition 1.4.4 (Vervollständigung)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Vervollständigung von (X, d) ist ein Tripel $\left(\hat{X}, \hat{d}, \iota\right)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
(ii) $\iota \colon X \to \hat{X}$ ist eine Isometrie mit dichtem Bild.

(iii) Sei Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder gleichmäßig stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$, so dass $\hat{f} \circ \iota = f$ gilt, d. h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & \hat{X} \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Später nennt man auch laxerweise $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ die Vervollständigung von (X, d) oder sagt, dass $\hat{X}$ die Vervollständigung von X sei.

Wir nennen $\hat{f}$ eine Fortsetzung von f, da wir X vermöge ι als Teilmenge von $\hat{X}$ auffassen können.

Bemerkung ⋆ Die Forderung nach $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$ kann man auch durch die Forderung nach einer eindeutigen Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$ ersetzen und erhält eine äquivalente Definition.

Beweis.

(i) Ist $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$, so ist $\hat{f}$ wegen $\hat{f} \circ \iota = f$ auf einer dichten Teilmenge eindeutig vorgegeben. Da $\hat{f}$ stetig ist, ist die Abbildung also eindeutig bestimmt.

(ii) Ist $\overline{\iota(X)} \subsetneq \hat{X}$, so können wir mit $x_0 \in \hat{X} \setminus \overline{\iota(X)}$ und $Y = [0, 1]$ nach Tietze-Urysohn stetige Funktionen $\hat{f}_i\colon \hat{X} \to Y$ mit $f_i\left(\overline{\iota(X)}\right) = \{0\}$ und $\hat{f}_i(x_0) = i$ finden. Somit ist die zur Nullabbildung $f\colon X \to Y$ zugeordnete Abbildung $\hat{f}$ nicht eindeutig bestimmt. □

Theorem 1.4.5 (Vervollständigung)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine Vervollständigung $\left(\hat{X}, \hat{d}, \iota\right)$.*

Die Vervollständigung $\left(\hat{X}, \hat{d}, \iota\right)$ ist bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Vergleiche dies mit der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

Beweis ⋆.

(i) Existenz: Auf dem Raum der Cauchyfolgen in X definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Es ist mit Hilfe der Dreiecksungleichung leicht zu sehen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Mit $[(x_n)_n]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge $(x_n)_n$. Sei

$$\hat{X} := \{[(x_n)_n] \colon (x_n)_n \text{ ist Cauchyfolge in X}\}.$$

Auf $\hat{X}$ definieren wir eine Metrik $\hat{d}\colon \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}_+ \equiv \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\hat{d}([(x_n)_n], [(y_n)_n]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Man rechnet direkt nach, dass $\hat{d}$ wohldefiniert und eine Metrik ist. Die Dreiecksungleichung folgt dabei aus

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n),$$

indem man zunächst auf der rechten Seite den Grenzwert $n \to \infty$ betrachtet. Die behaupteten Eigenschaften von $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ werden wir noch nachweisen.

(ii) Definiere $\iota\colon X \to \hat{X}$ durch
$$x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}],$$
wir bilden x also auf die Äquivalenzklasse der konstanten Cauchyfolge ab. Dies ist eine Isometrie.

(iii) $\iota(X)$ liegt dicht in $\hat{X}$: Sei $[(x_n)_n] \in \hat{X}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ für $n, m \geq N$ gilt. Es ist $[(x_N)_n] \in \iota(X)$ und es gilt
$$\hat{d}([(x_N)_n], [(x_n)_n]) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_N, x_n)}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

(iv) Vollständigkeit: Sei $([x_k])_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Gelte $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{k,n}, x_{k,m}) < 1/k$ für $n, m \geq N_k$. Wir definieren $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ durch $y_l := x_{l,N_l}$. Wir wollen nachweisen, dass $y := (y_l)_l$ eine Cauchyfolge in X ist und dass $[x_k] \to [y]$ in $\big(\hat{X}, \hat{d}\big)$ gilt.

(v) $(y_l)_l$ ist eine Cauchyfolge in X: Zunächst ist
$$\hat{d}(\iota(x_{i,N_i}), [x_i]) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_{i,N_i}, x_{i,n})}_{\leq 1/i \text{ für } n\geq N_i} \leq \tfrac{1}{i}.$$

Nun gilt
$$\begin{aligned} d(y_k, y_l) &\leq d(y_k, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{l,m}) + d(x_{l,m}, y_l) \\ &\leq \tfrac{1}{k} + d(x_{k,m}, x_{l,m}) + \tfrac{1}{l} \quad \forall\, m \geq \max\{N_k, N_l\} \\ &\leq \tfrac{1}{k} + \hat{d}([x_k], [x_l]) + \Big|\hat{d}([x_k], [x_l]) - d(x_{k,m}, x_{l,m})\Big| + \tfrac{1}{l} \\ &\qquad \forall\, m \geq \max\{N_k, N_l\}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. $([x_k])_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Daher können wir $k, l \in \mathbb{N}$ mit $1/k + 1/l \leq \varepsilon/3$ und $\hat{d}([x_k], [x_l]) \leq \varepsilon/3$ fixieren. Benutze die Definition von $\hat{d}$ und wähle m so groß, dass
$$\Big|\hat{d}([x_k], [x_l]) - d(x_{k,m}, x_{l,m})\Big| \leq \varepsilon/3$$
gilt. Wir erhalten somit $d(y_k, y_l) \leq \varepsilon$. Daher ist $(y_l)_l$ eine Cauchyfolge.

(vi) $[x_k] \to [y]$: Es gilt
$$\begin{aligned} d(x_{k,l}, y_l) &\leq d(x_{k,l}, x_{k,N_k}) + d(x_{k,N_k}, y_l) \\ &\leq \tfrac{1}{k} + d(y_k, y_l) \quad \text{für } l \geq N_k. \end{aligned}$$

Lasse nun $k, l \to \infty$ mit $l \geq N_k$. Somit folgt $\hat{d}([x_k], [y]) \to 0$ für $k \to \infty$.

Ausführlicher: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $d(y_i, y_j) < \varepsilon/2$ für $i, j \geq N$. Wähle $k \geq N$ so groß, dass $1/k < \varepsilon/2$ gilt. Wähle nun $l \geq \max\{N, N_k\}$. Dann folgt $d(x_{k,l}, y_l) < \varepsilon$. Mit $l \to \infty$ erhalten wir also $\hat{d}([x_k], [y]) \leq \varepsilon$.

(vii) Fortsetzbarkeit: Sei $f\colon X \to Y$ gleichmäßig stetig. Definiere $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$ durch
$$\hat{f}([(x_n)_n]) := \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Die Wohldefiniertheit und gleichmäßige Stetigkeit von $\hat{f}$ folgen aus Lemma 1.4.3, da $\hat{f}$ die Fortsetzung der gleichmäßig stetigen Abbildung
$$\begin{aligned} f \circ \iota^{-1}\colon \iota(X) &\to Y, \\ [(x)_n] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$
ist.

(viii) Eindeutigkeit: Sei $\hat{\jmath}$ die Fortsetzung von $\jmath$, also

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\jmath"'] & & \hat{X}. \arrow[dl, "\hat{\jmath}"] \\ & \tilde{X} & \end{tikzcd}$$

Da $\jmath \circ \iota^{-1} \colon \iota\big(\hat{X}\big) \to \tilde{X}$ eine Isometrie mit dichtem Bild in $\tilde{X}$ ist, ist $\hat{\jmath}$ eine isometrische Isometrie.

□

2. Normierte Räume und Hilberträume

2.1. Normierte Räume.

Bemerkung 2.1.1. Wir sagen, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sei, wenn V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ ist.

Definition 2.1.2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ Norm, wenn $\|\cdot\|$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.
(ii) $\|v\| = 0$ gilt genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$.
(iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ für alle $u, v \in V$. (Dreiecksungleichung)

Lemma 2.1.3. *Sei V ein normierter Raum. Dann ist $V \ni x \mapsto \|x\|$ stetig.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| :$$

Gelte $x_n \to x$. Dann konvergiert die rechts Seite gegen Null, somit folgt auch $\|x_n\| \to \|x\|$. □

Bemerkung 2.1.4.

(i) Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum vermöge $d(x, y) := \|x - y\|$. Wenn nicht anders angegeben, wollen wir auf normierten Räumen stets diese induzierte Metrik betrachten. (Details: Analysisvorlesung.)
(ii) Einen vollständigen normierten Raum nennen wir Banachraum.
(iii) Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Dann wird auf
$$V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2) \colon v_1 \in V_1,\, v_2 \in V_2\}$$
durch $\|(v_1, v_2)\|_{V_1 \oplus V_2} := \|v_1\|_{V_1} + \|v_2\|_{V_2}$ eine Norm definiert. Wie beim Nachweis, dass die „Taxinorm" eine Norm ist, rechnet man auch hier nach, dass man eine Norm erhält.
(iv) Seien $(V_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I$, normierte Räume. Dann ist
$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{(v_i)_{i \in I} \colon v_i \in V_i,\, \|(v_i)_{i \in I}\| < \infty\} \quad \text{mit} \quad \|(v_i)_{i \in I}\| := \sum_{i \in I} \|v_i\|_{V_i}$$
ein normierter Raum.
(v) Auf den direkten Summen gibt es auch weitere Normen, z. B. l^p-Normen, vergleiche den nächsten Abschnitt.
(vi) Sind die normierten Räume sogar Banachräume, so sind die oben definierten direkten Summen ebenfalls Banachräume.
(vii) Ist I unendlich, so gilt automatisch für höchstens abzählbar viele $i \in I$ die Ungleichung $v_i \neq 0$.

Bei Quotientenräumen muss man sich im Gegensatz zur linearen Algebra auf abgeschlossene Teilmengen beschränken um wieder einen Banachraum zu erhalten. Das folgende Theorem ist falsch, wenn wir aus den stetigen Funktionen mit C^0-Norm auf $[0,1]$ den (nach Stone-Weierstraß dichten) Unterraum der Polynome herausdividieren, der Quotientenraum ist nicht einmal normiert, da die positive Definitheit verloren geht.

Theorem 2.1.5 (Quotientenräume von Banachräumen)**.** *Sei X ein Banachraum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist der Quotientenraum X/M mit*

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beschränken uns auf die nichttrivialen Nachweise.

(i) $\|[x]\|$ ist unabhängig vom Vertreter aus $x + M$ wohldefiniert.
(ii) Da M abgeschlossen ist, ist $\|[x]\| \neq 0$ für $[x] \neq M$.
(iii) Dreiecksungleichung: Sei $\varepsilon > 0$. Seien $x, y \in X$ und $a, b \in M$ mit $\|x - a\| \leq \operatorname{dist}(x, M) + \varepsilon$ sowie $\|y - b\| \leq \operatorname{dist}(y, M) + \varepsilon$. Dann folgt

$$\inf_{z \in M} \|x+y-z\| \leq \|x+y-a-b\| \leq \|x-a\|+\|y-b\| \leq \operatorname{dist}(x, M)+\operatorname{dist}(y, M)+2\varepsilon.$$

Die Dreiecksungleichung folgt.

(iv) X/M ist ein Banachraum: Sei $([x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|[x_n] - [x_{n+1}]\| < 2^{-n}$ gilt. Wir wollen nun Vertreter wählen, die in X eine Cauchyfolge bilden. Wähle $z_0 \in [x_0]$ beliebig. Dann finden wir induktiv $z_{n+1} \in [x_{n+1}]$ mit

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq \|[x_{n+1} - x_n]\| + 2^{-n} = \|[x_{n+1}] - [x_n]\| + 2^{-n}.$$

Die z_n bilden eine Cauchyfolge in X, da

$$\begin{aligned} \|z_{n+m} - z_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|z_{i+1} - z_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \left(\|[x_{i+1}] - [x_i]\| + 2^{-i}\right) \\ &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} 2 \cdot 2^{-i} \leq 2^{-n+1} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots\right) = 2^{-n+2}. \end{aligned}$$

Setze $z := \lim\limits_{n \to \infty} z_n$. Wir erhalten

$$\|[x_n] - [z]\|_{X/M} = \|[z_n] - [z]\|_{X/M} \leq \|z_n - z\| \to 0$$

für $n \to \infty$. Also gilt $[x_n] \to [z]$ in X/M. ☐

2.2. **Lineare Abbildungen.** Ist T eine lineare Abbildung so schreiben wir wie in der Linearen Algebra auch Tu statt $T(u)$.

Definition 2.2.1. Wir schreiben $R(T) = \operatorname{im}(T)$ für das Bild von T und $N(T)$ für den Kern von T.

Definition 2.2.2. Sei $T \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann heißt T beschränkt, falls es ein $c \geq 0$ mit

$$\|Tv\|_W \leq c \cdot \|v\|_V$$

für alle $v \in V$ gibt.

Wir definieren die Operatornorm von T, $\|T\|$, durch

$$\|T\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|Tv\|.$$

Bemerkung 2.2.3. Äquivalent zur Beschränktheit für lineare Abbildungen sind:

(i) T bildet beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab.
(ii) $\sup\limits_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \leq c$.

Es gilt

$$\|T\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|.$$

Theorem 2.2.4. *Sei $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) T ist beschränkt,
(ii) T ist in allen Punkten stetig,
(iii) T ist im Ursprung stetig.

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Gelte $u_n \to u$ für $n \to \infty$. Dann folgt

$$\|Tu - Tu_n\| = \|T(u - u_n)\| \leq \|T\| \cdot \|u - u_n\| \to 0$$

für $n \to \infty$.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Klar.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Falls T unbeschränkt ist, gibt es Vektoren $v_n \in V$, ohne Einschränkung mit $\|v_n\| = 1$, und $\|Tv_n\| =: r_n \to \infty$, ohne Einschränkung $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $u_n := \frac{v_n}{r_n}$. Dann folgt $u_n \to 0$ und es gilt

$$\|Tu_n\| = \frac{\|Tv_n\|}{r_n} = 1$$

im Widerspruch zur Stetigkeit von T.

Man kann „(iii) $\Longrightarrow$ (i)“ auch direkt zeigen: Nach der Stetigkeit von T im Ursprung, für $\varepsilon = 1$ existiert es ein $\delta > 0$ mit: $\|Tv\| < 1$ für alle $\|v\| \leq \delta$.. Daraus folgt

$$Tv = \frac{\|v\|}{\delta} T(\delta \frac{v}{\|v\|}) \leq \frac{\|v\|}{\delta}, \quad \forall v \in V.$$

□

Definition 2.2.5.

(i) Seien V, W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Definiere $L(V, W)$ als den Raum der stetigen linearen Abbildungen T von V nach W. $L(V, W)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird mit der Operatornorm $\|T\|$ zu einem normierten Raum (einfache Rechnung).
(ii) Seien V, W normierte Räume. Dann heißen V und W isomorph, falls es eine stetige, bijektive lineare Abbildung $T\colon V \to W$ mit stetiger Inverser gibt. T heißt dann Isomorphismus (zwischen normierten Räumen). Gilt zusätzlich noch $\|T(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so heißt T normtreuer Isomorphismus.

Lemma 2.2.6. *Ist W ein Banachraum, so auch $L(V, W)$.*

Beweis.

(i) Sei $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L(V, W)$ und $u \in V$. Wir definieren T durch $Tu := \lim\limits_{n\to\infty} T_n u$. Der Grenzwert existiert, da $(T_n u)_n$ eine Cauchyfolge ist; es gilt nämlich $\|T_n u - T_m u\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|u\|$. Da W vollständig ist, ist T wohldefiniert. Die Linearität von T ist klar.
(ii) T ist stetig: Wir benutzen, dass aus $u_n \to u$ auch $\|u_n\| \to \|u\|$ folgt. Da $A \mapsto \|A\|$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichun Lipschitzstetig (mit

Lipschitzkonstante eins) ist und $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge ist, ist auch $\|T_n\|$ eine Cauchyfolge und konvergiert daher in $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\|Tu\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n u\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n u\| \le \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|u\|,$$

wobei wir rechts den Limes superior nachträglich wieder als Limes schreiben dürfen. Es folgt $\|T\| \le \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\|$.

(iii) $T_n \to T$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n \ge N$ gilt. Sei nun $u \in V$ beliebig. Es gilt

$$\|Tu - T_n u\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m u - T_n u\| \le \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\| \cdot \|u\| \le \varepsilon \cdot \|u\|$$

für alle $n \ge N$. Somit erhalten wir $\|T - T_n\| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$. □

Definition 2.2.7. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir setzen $V^* := L(V, \mathbb{K})$, den Raum der stetigen linearen Funktionale auf V. ($V' = V^*$ ist eine weitere verbreitete Bezeichnung.) Sei $\varphi \in V^*$, $u \in V$. Statt $\varphi(u)$ schreiben wir auch $\langle u, \varphi\rangle$. Mit der Operatornorm oder dualen Norm auf V^* gilt

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le \|\varphi\|_{V^*} \cdot \|u\|_V.$$

Theorem 2.2.8. *Sei V ein normierter Raum, $\hat{V}$ seine Vervollständigung als metrischer Raum. Dann kann man $\hat{V}$ auf genau eine Art zu einem Banachraum machen, so dass die Einbettung $\iota\colon V \to \hat{V}$ linear und normtreu ist.*

Beweis. Wir identifizieren V mit $\iota(V)$.

(i) $u + v$: Seien $u, v \in \hat{V}$. Gelte $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$ sowie $V \ni v_n \to v \in \hat{V}$. Dann ist $u_n + v_n$ eine Cauchyfolge in V. Wir definieren $v + u := \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n)$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Auswahl der Cauchyfolgen.

(ii) λu: Für $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist λu_n eine Cauchyfolge in V. Wir definieren $\lambda u := \lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n$. Auch diese Definition ist von der Wahl der Cauchyfolge unabhängig.

(iii) $\|\cdot\|$: Sei $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$. Dann ist auch $\|u_n\|_V$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Cauchyfolge. Wir definieren $\|u\|_{\hat{V}} := \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_V$. Man rechnet leicht nach, dass dies eine Norm ist.

(iv) Vollständigkeit: $\|\cdot\|_{\hat{V}}$ induziert eine Metrik $\tilde{d}$ auf $\hat{V}$. Wir müssen nachweisen, dass $\tilde{d} = \hat{d}$ gilt. Nach Definition ist mit Bezeichnungen wie oben

$$\tilde{d}(u, v) = \|u - v\|_{\hat{V}} = \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_V = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = \hat{d}(u, v).$$

Die Behauptung folgt. □

Theorem 2.2.9 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei V ein normierter Raum, W ein Banachraum und $T \in L(V, W)$. Dann besitzt T genau eine Fortsetzung $\hat{T} \in L\big(\hat{V}, W\big)$ und es gilt $\big\|\hat{T}\big\| = \|T\|$.*

Dies folgt auch direkt aus Lemma 1.4.3.

Beweis.

(i) Existenz: Sei $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$. Dann ist Tu_n eine Cauchyfolge, da $\|Tu_n - Tu_m\| \le \|T\| \cdot \|u_n - u_m\|$ gilt. Wir setzen $\hat{T}u := \lim\limits_{n\to\infty} Tu_n$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Cauchyfolge. $\hat{T}$ ist linear und eine Fortsetzung von T.

(ii) Stetigkeit: Es gilt

$$\left\|\hat{T}u\right\| = \lim_{n\to\infty} \|Tu_n\| \leq \|T\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|T\| \cdot \|u\|.$$

Somit ist $\left\|\hat{T}\right\| \leq \|T\|$.

(iii) Gleichheit der Normen: Für $u \in V \subset \hat{V}$ gilt $\|Tu\| = \left\|\hat{T}u\right\| \leq \left\|\hat{T}\right\| \cdot \|u\|$. Wir bilden nun das Supremum über alle u mit $\|u\| = 1$ und erhalten $\|T\| \leq \left\|\hat{T}\right\|$. Zusammen mit der Stetigkeit folgt also $\|T\| = \left\|\hat{T}\right\|$.

(iv) Eindeutigkeit: Seien $\hat{T}$ und $\tilde{T}$ zwei solche Fortsetzungen. Sei $u \in \hat{V}$ und sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $u_n \in V$ und $u_n \to u$. Dann erhalten wir aufgrund der Stetigkeit

$$\hat{T}u = \lim_{n\to\infty} \hat{T}u_n = \lim_{n\to\infty} Tu_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}u_n = \tilde{T}u. \qquad \square$$

Für multilineare Abbildungen gibt es eine ähnliche Charakterisierung der Stetigkeit wie bei linearen Abbildungen.

Proposition 2.2.10. *Seien E_i, $1 \leq i \leq n$, und F normierte Räume. Setze $E := \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Sei $A\colon E \to F$ multilinear. Dann ist A genau dann stetig, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass*

$$\left\|A\left(x^1, \ldots, x^n\right)\right\| \leq c \cdot \left\|x^1\right\| \cdot \ldots \cdot \|x^n\|$$

für alle $\left(x^1, \ldots, x^n\right) \in E$ gilt.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Widerspruchsbeweis. Nehme an, dass A stetig ist, die Abschätzung aber nicht gilt. Dann gibt es Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_k^i\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ k\in\mathbb{N}}}$ in E mit

$$\|A(x_k)\| > k \cdot \left\|x_k^1\right\| \cdot \ldots \cdot \|x_k^n\|.$$

Setze $y_k^i := \frac{1}{k^{1/n}} \frac{x_k^i}{\left\|x_k^i\right\|}$. Dann gilt $y_k \to 0$ für $k \to \infty$ aber $\|A(y_k)\| > 1$. Widerspruch zur Stetigkeit von A.

„$\Longleftarrow$“: Nehme die Abschätzung an. Gelte $x_k \to y$. Dann gibt es ein $C > 0$ so dass $\left\|x_k^i\right\| \leq C$ für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^n\right) - A\left(y^1, \ldots, y^n\right)\right\| \\
\leq{} &\left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^n\right) - A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-1}, y^n\right)\right\| \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-2}, x_k^{n-1}, y^n\right) - A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-2}, y^{n-1}, y^n\right)\right\| + \ldots \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1, y^2, \ldots, y^n\right) - A\left(y^1, y^2, \ldots, y^n\right)\right\| \\
\leq{} &\left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-1}, x_k^n - y^n\right)\right\| + \left\|A\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-2}, x_k^{n-1} - y^{n-1}, y^n\right)\right\| + \ldots \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1 - y^1, y^2, \ldots, y^n\right)\right\| \\
\leq{} &c \cdot C^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left\|x_k^i - y^i\right\| \to 0
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Somit ist A stetig. $\square$

Definition 2.2.11. Seien E_i, $1 \leq i \leq n$, und F normierte Räume. Setze $E := \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Sei $A\colon E \to F$ multilinear und stetig. Dann heißt

$$\|A\| := \sup_{\|x^1\|,\ldots,\|x^n\|=1} \left\|A\left(x^1, \ldots, x^n\right)\right\|$$

die Norm der multilinearen Abbildung.

Bemerkung 2.2.12.

(i) Die Menge aller stetigen multilinearen Abbildungen $E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ zwischen normierten Räumen, die wir mit $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ bezeichnen, ist mit der in Definition 2.2.11 eingeführten Norm ein normierter Raum.

(ii) Ist F zusätzlich vollständig, so ist $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ ein Banachraum.

(iii) Seien E, F, G normierte Räume. Dann ist die Abbildung

$$A \in L(E, F; G) \to L(E, L(F, G)) \ni \tilde{A}$$

mit $A(x, y) = \big(\tilde{A}(x)\big)(y)$ eine normtreuer Isomorphismus.

Analog erhält man einen normtreuen Isomorphismus

$$L(E_1, \ldots, E_n; F) \to L(E_1, L(E_2, \ldots, L(E_n, F) \ldots)).$$

Details: Übung.

3. L^p-Räume

3.1. **Dreiecksungleichung und Folgenräume.**

Theorem 3.1.1 (Höldersche Ungleichung, Minkowskische Ungleichung)**.** *Sei $1 < p < \infty$. Dann heißt q mit $1 < q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ der zu p konjugierte (Hölder-)Exponent. Sei Ω ein Maßraum mit Maß μ. Seien f, g messbar. Dann gelten die Höldersche Ungleichung*

$$\int\limits_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \le \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_\Omega |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}$$

und die Minkowskische Ungleichung

$$\left(\int\limits_\Omega |f + g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \le \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int\limits_\Omega |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Mit der Norm $\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ (es ist noch nachzuweisen, dass es sich hierbei um eine Norm handelt) können wir die Ungleichungen in der folgenden Form schreiben:

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q},$$
$$\|f + g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Dieselben Resultate gelten auch für $(p, q) = (1, \infty)$ oder $(p, q) = (\infty, 1)$, die Beweise sind anders, aber einfacher (Übung).

Beweis.

(i) Höldersche Ungleichung: Setze $A := \|f\|_{L^p}$ und $B := \|g\|_{L^q}$. Die Fälle $A \in \{0, \infty\}$ oder $B \in \{0, \infty\}$ sind einfach (Übung). Sei also $0 < A, B < \infty$. Wir setzen $F := |f|/A$ und $G := |g|/B$. Dann gilt $\|F\|_{L^p} = \|G\|_{L^q} = 1$. Betrachte $x \in \Omega$ mit $0 < F(x), G(x) < \infty$. Dazu gibt es $s, t \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = e^{s/p}$ und $G(x) = e^{t/q}$. Nun gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Somit erhalten wir aus der Konvexität der Exponentialfunktion

$$F(x)G(x) = e^{s/p + t/q} \le \tfrac{1}{p} e^s + \tfrac{1}{q} e^t = \tfrac{1}{p} F(x)^p + \tfrac{1}{q} G(x)^q.$$

Die Ungleichung zwischen der linken und der rechten Seite gilt für beliebige $x \in \Omega$. Wir integrieren die Ungleichung und erhalten

$$\int\limits_\Omega FG \, d\mu \le \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Nach Umstellung erhalten wir daraus gerade die Höldersche Ungleichung.

(ii) Minkowskische Ungleichung: Wir wollen wieder ohne Einschränkung annehmen, dass die linke Seite der behaupteten Ungleichung strikt positiv und die Terme auf der rechten Seite der Ungleichung endlich sind. Aus der Konvexität von $[0,\infty) \ni t \to t^p$ erhalten wir

$$\left(\frac{|f+g|}{2}\right)^p \le \tfrac{1}{2}\left(|f|^p + |g|^p\right).$$

Somit gilt $\|f+g\|_{L^p} < \infty$.

Mit der Hölderschen Ungleichung und $p+q = pq$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^p}^p &= \int |f+g|^p = \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\ &\le \|f\|_{L^p} \cdot \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|g\|_{L^p} \cdot \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &= \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right) \cdot \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q} \\ &= \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\right) \cdot \|f+g\|_{L^p}^{p/q}.\end{aligned}$$

Umordnen liefert die Behauptung. □

Korollar 3.1.2. *$\mathbb{R}^n$ mit der p-Norm $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ ein Banachraum.*

Beweis. Die Dreiecksungleichung ist gerade die Minkowskische Ungleichung für Funktionen, die auf den Intervallen $[0,1)$, $[1,2)$, $\ldots$, $[n-1,n)$ konstant sind. Die übrigen Eigenschaften einer Norm sind elementar.

Sei $x_i = (x_{i,k})_{1\le k\le n}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Wegen $|x_{i,k} - x_{j,k}| \le \|x_i - x_j\|_p$ für alle $1 \le k \le n$ bilden auch die k-ten Komponenten eine Cauchyfolge. Setze $x := (x_k)_{1\le k\le n}$ mit $x_k := \lim\limits_{i\to\infty} x_{i,k}$. Dann folgt $\|x_i - x\|_p \to 0$ für $p \to \infty$, da sämtliche Komponenten konvergieren. □

Definition 3.1.3. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann heißen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, wenn es eine Konstante $c > 0$ mit

$$\tfrac{1}{c}\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le c \cdot \|u\|_1$$

für alle $u \in X$ gibt.

Theorem 3.1.4. *Auf $\mathbb{R}^n$ sind je zwei Normen äquivalent.*

Dieser Satz gilt auch für beliebige endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Die nachfolgend definierten Normen $l^p(\mathbb{N})$ sind für verschiedene Werte von p keine äquivalenten Normen auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Wir folgen [**?**].

Beweis. Sei $x = \sum\limits_{i=1}^n x^i e_i$ mit der Standardbasis $\{e_i\}_i$ des $\mathbb{R}^n$. Bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\|\cdot\|$ eine fixierte andere Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen nur die Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$. Für beliebige Normen folgt die Aussage dann aufgrund der Transitivität in der Definition der Äquivalenz von Normen.

(i) Es gilt

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^n \left|x^i\right| \cdot \|e_i\| \le c\|x\|_\infty \quad \text{mit} \quad c := \sum_{i=1}^n \|e_i\|.$$

(ii) Falls es kein $c > 0$ mit $c \cdot \|x\|_{L^\infty} \le \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, finden wir eine Folge $(x_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\|x_k\|_\infty > k$. Definiere die Folge $(y_k)_k$ durch $y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$. Diese Folge ist bezüglich der Supremumsnorm beschränkt. Somit sind die Komponenten y_k^i, $1 \le i \le n$, $k \in \mathbb{N}$, gleichmäßig beschränkt. Ohne Einschränkung dürfen wir also nach Auswahl einer Teilfolge annehmen, dass $y_k^i \to y^i$ für $k \to \infty$ konvergiert. Wir erhalten $\|y_k - y\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Somit gilt nach (i) auch $\|y_k - y\| \to 0$ für $k \to \infty$. Nun gilt $\|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{\|x_k\|_\infty} = \frac{1}{\|x_k\|_\infty} \to 0$ für $k \to \infty$. Wir erhalten $y = 0$. Weiterhin folgt $1 = \|y_k\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Widerspruch. $\square$

Theorem 3.1.5. *Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist der Raum*

$$l^p(\mathbb{N}) := \left\{ (x^n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_{l^p(\mathbb{N})} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p}$$

ein Banachraum.

Allgemeiner definiert man Räume $l^p(A)$ für Funktionen $f \colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_{l^p(A)} := \left(\sum_{x\in A} |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung und die Vollständigkeit:

Dreiecksungleichung: Seien $x, y \in l^p(\mathbb{N})$ Es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung auf $\mathbb{R}^k$ mit der entsprechenden Norm $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} |x^n|^p \right)^{1/p}$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{N} |x^n + y^n|^p \right)^{1/p} &\le \left(\sum_{n=1}^{N} |x^n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y^n|^p \right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y^n|^p \right)^{1/p} = \|x\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|y\|_{l^p(\mathbb{N})}.\end{aligned}$$

Somit ist $x + y$ mit komponentenweiser Addition wieder in $l^p(\mathbb{N})$ und mit $N \to \infty$ erhalten wir die Dreiecksungleichung.

Vollständigkeit: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $l^p(\mathbb{N})$. Dann folgt für $k \le N$ aus

$$\left|x_i^k - x_j^k\right| \le \left(\sum_{l=1}^{N} \left|x_i^l - x_j^l\right|^p \right)^{1/p} \le \|x_i - x_j\|_{l^p(\mathbb{N})},$$

dass auch $\left(x_i^k\right)_{i\in\mathbb{N}}$ für festes $k \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge ist. Definiere $x = (x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $x^k := \lim\limits_{i\to\infty} x_i^k$. Wir lassen $j \to \infty$ und erhalten

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left|x_i^k - x^k\right|^p \right)^{1/p} \le f(i)$$

mit $f(i) \to 0$ für $i \to \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $i \gg 1$ mit $f(i) \le \varepsilon$. Lasse nun $N \to \infty$ und erhalte $\|x_i - x\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \varepsilon$. Es folgt $\|x\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \|x_i\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|x - x_i\|_{l^p(\mathbb{N})} < \infty$. Somit ist $x \in l^p(\mathbb{N})$ und $l^p(\mathbb{N})$ ist vollständig. $\square$

3.2. Vollständigkeit ⋆.

Bemerkung 3.2.1. Um den Raum der messbaren Funktionen zu einem normierten Raum zu machen, betrachten wir Äquivalenzklassen von Funktionen und identifizieren Funktionen (ohne dies später explizit hervorzuheben), die fast überall übereinstimmen.

Sei $1 \le p < \infty$. Für alle messbaren Funktionen f auf Ω setzen wir
$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \left(\int\limits_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$
und definieren $L^p(\Omega, \mu)$ als den Raum aller messbaren Funktionen f mit
$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty.$$
Im Fall $p = \infty$ verfahren wir genauso, benutzen aber $\|f\|_\infty := \sup\limits_\Omega |f|$, das wesentliche Supremum von f.

Theorem 3.2.2. *Sei* $1 \le p \le \infty$. *Sei* μ *ein positives Maß auf* Ω. *Dann ist* $L^p(\Omega, \mu)$ *ein Banachraum.*

Beweis. Sei zunächst $1 \le p < \infty$. Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega, \mu)$. Gelte (nach Auswahl einer Teilfolge ohne Einschränkung) $\|f_{i+1} - f_i\|_{L^p} < 2^{-i}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren
$$g_k := \sum_{i=0}^{k} |f_{i+1} - f_i| \quad \text{und} \quad g := \sum_{i=0}^{\infty} |f_{i+1} - f_i|.$$
Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt $\|g_k\|_{L^p} < 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Fatou ($\int \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int f_n$ für $f_n \ge 0$), angewandt auf g_k^p, folgt $\|g\|_{L^p} \le 2$. Somit gilt fast überall $g(x) < \infty$. Also konvergiert
$$f_1(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{i+1}(x) - f_i(x))$$
für fast alle $x \in \Omega$. Wir definieren $f(x)$ als diesen Grenzwert für diese x und sonst $f(x) := 0$. Somit gilt fast überall
$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x).$$
Nach [**?**, Theorem 1.14] sind das Supremum und der Limes superior messbarer Funktionen selbst wieder messbar. Somit ist auch f messbar. Wir wollen nun zeigen, dass f_i auch in L^p gegen f konvergiert: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_{L^p} < \varepsilon$ für $m, n \ge N$. Sei $m > N$. Dann folgt mit Fatou
$$\int\limits_\Omega |f - f_m|^p \, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int\limits_\Omega |f_i - f_m|^p \, d\mu \le \varepsilon^p.$$
Hieraus folgt $f - f_m \in L^p(\Omega, \mu)$, also auch $f \in L^p(\Omega, \mu)$. Weiterhin folgt hieraus $\|f - f_m\|_{L^p} \to 0$ für $m \to \infty$.

Sei nun $p = \infty$. Definiere
$$A_k := \{x \in \Omega \colon |f_k(x)| > \|f_k\|_{L^\infty}\}$$
und
$$B_{m,n} := \{x \in \Omega \colon |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_n - f_m\|_{L^\infty}\}.$$
Setze $E := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \cup \bigcup\limits_{m,n\in\mathbb{N}} B_{m,n}$. Dann ist E als abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst wieder eine Nullmenge. In $\Omega \setminus E$ konvergiert f_n gleichmäßig gegen

eine Funktion, die wir f nennen, auf E setzen wir $f(x) := 0$. Es folgt $f \in L^\infty$ sowie $\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0$ für $n \to \infty$. □

Im Verlauf des Beweises haben wir auch das folgende Resultat mitbewiesen:

Theorem 3.2.3. *Sei Ω ein Raum mit positivem Maß μ. Sei $1 \le p \le \infty$. Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega, \mu)$ mit Grenzwert f. Dann besitzt f_n eine Teilfolge, so dass $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ konvergiert.*

3.3. **Räume der Hölderstetigen Funktionen.**

Definition 3.3.1. Die Oszillation von $f : (X, d) \to (Y, d)$ ist die Funktion

$$\omega_f : (0, \infty) \to [0, \infty], \quad \omega_f(\delta) = \sup_{d(x_1,x_2)<\delta} d(f(x_1), f(x_2)).$$

Man kann leicht zeigen: Gilt $\omega_f(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$, so ist f gleichmäßig stetig. Weiter gilt: eine Familie $\mathcal{F}$ von Abbildungen $f : X \to Y$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig, falls $\sup_{f\in\mathcal{F}} \omega_f(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$.

Beispiel 3.3.2. Sei $0 < \alpha \le 1$. Die α-HÏderkonstante von $f : (X, d) \to (Y, d)$ ist definiert durch

$$[f]_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha}.$$

f heiß t α-Hölderstetig wenn $[f]_\alpha < \infty$. Offenbar gilt

$$d(f(x), f(y)) = \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha} d(x, y)^\alpha \le [f]_\alpha \delta^\alpha, \quad \text{falls} d(x, y) \le \delta.$$

Die Oszillation erfüllt also die Abschätzung

$$\omega_f(\delta) \le [f]_\alpha \delta^\alpha. \tag{3.1}$$

Eine HÖlderstetige Funktion ist also gleichmäßig stetig, und für jedes $\Lambda < \infty$ ist die Familie

$$\mathcal{F} = \{f : X \to Y : [f]_\alpha \le \Lambda\}$$

gleichgradig stetig.

Für $u : X \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} = \|u\|_{C^0} + [u]_{\alpha,X} = \sup_{x\in X} |u(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha}.$$

Theorem 3.3.3. *$C^{0,\alpha}(X) = \{u \in C^0(X) : \|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} < \infty\}$ ist ein Banachraum.*

Beweis. □

4. Der Satz von Hahn-Banach

4.1. **Der Satz von Hahn-Banach.**
Der Satz von Hahn-Banach besagt, dass sich ein lineares Funktional normerhaltend fortsetzen lässt. Der Beweis benutzt das Zornsche Lemma.

Lemma 4.1.1 (Zornsches Lemma, Erinnerung $\star$)**.** *Sei M eine nichtleere Menge mit einer Teilordnung $\le$. Nehme an dass jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) eine obere Schranke $b \in M$ besitzt, d. h. dass $x \le b$ für alle $x \in \Lambda$ gilt. Dann enthält M ein maximales Element x_0, d. h. ein Element $x_0 \in M$, so dass aus $x_0 \le x$ bereits $x = x_0$ folgt. (Beachte, dass x_0 i. a. nicht eindeutig bestimmt ist.)*

Bemerkung. Eine Menge M mit einer Relation $\le$ heißt teilweise geordnet, wenn für alle $a, b, c \in M$ Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} a &\le a, \\ a \le b, b \le a &\Rightarrow a = b \\ a \le b, b \le c &\Rightarrow a \le c \end{aligned}$$

(1) $A \subset M$ heißt total geordnet, wenn für $a, b \in A$ gilt stets $a \le b$ oder $b \le a$.
(2) $b \in M$ heißt obere Schranke von A, wenn es $a \le b$ für alle $a \in A$ gilt.
(3) $m_0 \in M$ heißt maximales Element von M $\Leftrightarrow$ aus $m_0 \le m \in M$ folgt $m_0 = m$.

Für einen Beweis aus dem Auswahlaxiom verweisen wir auf Literatur oder Veranstaltungen zur Logik. Das Zornsche Lemma wurde bereits beim Beweis, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt, benutzt.

Wir zeigen zwei Varianten des Satzes von Hahn-Banach. Zunächst behandeln wir die etwas allgemeinere Version mit einer konvexen Funktion.

Theorem 4.1.2 (Satz von Hahn-Banach (mit einer konvexen Funktion))**.** *Sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $W \subset E$ ein Unterraum und $\varphi\colon W \to \mathbb{R}$ linear. Sei $p\colon E \to \mathbb{R}$ konvex und gelte $\varphi \le p$ auf W. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $\tilde\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ von φ mit $\tilde\varphi \le p$, d. h. eine lineare Abbildung $\tilde\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ mit $\tilde\varphi|_W = \varphi$ und $\tilde\varphi \le p$.*

Beweis.

(i) Sei $x_0 \notin W$. Wir wollen φ zunächst auf $W \oplus \langle x_0\rangle$ fortsetzen. Jedes Element $x \in W \oplus \langle x_0\rangle$ läßt sich in der Form $x = w + \lambda x_0$ mit $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ darstellen. Sei ψ eine lineare Fortsetzung von φ. Dann folgt

$$\psi(x) = \psi(w) + \lambda\psi(x_0) = \varphi(w) + \lambda\psi(x_0).$$

Können wir $\psi(x_0)$ so wählen, dass $\psi(x) \le p(x)$ für alle $x \in W \oplus \langle x_0\rangle$ gilt, so ist ψ die gesuchte Fortsetzung auf $W \oplus \langle x_0\rangle$.

Somit ist zu zeigen, dass $\psi(x_0)$ so gewählt werden kann, dass $\varphi(w) + \lambda\psi(x_0) \le p(w + \lambda x_0)$ für alle $\lambda \ne 0$ und alle $w \in W$ gilt. Dies ist (nach Unterscheidung für $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$) äquivalent zu

$$\sup_{\substack{w\in W\\ \mu>0}} \frac{\varphi(w) - p(w - \mu x_0)}{\mu} \le \psi(x_0) \le \inf_{\substack{z\in W\\ \lambda>0}} \frac{p(z + \lambda x_0) - \varphi(z)}{\lambda}.$$

Dazu wollen wir nachweisen, dass für alle $w, z \in W$ und alle $\lambda, \mu > 0$

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{p(z+\lambda x_0)}{\lambda} + \frac{p(w-\mu x_0)}{\mu}\right) \ge \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\varphi(w)}{\mu} + \frac{\varphi(z)}{\lambda}\right)$$

gilt. Der zusätzliche Vorfaktor erleichtert nun die Rechnungen. Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{\lambda+\mu}p(z+\lambda x_0) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}p(w-\mu x_0) \\ \ge{}& p\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}x_0 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w - \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}x_0\right) \\ ={}& p\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w\right) \ge \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w\right) \\ ={}& \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi(z) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi(w). \end{aligned}$$

Somit läßt sich φ wie gewünscht auf $W \oplus \langle x_0\rangle$ fortsetzen.

(ii) Die Fortsetzung auf ganz E erhalten wir mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Betrachte dazu die Menge $\mathcal{M}$ aller Fortsetzungen von φ mit $\varphi \le p$, d. h. die Menge aller Tupel (ψ, U), wobei $U \subset E$ ein Unterraum mit $W \subset U$ ist,

$\psi|_W = \varphi$ und $\psi \le p$ in U gelten. (φ, W) ist selber eine Fortsetzung von φ, also ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Auf $\mathcal{M}$ definieren wir eine Halbordnung durch $(\psi, U) \le (\tilde{\psi}, V)$, falls $U \subset V$ und $\tilde{\psi}|_U = \psi$ gelten. Sei also $\Lambda \subset \mathcal{M}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$, $\Lambda = \{(\psi_i, U_i) \colon i \in I\}$ für eine geeignete Indexmenge. Dann ist durch (ψ, U) mit $U := \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ und $\psi(x) := \psi_i(x)$ für $x \in U_i$ eine obere Schranke gegeben: $U \subset E$ ist ein Unterraum, ψ ist wohldefiniert, linear, stimmt auf W mit φ überein und erfüllt $\psi(x) \le p(x)$ für alle $x \in U$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also ein maximales Element. Dieses muss auf ganz E definiert sein, denn sonst könnte man es nach den obigen Überlegungen auf $U \oplus \langle x_0 \rangle$ für ein $x_0 \in E \setminus U$ fortsetzen. Dies widerspräche der Maximalität. $\square$

Theorem 4.1.3 (Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale)**.** *Sei E ein normierter Raum, $W \subset E$ ein Unterraum und $\varphi \in W^*$. Dann gibt es eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in E^*$ von φ, d. h. eine Abbildung $\tilde{\varphi} \in E^*$ mit $\tilde{\varphi}|_W = \varphi$ und $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Beweis.

(i) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt dies gerade aus dem Satz von Hahn-Banach mit einer konvexen Funktion: Die Norm ist wegen

$$\|tx + (1-t)y\| \le \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\|$$

für alle $x, y \in E$ und $t \in [0,1]$ konvex. Sei ohne Einschränkung $\|\varphi\| = 1$. Setze $p(x) := \|x\|$. Dann gilt $\varphi(x) \le \|x\|$. Für die Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ erhalten wir

$$\pm\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(\pm x) \le p(\pm x) = \|x\|,$$

also $\|\tilde{\varphi}\| \le 1$ und

$$\|\tilde{\varphi}\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|\tilde{\varphi}(x)\| \ge \sup_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} \|\tilde{\varphi}(x)\| = \sup_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} \|\varphi(x)\| = 1.$$

Somit ist $\|\tilde{\varphi}\| = 1$.

(ii) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Wir fassen E als reellen Vektorraum auf und bezeichnen diesen mit $E_{\mathbb{R}}$. Sei $\varphi \in E^*$. Es gilt $\varphi = \operatorname{Re}\varphi + i \operatorname{Im}\varphi$. Wegen

$$\operatorname{Re}\varphi(ix) + i \operatorname{Im}\varphi(ix) = \varphi(ix) = i\varphi(x) = i \operatorname{Re}\varphi(x) - \operatorname{Im}\varphi(x)$$

gilt $\operatorname{Re}\varphi(ix) = -\operatorname{Im}\varphi(x)$. $\operatorname{Re}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ sind reelle Formen auf $E_{\mathbb{R}}$. Daher können wir jede komplexe Form φ als

$$\varphi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x) - i \operatorname{Re}\varphi(ix) \tag{4.1}$$

für $x \in E$ schreiben. Umgekehrt sei ψ eine reellwertige Form auf $E_{\mathbb{R}}$. Dann wird durch

$$\varphi(x) := \psi(x) - i\psi(ix)$$

eine komplexe Form auf E definiert, es gilt nämlich insbesondere $\varphi(ix) = \psi(ix) - i\psi(-x) = i\psi(x) - i^2\psi(ix) = i\varphi(x)$. Für die Norm gilt $\|\varphi\| = \|\psi\|$, denn es gilt einmal $|\varphi(x)| = \sqrt{|\psi(x)|^2 + |\psi(ix)|^2} \ge |\psi(x)|$. Andererseits gibt es zu $x \in E$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $|\varphi(x)| = e^{it}\varphi(x) = \varphi\left(e^{it}x\right)$. Da ψ reellwertig ist und $|\varphi(x)| \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$|\varphi(x)| = \psi\left(e^{it}x\right) \le \|\psi\| \cdot \|x\|$$

für alle $x \in E$.

Sei also $\varphi \in W^*$. Setze $\psi := \operatorname{Re}\varphi \in (W_{\mathbb{R}})^*$. Dann besitzt ψ eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{\psi}$ nach $E_{\mathbb{R}}$. Somit ist

$$\tilde{\varphi}(x) := \tilde{\psi}(x) - i\tilde{\psi}(ix)$$

für $x \in E$ eine normerhaltende Fortsetzung von φ auf E. Wegen (4.1) handelt es sich um eine Fortsetzung. □

Korollar 4.1.4. *Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein linearer Teilraum, d. h. Unterraum, und $x_0 \in X$. Setze $d := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\|$. Sei $d > 0$. Dann gibt es $\varphi \in X^*$ mit $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x_0) = d$ und $\varphi|_M = 0$.*

Beweis. Definiere λ auf $M \oplus \langle x_0 \rangle$ durch $\lambda(y + \alpha x_0) := \alpha d$ für $y \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda\| &= \sup_{\substack{y+\alpha x_0 \neq 0 \\ y \in M,\, \alpha \in \mathbb{K}}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \\ y \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \\ z \in M}} \frac{|\alpha d|}{\| - \alpha z + \alpha x_0\|} \\ &= \sup_{z \in M} \frac{d}{\|x_0 - z\|} = \frac{d}{\inf\limits_{z \in M} \|x_0 - z\|} = \frac{d}{d} = 1.\end{aligned}$$

Eine normtreue Fortsetzung φ aus dem Satz von Hahn-Banach liefert die Behauptung. □

Korollar 4.1.5. *Sei X ein normierter Raum und X' sein Dualraum.*
1) Sei $x \in X$. Dann gilt

$$\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in X', \\ \|\varphi\| = 1}} |\langle x, \varphi \rangle|.$$

Das Supremum wird angenommen, d. h. es gibt ein $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\|x\| = \langle x, \varphi \rangle$.
2) Punkte in X lassen sich durch X' trennen. D.h., ist $\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in X'$, so gilt $x = 0$.

Beweis. 1). Wähle in Korollar 4.1.4 $M = \{0\}$., also $d = \|x\|$. 2) folgt aus 1). □

Korollar 4.1.6. *Sei X ein normierter Raum und X' sein Dualraum. Sei $X'' := (X')'$ der Dualraum von X'. Dann ise die Abbildung*

$$J : X \to X'', \quad (Jx)(\varphi) := \varphi(x)$$

eine isometrische (normtreue) Einbettung.

Proof. Übung. □

Bemerkung. Ein Banachraum X heißt *reflexiv*, wenn die kanonische Einbettung J surjektiv ist. Aus Abschnitt 3 wissen wir, dass l^p, $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv sind, aber nicht $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, l^1, l^∞. Die Hilberträume sind reflexiv.

Korollar 4.1.7. *Sei X normierter Vektorraum. Ist X^* separabel, so auch X.*

Proof. Da X^* separabel ist, können wir eine dichte Folge φ_k in der Menge $\{\varphi \in X^* : \|\varphi\| = 1\}$ wählen. Wähle $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\varphi_k(x_k) \geq \frac{1}{2}$. Angenommen es ist

$$V := \overline{\operatorname{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \neq X.$$

Nach Korollar 4.1.6 gibt es dann ein $\varphi \in X^*$ mit $\varphi_{|V} = 0$ und $\|\varphi\| = 1$. Nach Auswahl einer Teilfolge gilt $\varphi \to \varphi$ in X^*. Es folgt

$$0 = \varphi(x_k) = \varphi_k(x_k) + (\varphi - \varphi_k)(x_k) \geq \frac{1}{2} - \|\varphi - \varphi_k\| > 0,$$

für k groß, ein Widerspruch. □

Lemma 4.1.8. *Sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ offen und konvex, sowie $0 \in K$. Dann ist das Minkowski-Funktional*

$$p(x) = \inf \left\{ r > 0 : \frac{x}{r} \in K \right\}$$

convex (sublinear) und $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

Beweis. Wegen $0 \in K = \mathring{K}$ existiert ein $\rho > 0$ mit $B_{2\rho}(0) \subset K$. Es folgt $\rho \frac{x}{\|x\|} \in K$ für alle x. Somit $p(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\| < \infty$.

Es ist leicht zu zeigen, dass gilt es für $t > 0$:

$$\frac{x}{t} \in K \Leftrightarrow t > p(x).$$

Insbesondere $K = \{x : p(x) < 1\}$ und $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für $\lambda \geq 0$. Sind $\frac{x}{r}, \frac{y}{s} \in K$, so folgt aufgrund der Konvexität auch $\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\frac{x}{r} + \frac{s}{r+s}\frac{y}{s} \in K$. Somit erhalten wir $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. □

Theorem 4.1.9 (Trennungssatz)**.** *Sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ offen und konvex. Sei $x_0 \in \complement K$. Dann zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varphi \in X^*$ mit*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \alpha \quad \textit{für } x \in K \quad \textit{und} \quad \operatorname{Re}\varphi(x_0) \geq \alpha.$$

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. oBdA $\alpha = 1$ und $0 \in K$ nach Translation. Sei p wie in Lemma 4.1.8. Definiere $f\colon \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ durch $f(\lambda x_0) := \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt $f(\lambda x_0) = \lambda \leq p(\lambda x_0)$ für $\lambda > 0$ (denn $\frac{\lambda x_0}{\lambda} = x_0 \notin K$) und $f(\lambda x_0) \leq 0 \leq p(\lambda x_0)$ für $\lambda \leq 0$. Somit gibt es nach Hahn-Banach eine lineare Fortsetzung $F\colon X \to \mathbb{R}$ von f mit $F \leq p$. Es gilt $F \leq p < 1$ in K. Daher ist F stetig. Weiterhin gilt $F(x_0) = f(x_0) = 1$.

Da es ein $\rho > 0$ mit $\overline{B_\rho(0)} \subset K$ gibt, erhalten wir $\frac{x}{\frac{1}{\rho}\|x\|} \in K$ für beliebiges $x \in X$, also $p(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$ und damit $F(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$. Ebenso folgt $-F(x) = F(-x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$. Somit ist F stetig und wir erhalten die Behauptung mit $\alpha = 1$ und $\varphi = F$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so fassen wir X als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf und erhalten ein $F_\mathbb{R} \in X^*_\mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Wie beim Beweis des Satzes von Hahn-Banach erhält man die Aussage für $\varphi(x) = F(x) := F_\mathbb{R}(x) - iF_\mathbb{R}(ix)$. □

Theorem 4.1.10 (Trennungssatz für konvexe Mengen)**.** *Sei X ein normierter Raum, A und B konvex, A offen und $A \cap B = \emptyset$. Dann können A, B durch ein $\varphi \in X'$ getrennt werden, d.h.,*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \operatorname{Re}\varphi(y), \quad \forall x \in A, y \in B.$$

Beweis. Setze

$$\begin{aligned} K &= \{x - y : x \in A, y \in B\} \\ &= \cup_{y \in B}\{x - y : x \in A\}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass K offen, konvex ist mit $0 \notin K$, da $A \cap B = \emptyset$. Dann wenden wir den obigem Satz 4.1.9 an und erhalten ein $\varphi \in X'$ mit $\operatorname{Re}\varphi(z) < 0$, für alle $z \in K$. Daraus folgt

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \operatorname{Re}\varphi(y), \quad \forall x \in A, y \in B.$$

□

5. Hilberträume

5.1. Hilberträume.

Definition 5.1.1. Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf H ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H\times H\to\mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle u,u\rangle\ge 0$ für alle $u\in H$; $\langle u,u\rangle=0$ gilt genau dann, wenn $u=0$ ist,
(ii) $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$ sowie $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$ für alle $u,v,w\in H$,
(iii) $\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$ für alle $u,v\in H$ und alle $\lambda\in\mathbb{C}$,
(iv) $\overline{\langle u,v\rangle}=\langle v,u\rangle$.

Einen $\mathbb{K}$-Vektorraum H mit einem Skalarprodukt nennen wir Skalarproduktraum oder Prähilbertraum.

Beispiele 5.1.2.

(i) Auf $H=\mathbb{K}^n$ mit $x=\left(x^i\right)_{1\le i\le n}, y\in H$ ist
$$\langle x,y\rangle:=\sum_{i=1}^n x^i\overline{y^i}$$
ein Skalarprodukt.

(ii) Auf $H=L^2(\Omega)$ ist
$$\langle f,g\rangle=\int\limits_\Omega f\overline{g}$$
ein Skalarprodukt.

Beachte, dass das Integral aufgrund der Hölderschen Ungleichung wohldefiniert ist, es gilt nämlich
$$\left|\int\limits_\Omega f\overline{g}\right|\le\left(\int|f|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int|g|^2\right)^{1/2}.$$

(iii) Analog sieht man, dass $l^2(\mathbb{N})$ mit $\left\langle\left(x^i\right),\left(y^i\right)\right\rangle:=\sum\limits_{i=1}^\infty x^i\overline{y^i}$ ein Prähilbertraum ist.

Theorem 5.1.3. *Sei H ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|u\|:=\sqrt{\langle u,u\rangle}$ eine Norm auf H.*

Auf Skalarprodukträumen wollen wir stets diese Norm verwenden.

Beweis. Lineare Algebra. ☐

Theorem 5.1.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.**
Sei H ein Skalarproduktraum. Dann gilt $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$ für alle $u,v\in H$.

Beweis. Lineare Algebra. ☐

Definition 5.1.5. Ist ein Skalarproduktraum H mit der induzierten Norm/Metrik vollständig, so nennen wir H einen Hilbertraum.

Bemerkung 5.1.6. Sei H ein Skalarproduktraum und $\hat{H}$ die Vervollständigung als normierter Raum. Seien $H\ni u_n\to u\in\hat{H}$ sowie $H\ni v_n\to v\in\hat{H}$. Dann lässt sich das Skarprodukt auf genau eine Art und Weise stetig nach $\hat{H}$ fortsetzen, sodass $\hat{H}$ ein Hilbertraum wird, nämlich durch
$$\langle u,v\rangle_{\hat{V}}:=\lim_{n\to\infty}\langle u_n,v_n\rangle_V.$$

Lemma 5.1.7 (Parallelogrammgleichung). *Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

für alle $u, v \in H$.

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Lemma 5.1.8 (Polarisationsformel). *Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2$$

für $\mathbb{R}$-Vektorräume und

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \equiv \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|x + i^k y\right\|^2$$

für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum und alle $x, y \in H$.

Mit der Polarisationsformel kann man aus der Norm eines Skalarproduktraumes das Skalarprodukt rekonstruieren.

Weiterhin folgt aufgrund der Stetigkeit der Norm, dass die Abbildung $H \times H \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Beweis. Direktes Nachrechnen. Im komplexen Fall ergeben die Terme mit i gerade den Imaginärteil. □

Definition 5.1.9. Sei H ein Prähilbertraum.

(i) Zwei Vektoren $u, v \in H$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v\rangle = 0$ gilt. Wir schreiben $u \perp v$.
(ii) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Vektoren heißt orthonormal, falls $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$ gilt.
(iii) Zwei Unterräume $U_1, U_2 \subset H$ stehen orthogonal aufeinander, $U_1 \perp U_2$, falls $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$ gilt.
(iv) Sei $U \subset H$ beliebig. Dann ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ durch

$$U^\perp := \{v \in H : \langle u, v\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

definiert.

Lemma 5.1.10. *Sei H ein Hilbertraum, $M \subset H$ beliebig.*

(i) Dann ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H.
(ii) Es gilt $M^\perp = (\overline{M})^\perp = \langle M\rangle^\perp$. Auch mehrfaches Bilden der linaren Hülle oder Abschließen verändert das Ergebnis nicht mehr.
(iii) Es gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Beweis.

(i) Sei $y \in H$. Definiere f durch $x \mapsto \langle x, y\rangle$. Da f stetig ist, ist $\{y\}^\perp = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. Wegen $M^\perp := \bigcap\limits_{y\in M} \{y\}^\perp$ ist auch $M^\perp$ abgeschlossen.

Der Nachweis, dass $M^\perp$ ein Unterraum ist, ist einfach.

(ii) Aus $A \subset B$ folgt stets $A^\perp \supset B^\perp$. Also ist nur $M^\perp \subset \left(\overline{M}\right)^\perp$ und $M^\perp \subset \langle M\rangle^\perp$ zu zeigen.

(a) $M^\perp \subset \left(\overline{M}\right)^\perp$: Seien $x \in M^\perp$ und $y \in \overline{M}$. Dann ist $\langle x, y\rangle = 0$ zu zeigen. Zu y gibt es $y_n \in M$ mit $y_n \to y$. Da das Skalarprodukt stetig ist, folgt aus $0 = \langle x, y_n\rangle$ auch $0 = \langle x, y\rangle$.

(b) $M^\perp \subset \langle M\rangle^\perp$: Seien $x \in M^\perp$ und $y \in \langle M\rangle$. Dann gibt es endlich viele $m_i \in M$ und $\lambda^i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le N$, mit $y = \sum\limits_{i=1}^N \lambda^i m_i$. Es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle m_i, x\rangle = \langle y, x\rangle.$$

Die Inklusion folgt.

(iii) Sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann folgt $0 = \langle x, x\rangle$, also $x = 0$. Offensichtlicherweise ist $0 \in M \cap M^\perp$. □

Proposition 5.1.11 (Pythagoras)**.** *Sei H ein Skalarproduktraum. Sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine orthonormale Familie in H. Sei $x \in H$. Dann gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2.$$

Beweis. Schreibe

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i}_{=:u_1} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i}_{=:u_2}.$$

Dann gilt $u_1 \perp u_2$. Also folgt $\|x\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$ durch direktes Ausmultiplizieren. Aufgrund der Orthogonalität der $(x_i)_i$ erhalten wir weiterhin

$$\|u_1\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2.$$

Somit folgt die behauptete Gleichheit. □

Korollar 5.1.12 (Besselsche Ungleichung)**.**
Sei H ein Prähilbertraum und sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine orthonormale Familie in H. Dann folgt

$$\|x\|^2 \ge \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2$$

für alle $x \in H$.

Aufgrund der Monotonie der Summe und der gleichmäßigen oberen Schranke $\|x\|^2$ gilt die Ungleichung auch für beliebige, d. h. nicht notwendigerweise endliche, orthonormale Familien in H.

Definition 5.1.13.

(i) Seien H_1, H_2 Prähilberträume. Dann heißt $U \in L(H_1, H_2)$ Isometrie, falls

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in H_1$ gilt.

(ii) Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann heißt eine surjektive Isometrie Hilbertraumisomorphismus oder unitär. Gibt es einen Hilbertraumisomorphismus $U \in L(H_1, H_2)$, so heißen H_1 und H_2 isomorph.

Definition 5.1.14 (Direkte Summe)**.**

(i) Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann definieren wir die direkte Summe als den Vektorraum $H_1 \oplus H_2 := \left\{\left(x^1, x^2\right) : x^1 \in H_1,\, x^2 \in H_2\right\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \left(x^1, x^2\right), \left(u^1, u^2\right)\right\rangle := \left\langle x^1, u^1\right\rangle + \left\langle x^2, u^2\right\rangle.$$

(ii) Seien $(H_i)_{i\in I}$ Hilberträume. Dann definieren wir
$$\bigoplus_{i\in I} H_i := \left\{ \left(x^i\right)_{i\in I} : \sum_{i\in I} \left\|x^i\right\|_{H_i}^2 < \infty \right\}$$
mit dem Skalarprodukt
$$\left\langle \left(x^i\right), \left(y^i\right) \right\rangle := \sum_{i\in I} \left\langle x^i, y^i \right\rangle .$$

Bemerkung 5.1.15.

(i) Die direkte Summe von Hilberträumen ist wieder ein Hilbertraum. Bei der unendlichen direkten Summe geht man dabei analog zum Beweis für $l^2(\mathbb{N})$ vor um die Vollständigkeit nachzuweisen.

(ii) In der (Linearen) Algebra fordert man, dass nur in endlich vielen Komponenten ein von Null verschiedener Eintrag stehen darf. Hier bekommt man mit einer solchen Forderung i. a. keinen vollständigen Raum. Nach Definition können aber höchstens abzählbar viele Einträge von Null verschieden sein; sonst konvergiert die Summe nicht.

(iii) Den Nachweis, dass die unendliche Summe, mit der wir das Skalarprodukt definieren, existiert, führt man wie bei l^2 oder L^2.

(iv) Versieht man die l^2-Norm mit Gewichten, betrachtet also $\sum\limits_{i\in I} a_i\langle x_i, y_i\rangle$ für $a_i > 0$, so bekommt man i. a. nicht isomorphe Hilberträume.

5.2. **Projektion auf konvexe Teilmengen.**

Definition 5.2.1 (Konvexität)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $K \subset V$ konvex, falls für alle $x, y \in K$ und alle $t \in [0,1]$ auch
$$tx + (1-t)y \in K$$
gilt.

Theorem 5.2.2 (Projektion auf konvexe Teilmengen)**.**
Sei H ein Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $y_0 \in H$. Dann gibt es ein nächstes Element $x_0 \in K$, d. h. ein $x_0 \in K$ mit $\|y_0 - x_0\| \le \|y_0 - x\|$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wir benutzen die sogenannte direkte Methode der Variationsrechnung. Ohne Einschränkung Sei $y_0 = 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge in K für die Funktion $K \ni x \mapsto \|x\|$, gelte also $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \inf\limits_{x\in K} \|x\| =: d$. Zunächst wollen wir nachweisen, dass x_n eine Cauchyfolge ist. Aufgrund der Parallelogrammgleichung gilt
$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\Bigg\| \underbrace{\frac{x_n + x_m}{2}}_{\in K} \Bigg\|^2 \\ &\le 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2 \to 0 \end{aligned}$$
für $\min\{m,n\} \to \infty$. Da K als abgeschlossene Teilmenge von H vollständig ist, existiert $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ in K. Da die Norm auf H stetig ist, folgt $\|x_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = d$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\hat{x}_0 \in K$ ein weiteres nächstes Element. Da wir gezeigt haben, dass jede Minimalfolge eine Cauchyfolge ist, gilt dies auch für die Folge
$$z_n := \begin{cases} x_0 & \text{für gerades n,} \\ \hat{x}_0 & \text{für ungerades n.} \end{cases}$$
Somit folgt $x_0 = \hat{x}_0$. $\square$

Lemma 5.2.3. *Sei H ein Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $\pi\colon H \to K$ die Abbildung, die $x \in H$ den Punkt $p \in K$ mit $\|x-p\| = \inf\limits_{q\in K} \|x-q\|$ zuordnet. Dann ist π stetig.*

Beweis. Sei $x \in H$. Setze $d(x) := d(x, K) = \inf\limits_{y\in K} \|x-y\| = \|x-\pi(x)\|$. Dann ist d stetig: Es gilt nämlich für $x, y \in H$ zunächst $d(y) = \|y-\pi(y)\| \le \|y-\pi(x)\|$ und damit folgt

$$d(y) - d(x) \le \|y-\pi(x)\| - \|x-\pi(x)\| \le \|(y-\pi(x)) - (x-\pi(x))\| = \|x-y\|.$$

Aus Symmetriegründen folgt die Stetigkeit.

Angenommen, π ist nicht stetig. Dann gibt es zu K einen Punkt, ohne Einschränkung nach Verschiebung der Situation den Nullpunkt, ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $x_n \to 0$ mit $\|\pi(x_n) - \pi(0)\| > \varepsilon$. Nehme an, dass $\|0 - \pi(0)\| = r > 0$ ist; sonst folgt $0 \in K$, $\pi(0) = 0$, $d(0) = 0$ und damit $d(x_n) \to 0$ für $x_n \to 0$, also auch $\pi(x_n) \to 0$.

Die Idee ist nun, auszunutzen, dass $\pi(0)$ und $\pi(x_n)$ beinahe auf einer Sphäre mit Radius r liegen, aber ihr Mittelpunkt, der aufgrund der Konvexität ebenfalls in K liegt, näher liegt, woraus wir einen Widerspruch erhalten.

Da $x \mapsto \|x - \pi(x)\|$ stetig ist, folgt $\|x_n - \pi(x_n)\| \to r$ für $n \to \infty$. Wir erhalten also mit der Parallelogrammgleichung

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Wir wenden dies mit $x = \pi(0)$ und $y = \pi(x_n)$ an und erhalten wegen $\frac{\pi(0)+\pi(x_n)}{2} \in K$

$$\begin{aligned} r^2 &= d(0)^2 \le \left\|0 - \frac{\pi(0)+\pi(x_n)}{2}\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|\pi(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|\pi(x_n)\|^2 - \frac{1}{4}\|\pi(0) - \pi(x_n)\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}d(0)^2 + \frac{1}{2}\left(\|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\|\right)^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \\ &= \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\|\pi(x_n) - x_n\|^2}_{=d(x_n)^2\to r^2} + \underbrace{\|x_n\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|\pi(x_n) - x_n\|}_{\to r} + \frac{1}{2}\underbrace{\|x_n\|^2}_{\to 0} - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \\ &\to r^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Widerspruch. ◻

Zu Theorem 5.2.2 erhalten wir

Korollar 5.2.4. *Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann können wir jeden Vektor $z \in H$ eindeutig als $z = x + y$ mit $x \in M$ und $y \in M^\perp$ schreiben, d. h. es gilt $H = M \oplus M^\perp$.*

Aus der Konstruktion und Lemma 5.2.3 erhalten wir, dass (x, y) stetig von z abhängt.

Im nachfolgenden Beweis und gegebenenfalls später notieren wir manchmal nur den Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn sich der Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ leicht aus dem Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ablesen lässt.

Beweis. Sei $z \in H$. Sei $x \in M$ der Punkt in M mit minimalem Abstand zu z. Solch ein x existiert nach Theorem 5.2.2. Setze $y := z - x$.

Wir behaupten, dass $y \in M^\perp$ ist. Nach Definition von x folgt

$$\|z-x\|^2 \le \|z-x+\lambda u\|^2 = \|z-x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, z-x\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $u \in M$. Aus $0 \le \operatorname{Re}(\lambda\langle u, z-x\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2$ folgt für reelle λ, dass $0 = \operatorname{Re}(\langle u, z-x\rangle)$ und für $\lambda = -it$, $t \in \mathbb{R}$, dass $0 = \operatorname{Im}(\langle u, z-x\rangle)$ gilt. Also ist $y \in M^\perp$.

Zur Eindeutigkeit: Gelte $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ mit $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M^\perp$. Dann folgt $M \ni x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in M^\perp$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ erhalten wir hieraus $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. □

Theorem 5.2.5 (Riesz)**.** *Sei X ein Hilbertraum und $T \in X^*$. Dann existiert genau ein $x_T \in X$ mit*

$$Tx = \langle x, x_T\rangle \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Es gilt $\|T\| = \|x_T\|$. Die Abbildung $I\colon X^* \to X$ mit $T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d. h. bis auf komplexes Konjugieren von Skalaren linear).

Beweis.

(i) Konstruktion von x_T: $M := N(T) = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen. Also ist $X = M \oplus M^\perp$ nach Korollar 5.2.4. Im Falle $M = X$ setzen wir $x_T := 0$. Gelte daher ab jetzt $M \ne X$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$. Dann folgt $Ty \ne 0$. Definiere $x_T := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y$. Wir erhalten $\|x_T\| = \frac{|Ty|}{\|y\|} \ne 0$ und damit $Tx_T = \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot Ty = \|x_T\|^2 \ne 0$.

Behauptung: Es gilt $Tx = \langle x, x_T\rangle$ für alle $x \in X$. Wir schreiben

$$x = \frac{Tx}{Tx_T} x_T + \left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T\right) =: x_\perp + x_M.$$

Die Notation legt nahe, dass $x_\perp \in M^\perp$ und $x_M \in M$ gelten. Die erste Behauptung ist klar, die zweite folgt aus

$$Tx_M = T\left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T\right) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = 0$$

nach Definition von M. Wir erhalten aus den obigen Rechnungen

$$\langle x, x_T\rangle = \langle x_\perp + x_M, x_T\rangle = \frac{Tx}{Tx_T}\|x_T\|^2 + 0 = \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = Tx.$$

(ii) $I\colon T \mapsto x_T$ ist eine Isometrie: Es gilt $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |Tx| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |\langle x, x_T\rangle| \le \|x_T\|$ sowie $\|T\| \ge \left|T\left(\frac{x_T}{\|x_T\|}\right)\right| = \|x_T\|$ aufgrund der obigen Rechnungen.

(iii) x_T ist eindeutig bestimmt: Für ein weiteres $\tilde{x}_T$ mit $Tx = \langle x, x_T\rangle = \langle x, \tilde{x}_T\rangle$ für alle x folgt $0 = \langle x, x_T - \tilde{x}_T\rangle$ für alle x; wir wählen $x = x_T - \tilde{x}_T$ und erhalten $x_T = \tilde{x}_T$.

(iv) I ist konjugiert linear: Für $T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ erhalten wir

$$Tx = \lambda_1 T_1 x + \lambda_2 T_2 x = \lambda_1\langle x, x_{T_1}\rangle + \lambda_2\langle x, x_{T_2}\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda_1} x_{T_1} + \overline{\lambda_2} x_{T_2}\right\rangle$$

und daher $IT = x_T = \overline{\lambda_1} x_{T_1} + \overline{\lambda_2} x_{T_2} = \overline{\lambda_1} IT_1 + \overline{\lambda_2} IT_2$.

(v) I ist surjektiv: Zu $y \in X$ ist durch $Tx := \langle x, y\rangle$ ein lineares Funktional mit $IT = y$ definiert.

(vi) I ist injektiv, da $\|T\| = \|x_T\|$ gilt. □

Theorem 5.2.5 impiezirt, dass Hilberträume reflexiv sind.

6. Der Bairesche Kategoriesatz

6.1. **Der Bairesche Kategoriesatz und Anwendungen.**

Definition 6.1.1. Sei E ein metrischer Raum.

(i) Eine Menge $A \subset E$ heißt *nirgends dicht*, falls $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ gilt.

(ii) Eine Menge $A \subset E$, die sich als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen schreiben läßt, heißt von *erster Kategorie* oder *mager*.
(iii) Eine Menge $A \subset E$, die nicht von erster Kategorie ist, heißt von *zweiter Kategorie* oder *fett*.

Beispiele 6.1.2.
(i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist von erster Kategorie.
(ii) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ ist aufgrund des (nachfolgend bewiesenen) Baireschen Kategoriesatzes von zweiter Kategorie, denn sonst wäre $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ als abzählbare Vereinigung von mageren Mengen darstellbar.

Theorem 6.1.3 (Bairescher Kategoriesatz)**.** *Sei E ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset E$ mager. Dann ist $E \setminus A$ dicht in E. Insbesondere ist E eine Menge zweiter Kategorie.*

Beweis.
(i) Da A eine Menge erster Kategorie ist, gibt es Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{mit} \quad \mathring{\overline{A}}_n = \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass alle Mengen A_n abgeschlossen sind, sonst ersetzen wir sie durch $\overline{A_n}$. Definiere $G_n := E \setminus A_n \equiv \complement A_n$. Dann sind die Mengen G_n offen. Setze

$$G := \complement A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Sei nun $\emptyset \neq \Omega \subset E$ offen. Wir behaupten, dass $G \cap \Omega \neq \emptyset$ gilt.
(ii) Wir konstruieren eine Folge von offenen Kugeln B_n mit $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \subset \overline{B_n} \subset \Omega \cap G_n$ für alle n mit $\operatorname{diam} B_n \to 0$. Aus der Vollständigkeit von E folgt dann

$$\emptyset \neq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B_k} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega \cap G_n \subset \Omega \cap G.$$

Hieraus erhalten wir den Baireschen Kategoriesatz.
(iii) Konstruktion der Kugeln B_n: Da jede der Mengen A_n abgeschlossen und nirgends dicht ist, ist der Schnitt einer beliebigen offenen Menge mit G_n offen und nicht leer.

Somit gibt es zur offenen Menge Ω eine Kugel B_0 mit $\operatorname{diam} B_0 < 1/0 = \infty$ und $\overline{B_0} \subset \Omega \cap G_0$. Zu B_0 gibt es eine Kugel B_1 mit $\operatorname{diam}(B_1) < 1/1$ und $\overline{B_1} \subset B_0 \cap G_1$. ... Zu B_i gibt es eine Kugel B_{i+1} mit $\operatorname{diam}(B_{i+1}) < \frac{1}{i+1}$ und $\overline{B_{i+1}} \subset B_i \cap G_{i+1}$. ... Somit sind die oben verwendeten Kugeln konstruiert. ☐

Der Beweis impliziert

Korollar 6.1.4. *Sei (E,d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der Durchschnitt einer abzählbaren Familie $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von dichten offenen Teilmengen von E wieder dicht in E.*

Beweis. Das Korollar folgt natürlich auch aus dem Satz: Falls nicht, so gibt es $r > 0$ und $x \in E$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \complement \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Die Mengen $C_n := \complement G_n \cap \overline{B_r(x)}$ sind abgeschlossen und erfüllen $\mathring{C}_n = \emptyset$. Aus $\overline{B_r(x)} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ erhalten wir einen Widerspruch zum Baireschen Kategoriesatz. ☐

Die Bezeichnungen „Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit“ und „Satz von Banach-Steinhaus“ sind in der Literatur nicht klar getrennt.

Theorem 6.1.5 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie in $L(E,F)$, die punktweise beschränkt ist, d. h. es gibt für alle $x \in E$ ein $c(x) > 0$ mit*

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\| \le c(x).$$

Dann ist die Familie gleichmäßig beschränkt, d. h. es gibt ein $C > 0$ mit

$$\sup_{i\in I} \|A_i\| \le C.$$

Beweis. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$W_n := \left\{ x \in E\colon \sup_{i\in I} \|A_i x\| \le n \right\} = \bigcap_{i\in I} \underbrace{\{x \in E\colon \|A_i x\| \le n\}}_{=\text{ abgeschlossen}}.$$

W_n ist als Schnitt von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen. Nach Voraussetzung gilt $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Nach dem Baireschen Kategoriesatz gibt es somit ein W_n mit $\mathring{W}_n \neq \emptyset$. Also gibt es $x_0 \in E$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(x_0) \subset W_n$ und

$$\sup_{i\in I} \sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|A_i x\| \le n.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $i \in I$

$$n \ge \sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|A_i x\| = \sup_{y\in B_\rho(0)} \|A_i(y + x_0)\| \ge \underbrace{\sup_{y\in B_\rho(0)} \|A_i y\|}_{=\rho\|A_i\|} - \underbrace{\|A_i x_0\|}_{\le c(x_0)}.$$

Umordnen liefert die behauptete in $i \in I$ gleichmäßige Schranke für $\|A_i\|$. □

Als direkte Folgerung erhalten wir

Theorem 6.1.6 (Banach-Steinhaus)**.** *Sei E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen $A_i \in L(E,F)$, die punktweise beschränkt ist. Dann ist $(A_i)_{i\in I}$ gleichmäßig stetig (d. h. δ in der üblichen Definition von Stetigkeit hängt nur von ε und x_0 ab). (Aufgrund der Linearität ist die Familie sogar gleichmäßig gleichgradig stetig, d. h. δ hängt auch nicht mehr von x_0 ab.)*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $i \in I$ und alle $x, y \in E$ mit $\|x - y\| < \delta$ auch $\|A_i x - A_i y\| < \varepsilon$ gilt. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es ein $c > 0$ mit $\|A_i\| \le c$ für alle i. Aus $\|A_i x - A_i y\| = \|A_i(x - y)\| \le \|A_i\| \cdot \|x - y\| \le c \cdot \|x - y\|$ sehen wir, dass die Behauptung folgt, wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$ wählen. □

Eine weitere Folgerung ist

Proposition 6.1.7. *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(E,F)$. Sei $A\colon E \to F$ eine Abbildung. Nehme an, dass $A_n x \to Ax$ für $n \to \infty$ gilt. (Die A_n's konvergieren also punktweise gegen A.) Dann ist $A \in L(E,F)$ und es gilt*

$$\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| < \infty.$$

Beweis. Es ist einfach zu sehen, dass A wieder eine lineare Abbildung ist. Wir benutzen die punktweise Konvergenz, die punktweise Beschränktheit impliziert und den Satz über die gleichmäßige Beschränktheit und erhalten

$$\liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty.$$

Weiterhin gilt

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \liminf_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|x\|.$$

Hieraus folgt $\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$. □

Theorem 6.1.8 (Satz von der offenen Abbildung)**.** *Seien E, F Banachräume. Dann ist jede surjektive Abbildung $A \in L(E, F)$ offen.*

Elementar einzusehen ist, dass jede offene Abbildung $A \in L(E, F)$ auch surjektiv ist.

Beweis.

(i) Wir bezeichnen Kugeln in E mit $B_r^E(x)$, Kugeln in F mit $B_r^F(y)$. Zunächst wollen wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r > 0$ mit $B_r^F(0) \subset \overline{A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)}$ gibt: Fixiere $\varepsilon > 0$. Dann gilt $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_\varepsilon^E(0)$. Da A surjektiv ist, gilt
$$F = A(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA\left(B_\varepsilon^E(0)\right).$$
Da F ein Banachraum ist, ist F ein Raum zweiter Kategorie. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{\overline{n_0 A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} = n_0 \overset{\circ}{\overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} \ne \emptyset$. Also gilt auch $\overset{\circ}{\overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} \ne \emptyset$. Es gibt also $x_0 \in B_\varepsilon^E(0)$ und $r > 0$ mit $B_r^F(0) + Ax_0 \equiv B_r^F(Ax_0) \subset \overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}$. Es folgt aufgrund der Dreiecksungleichung
$$B_r^F(0) = B_r^F(Ax_0) - \underbrace{Ax_0}_{\in A(B_\varepsilon^E(0))} \subset \overline{A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)}.$$
Bis auf die Tatsache, dass auf der rechten Seite der Abschluss von $A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)$ und nicht $A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)$ selbst steht, zeigt dies die Behauptung.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon_i := \frac{\varepsilon}{2^i}$ für $i \in \mathbb{N}^+$. Dann gibt es nach Teil (i) eine Folge $r_i > 0$ mit $B_{r_i}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_i}^E(0)\right)}$. Ohne Einschränkung können wir r_i als (monotone) Nullfolge wählen. Wir behaupten, dass $B_{r_1}^F(0) \subset A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)$ gilt:

Sei $y \in B_{r_1}^F(0)$. Wegen $y \in B_{r_1}^F(0)$ und $B_{r_1}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_1}^E(0)\right)}$ gibt es ein $x_1 \in B_{\varepsilon_1}^E(0)$ mit $\|y - Ax_1\| < r_2$ (statt r_2 könnte man dies auch mit jeder anderen positiven Zahl erreichen). Nun ist $y - Ax_1 \in B_{r_2}^F(0)$ und $B_{r_2}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_2}^E(0)\right)}$. Somit gibt es $x_2 \in B_{\varepsilon_2}^E(0)$ mit $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < r_3$. Iterativ finden wir x_i's mit
$$\left\| y - A\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\| < r_{n+1}$$
für $n \ge 1$. Wegen $\|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$ ist die Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i =: x$ absolut konvergent und es gilt $\|x\| < \varepsilon$. Außerdem gilt $y = Ax$. Die Behauptung folgt.

(iii) Sei $\emptyset \ne \Omega \subset E$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon^E(x_0) \subset \Omega$ gilt. Wir haben gezeigt, dass es $r > 0$ mit $B_r^F(0) \subset A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)$ gibt. Somit erhalten wir
$$B_r^F(Ax_0) = Ax_0 + B_r^F(0) \subset Ax_0 + A\left(B_\varepsilon^E(0)\right) = A\left(B_\varepsilon^E(x_0)\right) \subset A(\Omega).$$
Die Behauptung folgt, da Ax_0 ein beliebiger Punkt in $A(\Omega)$ ist. □

Korollar 6.1.9 (Satz von der inversen Abbildung)**.** *Seien E, F Banachräume. Sei $A \in L(E, F)$ bijektiv. Dann ist A ein Homöomorphismus.*

Zu Korollar 6.1.9 erhalten wir

Korollar 6.1.10. *Seien $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ und $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume mit*
$$\|x\|_1 \le c\|x\|_2$$
für alle $x \in X$ und ein $c > 0$. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d. h. es gibt $C > 0$ mit $\frac{1}{C}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C\|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $X_2 \ni x \mapsto x \in X_1$ stetig. Die Behauptung folgt also aus Korollar 6.1.9. □

Lemma 6.1.11. *Sei X ein Banachraum, sei Y ein normierter Raum und sei $T\colon X \to Y$ ein Isomorphismus normierter Räume, d. h. T ist linear, bijektiv und die Operatoren T und T^{-1} sind stetig. Dann ist auch Y ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Dann ist aufgrund der Stetigkeit auch $(T^{-1}y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Also gibt es $x \in X$ mit $T^{-1}y_n \to x$. Nochmals aufgrund der Stetigkeit folgt $y_n \to Tx \in Y$. Somit ist Y ein Banachraum. □

Theorem 6.1.12 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien E, F Banachräume. Sei $A\colon E \to F$ linear. Dann ist A genau dann stetig, wenn* $\operatorname{graph} A := \{(x, Ax) \mid x \in E\} \subset E \times F$ *abgeschlossen ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\operatorname{graph} A$. Es gilt $y_n = Ax_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine Cauchyfolge. Da E ein Banachraum ist, gibt es ein $x \in E$ mit $x_n \to x$. Da A stetig ist, folgt $y_n = Ax_n \to Ax$. Somit folgt $(x_n, y_n) \to (x, Ax) \in \operatorname{graph} A$ und $\operatorname{graph} A$ ist abgeschlossen.

„$\Longleftarrow$“: $G := \operatorname{graph} A \equiv G(A) \subset E \oplus F$ ist ein linearer Teilraum. Da G abgeschlossen ist, ist G mit der von $E \oplus F$ induzierten Norm ein Banachraum. Seien $\pi_E\colon E \times F \to E$ und $\pi_F\colon E \times F \to F$ die (stetigen) Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. Die Einschränkung $\pi_E|_G\colon G \to E$ ist linear und stetig. $\pi_E|_G$ ist die Abbildung $(x, Ax) \mapsto x$. Daher ist $\pi_E|_G$ bijektiv und somit nach Korollar 6.1.9 ein Homöomorphismus. Daher ist $A = \pi_F \circ (\pi_E|_G)^{-1}$ stetig. □

Theorem 6.1.13 (Satz von Hellinger-Toeplitz)**.** *Sei X ein Hilbertraum und*
$$T\colon X \to X$$
ein linearer Operator. Gelte
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$
für alle $x, y \in X$. Dann ist T stetig.

Derselbe Beweis funktioniert auch, wenn auf der rechten Seite ein Operator $S\colon X \to X$ steht.

Beweis. Wir weisen nach dass $G(T) \subset X \oplus X$ abgeschlossen ist. Dann folgt die Stetigkeit aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Gelte $G(T) \ni (x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Zeige, dass $(x, y) \in G(T)$ ist. Sei $z \in X$ beliebig. Dann folgt, da das Skalarprodukt stetig ist,
$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, z\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Tz\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tz\right\rangle \\ &= \langle x, Tz\rangle = \langle Tx, z\rangle.\end{aligned}$$
Aus $\langle Tx - y, z\rangle = 0$ für alle $z \in X$ folgt mit $z = Tx - y$ dass $Tx = y$ gilt. □

7. Schwache Konvergenz und Reflexivität

7.1. **Schwache Konvergenz.**

Definition 7.1.1. Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E *konvergiert schwach* gegen $x \in E$, $x_n \rightharpoonup x$, falls für alle $\varphi \in E^*$
$$\varphi(x_n) \to \varphi(x)$$
für $n \to \infty$ gilt.

Bemerkung 7.1.2.

(i) In topologischen Räumen sagt man, dass x_n gegen x konvergiert, $x_n \to x$, falls jede Umgebung von x fast alle Elemente x_n enthält.

(ii) Die stetigen Funktionale $f \in L(X, \mathbb{K})$ erzeugen nach Definition 7.1.3 eine Topologie auf X, die schwache Topologie. Konvergenz $x_n \to x$ bezüglich der schwachen Topologie ist äquivalent zu $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Auf X^* können wir ebenfalls eine schwache Topologie einführen. Dann gilt $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ in X^*, falls $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$ für alle $f \in X^{**}$ gilt.

(iv) Auf X^* gibt es auch die schwach*-Topologie: Es gilt $\varphi_n \to \varphi$ schwach*, falls $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

(v) Um Missverständnissen vorzubeugen, werden wir die übliche Konvergenz, d. h. $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$, auch als *starke Konvergenz* oder *Normkonvergenz bezeichnen.*

(vi) Wie bei starker Konvergenz definiert man *schwache* und *schwach* Cauchyfolgen* sowie *schwache* und *schwach* Folgenkompaktheit.*

(vii) In endlichdimensionalen Vektorräumen sind schwache und starke Konvergenz äquivalent.

(viii) In $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ konvergiert $e_n \rightharpoonup 0$, aber $e_n \not\to 0$ für $n \to \infty$.

Definition 7.1.3. Sei $F = \{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ eine Familie von Abbildungen von X in topologische Räume (Y_i, Ω_i). Dann heißt die gröbste Topologie auf X, so dass alle Abbildungen f_i, $i \in I$, stetig sind, die F-schwache Topologie auf X.

Beispiel: Die Produkttopologie auf dem kartesischen Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ von topologischen Räumen (X_i, Ω_i) ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ stetig sind. Mengen der Form $\prod_{i\in I} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und $A_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ bilden eine Basis der Topologie von X. *$B \subset \mathcal{P}X$ heißt Basis der Topologie Ω, falls sich jedes $O \in \Omega$ als Vereinigung von Elementen von B schreiben lässt.*

Lemma 7.1.4. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Die durch

$$\langle \varphi, Jx \rangle := \langle x, \varphi \rangle$$

für alle $x \in X$ und alle $\varphi \in X^*$ definierte Abbildung $J : X \to X^{**}$ ist eine Isometrie. Wir sagen, dass J den Raum X in seinen Bidualraum einbettet.

(ii) Seien $x_n, x \in X$. Dann sind $x_n \rightharpoonup x$ in X und $Jx_n \to Jx$ schwach in X^{**} für $n \to \infty$ äquivalent.*

Beweis.

(i) Es gilt

$$\|Jx\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, Jx \rangle| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle x, \varphi \rangle| = \|x\|$$

nach Korollar 4.1.5.

(ii) Dies folgt direkt nach Definition, da die Konvergenz in

$$\langle x_n, \varphi \rangle = \langle \varphi, Jx_n \rangle \to \langle x, \varphi \rangle = \langle \varphi, Jx \rangle$$

für die Ausdrücke mit oder ohne J äquivalent ist. □

Theorem 7.1.5. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Der schwache und der schwach Grenzwert einer Folge sind eindeutig bestimmt.*

(ii) Starke Konvergenz impliziert schwache und schwach Konvergenz.*

(iii) Gelte $\varphi_n \to \varphi$ schwach in X^* für $n \to \infty$. Dann folgt*

$$\|\varphi\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|.$$

(iv) Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \to \infty$. Dann folgt

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(v) Schwach konvergente und schwach konvergente Folgen sind beschränkt.*

(vi) *Gilt* $x_n \to x$ *in* X *und* $\varphi_n \to \varphi$ *schwach* in* X^* *für* $n \to \infty$ *oder* $x_n \rightharpoonup x$ *und* $\varphi_n \to \varphi$ *(stark) in* X^**, so folgt*
$$\langle x_n, \varphi_n \rangle \to \langle x, \varphi \rangle$$
für $n \to \infty$*.*

Beweis.
(i) Für die schwach Konvergenz Benutze den Satz von Hahn-Banach für die schwache Konvergenz. Sei $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n \rightharpoonup y$. Für alle $\varphi \in X^*$ gilt
$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle (x_n - x_n), \varphi \rangle = \langle x - y, \varphi \rangle.$$
Nach Korollar 4.1.5 (ii) gilt $x = y$.

Für die schwach* Konvergenz ist dies klar, da der Grenzwert eine Funktion φ ist, die wegen $\langle x, \varphi_n \rangle \to \langle x, \varphi \rangle$ eindeutig bestimmt ist.

(ii) Klar.

(iii) Sei $x \in X$. Für $n \to \infty$ folgt
$$|\langle x, \varphi \rangle| \leftarrow |\langle x, \varphi_n \rangle| \le \|\varphi_n\| \cdot \|x\|,$$
also
$$|\langle x, \varphi \rangle| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\| \cdot \|x\|$$
und damit nach Definition der Operatornorm
$$\|\varphi\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|.$$

(iv) Analog zu oben erhalten wir $|\langle x, \varphi \rangle| \le \|\varphi\| \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Benutze nun wieder Korollar 4.1.5. Wähle also φ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\langle x, \varphi \rangle = \|x\|$.

(v) Aus $\varphi_n \to \varphi$ schwach* in X^* erhalten wir insbesondere $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, \varphi_n \rangle| < \infty$ punktweise für alle $x \in X$. Daher folgt nach Banach-Steinhaus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| < \infty$.

Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt $Jx_n \to Jx$ schwach* in X^{**} mit J aus Lemma 7.1.4 nach diesem Lemma. Somit ist Jx_n in X^{**} beschränkt, also auch x_n in X.

(vi) Es gilt
$$\begin{aligned} |\langle x, \varphi \rangle - \langle x_n, \varphi_n \rangle| &\le |\langle x, \varphi - \varphi_n \rangle| + |\langle x_n - x, \varphi_n \rangle| \\ &\le \underbrace{|\langle x, \varphi - \varphi_n \rangle|}_{\to 0} + \underbrace{\|x - x_n\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|\varphi_n\|}_{\le c} \end{aligned}$$
für $n \to \infty$.

Die zweite Aussage folgt durch eine analoge Argumentation mit „vertauschten Rollen“. □

Theorem 7.1.6. *Sei* X *ein separabler normierter Raum. Dann ist* $\overline{B_1(0)} \subset X^*$ *schwach* folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^* mit $\|\varphi_k\| \le 1$. Dann sind die Folgen $(\langle x_n, \varphi_k \rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ für festes $n \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$ beschränkt. Daher finden wir mit einem Diagonalfolgenargument eine (nicht umbenannte) Teilfolge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{k\to\infty} \langle x_n, \varphi_k \rangle \in \mathbb{K}$$
existiert. Setze $Y := \operatorname{Span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $y \in Y$. Dann existiert der folgende Grenzwert
$$\varphi(y) := \lim_{k\to\infty} \langle y, \varphi_k \rangle$$

und die damit definierte Funktion $\varphi\colon Y \to \mathbb{K}$ ist linear. Wegen

$$|\varphi(y)| = \lim_{k\to\infty} |\langle y, \varphi_k\rangle| \le \|y\|$$

ist φ auf Y gleichmäßig stetig und läßt sich daher nach Theorem 2.2.9, dem Fortsetzungssatz, eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung Φ auf $\overline{Y} = X$ mit $\|\Phi\| \le 1$ fortsetzen. Wir behaupten, dass $\varphi_n \to \Phi$ schwach* konvergiert.

Sei dazu $x \in X$ und $y \in Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|\langle x, \Phi - \varphi_n\rangle| &\le |\langle x - y, \Phi - \varphi_n\rangle| + |\langle y, \Phi - \varphi_n\rangle| \\ &\le 2\|x - y\| + |\langle y, \Phi - \varphi_n\rangle|.\end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass der zweite Term für $n \to \infty$ verschwindet. Der erste Term kann wegen $\overline{Y} = X$ zuvor beliebig klein gewählt werden. Die Behauptung folgt. □

Mit den Methoden aus Theorem 7.1.6 zeigt man auch

Proposition 7.1.7. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Dann gilt $x_n \rightharpoonup x$ in X genau dann, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ mit $\langle x_n, \varphi\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in D$ gibt.

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist genau dann eine schwache Cauchyfolge, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ gibt, so dass $(\langle x_n, \varphi\rangle)$ für alle $\varphi \in D$ eine Cauchyfolge ist.

Beweis. Übung. □

Lemma 7.1.8. *Sei X ein Hilbertraum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $x_n \to x$ für $n \to \infty$,

(ii) $\|x_n\| \to \|x\|$ und $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$.

Beweis. Übung. Betrachte $\|x_n - x\|^2$. □

7.2. **Reflexivität.**

Definition 7.2.1. Sei X ein Banachraum und J die Isometrie aus Lemma 7.1.4. Dann heißt X *reflexiv*, falls $J\colon X \to X^{**}$ surjektiv (und damit eine bijektive Isometrie) ist.

Ein reflexiver Raum ist immer vollständig, da X^{**} vollständig ist.

Lemma 7.2.2. *Sei X ein Banachraum.*

(i) Ist X reflexiv, so stimmen schwache und schwach Folgenkonvergenz in X^* überein.*

(ii) Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.

(iii) Ist $T\colon X \to Y$ ein Isomorphismus, so ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.

(iv) X ist genau dann reflexiv, wenn X^* reflexiv ist.

Beweis.

(i) Klar.

(ii) Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $y'' \in Y^{**}$. Wir definieren x'' durch

$$\langle x', x''\rangle := \langle x'|_Y, y''\rangle$$

für alle $x' \in X^*$. Dann ist $x'' \in X^{**}$. Definiere $x := J_X^{-1} x''$. Sei $x' \in X^*$ mit $x' = 0$ auf Y. Für solche x' folgt

$$\langle x, x'\rangle = \langle x', x''\rangle = \langle x'|_Y, y''\rangle = 0.$$

Y ist abgeschlossen. Nach Korollar 4.1.4 folgt also $x \in Y$. Sei $y' \in Y^*$ beliebig. Sei $x' \in X^*$ eine Fortsetzung von y' wie im Satz von Hahn-Banach. Wir erhalten wegen $x \in Y$

$$\langle x, y' \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x'|_Y, y'' \rangle = \langle y', y'' \rangle.$$

Somit ist $y'' = J_Y x$. Damit ist J_Y surjektiv.

(iii) Sei X reflexiv. Wir wollen zeigen, dass Y ebenfalls reflexiv ist: Sei $y'' \in Y^{**}$. Wir definieren $x'' \in X^{**}$ durch

$$\langle x', x'' \rangle = \langle x' \circ T^{-1}, y'' \rangle \quad \text{für alle } x' \in X^*.$$

Für $y' \in Y^*$ mit $x' := y' \circ T$ gilt nach Definition von x''

$$\langle y', y'' \rangle = \langle y' \circ T, x'' \rangle = \left\langle J_X^{-1} x'', y' \circ T \right\rangle = \left\langle T J_X^{-1} x'', y' \right\rangle.$$

Also gilt $y'' = J_Y T J_X^{-1} x''$ und damit ist J_Y surjektiv, Y also ebenfalls reflexiv.

(iv) „$\Longrightarrow$“: Sei X reflexiv. Sei $x''' \in X^{***}$, so ist $x''' \circ J_X \in X^*$. Für $x'' \in X^{**}$ gilt

$$\langle x'', x''' \rangle = \left\langle J_X^{-1} x'', x''' \circ J_X \right\rangle = \langle x''' \circ J_X, x'' \rangle = \langle x'', J_{X^*} \circ x''' \circ J_X \rangle.$$

Somit folgt $x''' = J_{X^*}(x''' \circ J_X)$. Also ist J_{X^*} surjektiv und somit ist auch X^* reflexiv.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun X^* reflexiv. Aufgrund des ersten Teils ist auch X^{**} reflexiv. J_X ist eine Isometrie. Somit ist $J_X(X) \subset X^{**}$ abgeschlossen. Nach (ii) ist $J_X(X)$ daher reflexiv. Nach (iii) ist also X selbst reflexiv. ☐

Lemma 7.2.3. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X separabel, falls X^* separabel ist.*

Die Umkehrung ist falsch, da L^1 separabel ist, L^∞, der Dualraum von L^1 aber nicht.

Beweis. (Das ist Korollar 4.1.7.)

Sei $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X^*. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X so dass $|\langle x_n, \varphi_n \rangle| \ge \frac{1}{2}\|\varphi_n\|$ und $\|x_n\| = 1$. Setze $Y := \overline{\langle \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle}$. Sei $\varphi \in X^*$ mit $\varphi = 0$ auf Y, so folgt für alle n

$$\|\varphi - \varphi_n\| \ge |\langle x_n, \varphi - \varphi_n \rangle| = |\langle x_n, \varphi_n \rangle| \ge \tfrac{1}{2}\|\varphi_n\| \ge \tfrac{1}{2}(\|\varphi\| - \|\varphi_n - \varphi\|),$$

also

$$\|\varphi\| \le 3 \inf_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi - \varphi_n\| = 0,$$

da $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X^* liegt. Nach Korollar 4.1.4 erhalten wir $Y = X$. Da Y nach Konstruktion separabel ist, ist auch X separabel. ☐

Theorem 7.2.4. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{B_1(0)} \subset X$. Definiere $Y := \overline{\operatorname{Span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Dann ist Y nach Lemma 7.2.2 selbst reflexiv. Y ist nach Definition separabel. Somit ist auch das Bild $Y^{**} = J_Y Y$ separabel. Nach Lemma 7.2.3 ist daher auch Y^* separabel. Somit ist nach Theorem 7.1.6 die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset Y^{**}$ schwach* folgenkompakt. Wir wenden dies auf die Folge $(J_Y x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y^{**} an, deren Folgeglieder in $\overline{B_1(0)} \subset Y^{**}$ enthalten sind. Es gibt also ein $y'' \in Y^{**}$ und eine nicht umbenannte Teilfolge, so dass

$$\langle y', J_Y x_n \rangle \to \langle y', y'' \rangle$$

für alle $y' \in Y^*$ für $n \to \infty$ konvergiert. Definiere $x := J_Y^{-1} y'' \in Y$. Es folgt für alle $y' \in Y^*$ und $n \to \infty$

$$\langle x_n, y' \rangle = \langle y', J_Y x_n \rangle \to \langle y', y'' \rangle = \langle x, y' \rangle.$$

Sei $x' \in X^*$. Dann gilt $x'|_Y \in Y^*$. Auf Elemente in $Y \subset X$ angewandt stimmen x' und $x'|_Y$ überein. Wir erhalten also

$$\underline{\langle x_n, x' \rangle} = \langle x_n, x'|_Y \rangle \to \langle x, x'|_Y \rangle = \underline{\langle x, x' \rangle} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wir erhalten $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$. □

Theorem 7.2.5. *Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d. h. sind $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und gilt $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$, so folgt $x \in M$.*

Beweis. Folgt direkt aus dem Trennungssatz, Theorem 4.1.9, durch einen Widerspruchsbeweis. □

Lemma 7.2.6 (Lemma von Mazur)**.** *Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in einem normierten Raum. Dann liegt x im Abschluss der konvexen Hülle von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis. Der Abschluss der konvexen Hülle ist konvex. Also folgt die Behauptung aus Theorem 7.2.5. □

Vergleiche das folgende Resultat mit Theorem 5.2.2 für den Hilbertraum.

Theorem 7.2.7. *Sei X ein reflexiver Banachraum, $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu $x_0 \in X$ ein $x \in M$ mit*

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Minimalfolge, gelte also $\|x_n - x_0\| \to \operatorname{dist}(x_0, M)$ für $n \to \infty$. Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Somit gibt es nach Theorem 7.2.4 eine schwach konvergente Teilfolge $x_n \rightharpoonup x$ für ein $x \in X$. Nach Theorem 7.2.5 erhalten wir $x \in M$. Aus der schwachen Konvergenz erhalten wir auch $x_n - x_0 \rightharpoonup x - x_0$. Da die Norm unter schwacher Konvergenz nach Theorem 7.1.5 unterhalbstetig ist, folgt die mittlere Ungleichung in

$$\operatorname{dist}(x_0, M) \le \|x - x_0\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Die erste Ungleichung gilt nach Definition des Abstandes und die letzte, da x_n als Minimalfolge gewählt war. Die Behauptung folgt. □

8. Sobolevräume

8.1. **Definition und grundlegende Eigenschaften.**

Bemerkung 8.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ heißt Testfunktion. Sei $u \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega u\varphi_i = -\int_\Omega u_i \varphi,$$

da $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei $u \in C^k(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \varphi$$

für alle Multiindices $|\alpha| \le k$.

Definition 8.1.2 (Schwache Ableitung)**.** Sei nun $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $v \in L^1_{\text{loc}}$ heißt α-te schwache Ableitung von u, falls

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v\varphi$$

für alle Testfunktionen φ gilt. Wir schreiben $D^\alpha u = v$.

Lemma 8.1.3 (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung)**.**
Seien v, $\tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitungen von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt $v = \tilde{v}$.

Lemma 8.1.4 (Du Bois-Reymond)**.** *Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gilt*

$$\int\limits_\Omega f\varphi = 0$$

für alle Testfunktionen φ, so gilt $f = 0$ fast überall, $f = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Beweis. Es genügt, $f \in L^1(\Omega)$ zu betrachten, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Definiere

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Es gelten $|g| \leq 1$ und $f \cdot g = |f|$. Da $g \in L^\infty(\Omega)$ ist, folgt auch $g \in L^2(\Omega)$. Somit existiert eine Folge $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $\eta_\varepsilon \to g$ in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Nach Theorem 3.2.3, konvergiert nun eine (nicht umbenannte) Teilfolge der η_ε dann fast überall gegen g. Wir dürfen annehmen, dass die Folge η_ε durch Glättung entstanden ist. Somit gilt

$$\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty} \leq 1.$$

Aufgrund des Satzes über dominerende Konvergenz folgt nun

$$0 = \int\limits_\Omega f \cdot \eta_\varepsilon \to \int\limits_\Omega f \cdot g = \int\limits_\Omega |f|.$$

Wir schließen also, dass fast überall $f = 0$ gilt und erhalten $f = 0$ in $L^1(\Omega)$. □

Beweis von Lemma 8.1.3. Es gilt

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega \tilde{v}\varphi$$

für alle Testfunktionen φ. Wir erhalten also

$$\int\limits_\Omega (v - \tilde{v})\varphi = 0$$

und somit aufgrund des Lemma von Du Bois-Reymond auch $v = \tilde{v}$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. □

Beispiel 8.1.5. Sei $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

Dann ist v die schwache Ableitung von u.

Beweis. Sei φ eine Testfunktion

$$\int_0^2 u\varphi' = \int_0^1 x\varphi' + \int_1^2 \varphi' = -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + \varphi(2) - \varphi(1)$$
$$= -\int_0^1 \varphi = -\int_0^2 v\varphi. \qquad \square$$

Beispiel 8.1.6. Sei $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Dann besitzt u keine Ableitung im schwachen Sinne.

Beweis. Nehme an, $v \in L^1_{\text{loc}}$ wäre eine schwache Ableitung. Dann folgt für alle Testfunktionen φ

$$-\int_0^2 v\varphi = \int_0^2 u\varphi' = \int_0^1 x\varphi' + 2\int_1^2 \varphi'$$
$$= -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + 2\varphi(2) - 2\varphi(1) = -\int_0^1 \varphi - \varphi(1).$$

Sei φ_m eine Folge von Testfunktionen mit $0 \leq \varphi_m \leq 1$, $\varphi_m(1) = 1$, $\varphi_m(x) \to 0$ für $x \neq 1$. Dann gilt für $m \to \infty$

$$\begin{array}{ccc} -\int_0^2 v\varphi_m & = & -\int_0^1 \varphi_m - \varphi_m(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 - 1 = -1. \end{array}$$

Daher kann es keine solche Funktion v geben. $\square$

Definition 8.1.7.

(i) Seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ im schwachen Sinn für alle } |\alpha| \leq k \right\}.$$

(ii) Die Räume $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ sind, wie wir später sehen werden, Hilberträume.

(iii) Für u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$ schreiben wir $u = v$, falls $u = v$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, d. h., falls $u = v$ fast überall gilt.

(iv) Wir definieren die folgende Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \infty, & u \notin W^{k,p}(\Omega), \\ \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha| \leq k} \sup\limits_\Omega |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Hier benutzen wir das wesentliche Supremum. Mit dieser Norm wird der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ zu einem Banachraum. Dies beweisen wir später.

(v) $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls $u \in W^{k,p}(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt.

(vi) Wir schreiben $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, falls
$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$$
und $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls
$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0$$
für alle $\Omega' \Subset \Omega$.

(vii) Wir definieren
$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$
Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt. Unter geeigneten Voraussetzungen gilt für $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ auch $D^\alpha u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $|\alpha| \le k-1$. Diese Aussage ist nicht trivial, da $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist.

(viii) $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

Beispiel 8.1.8. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$,
$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{für } x \neq 0.$$
Für welche Werte von $\alpha > 0$, n und p gilt $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Für $x \neq 0$ gilt
$$u_i(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}},$$
$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$
Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion und $\varepsilon > 0$. Es folgt
$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u\varphi_i = -\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u_i\varphi + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi \cdot \left(-\frac{x_i}{|x|}\right).$$
Wir erhalten
$$\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi \cdot \left(-\frac{x_i}{|x|}\right)\right| \le \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\alpha} \le c \cdot \varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0$$
für $\varepsilon \searrow 0$, falls $n - 1 - \alpha > 0$ gilt.

Es gelten die folgenden Integralabschätzungen
$$\int\limits_{B_1(0)} |Du| \le c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha-1+n-1} dr \le c,$$
falls $-\alpha - 1 + n > 0$ und
$$\int\limits_{B_1(0)} u \le c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha+n-1} dr \le c,$$
falls $-\alpha + n > 0$ ist. Die entsprechenden Integrale werden klein, wenn wir nur über eine Umgebung des Ursprungs integrieren. Somit erhalten wir für $\varepsilon \searrow 0$
$$\int\limits_\Omega u\varphi_i = -\int\limits_\Omega u_i\varphi$$
für alle Testfunktionen φ. $u_i(0)$ ist frei wählbar. Aufgrund der Eindeutigkeit der Ableitung ist die schwache Ableitung außerhalb des Ursprungs gleich der klassischen

Ableitung. Die obigen Rechnungen zeigen, dass u in ganz Ω schwach differenzierbar ist.

Wann sind u und $Du \in L^p$? Es gilt

$$\int\limits_{B_1(0)} |u|^p = c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha p+n-1} < \infty \Longleftrightarrow -\alpha p + n > 0$$

und

$$\int\limits_{B_1(0)} |Du|^p = c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha p-p+n-1} < \infty \Longleftrightarrow -\alpha p - p + n > 0.$$

Die letzte Bedingung ist am einschränkendsten. Somit gilt

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \alpha < \frac{n-p}{p}$$

und für $p \geq n$ ist $u(x)$ in keinem $W^{1,p}(\Omega)$-Raum.

Bemerkung 8.1.9. Sei y_k eine dichte Folge in $B_1(0)$. Dann ist

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x - y_k|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B_1(0)),$$

falls $\alpha < \frac{n-p}{p}$. (Um einfach nachzuweisen, dass nicht nur die endlichen Summen in $W^{1,p}(B_1(0))$ sind, benutzt man am besten die Vollständigkeit von $W^{1,p}(B_1(0))$, die wir in Theorem 8.1.11 zeigen werden.) Es ist also möglich, dass eine Funktion $u \in W^{1,p}$ auf einer dichten Teilmenge unbeschränkt wird (selbst wenn man u auf einer Nullmenge abändert).

Theorem 8.1.10 (Eigenschaften schwacher Ableitungen)**.** *Seien u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gelten*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ und $D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u$ für $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
(ii) λ, $\mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ und $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
(iii) Ist $\Omega' \subset \Omega$ offen, so folgt $u \in W^{k,p}(\Omega')$.
(iv) Ist $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, so folgt $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ und es gilt die Leibnizregel

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

ist und $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.

Beweis.
(i) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann ist auch $D^\beta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega D^\alpha u D^\beta \varphi &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u D^{\alpha+\beta} \varphi \\ &= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta} u \varphi \\ &= (-1)^{|\beta|} \int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta} u \varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt $D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ im schwachen Sinne.

(ii) Ist klar.

(iii) Ist klar.
(iv) Seien $|\alpha| = 1$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega \zeta u D^\alpha \varphi &= \int_\Omega u D^\alpha(\zeta\varphi) - \int_\Omega u\,(D^\alpha \zeta)\,\varphi \\ &= -\int_\Omega D^\alpha u \zeta \varphi - \int_\Omega u\,(D^\alpha\zeta)\,\varphi \\ &= -\int_\Omega (\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta)\,\varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt nun

$$D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta.$$

Der Rest folgt nun per Induktion wie für klassisch differenzierbare Funktionen.

□

Theorem 8.1.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum.*

Bemerkung 8.1.12. Dies ist für $k = 0$ bekannt. Dann gilt nämlich $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Beweis von Theorem 8.1.11.

(i) Wir wollen zunächst zeigen, dass $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ eine Norm ist: Es ist nur die Dreiecksungleichung im Falle $p < \infty$ nachzuweisen. Seien also $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p} + \|D^\alpha v\|_{L^p}\right)^p\right)^{1/p}, \\ &\quad \text{da die Dreiecksungleichung in } L^p \text{ gilt,} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p}\right)^{1/p}, \\ &\quad \text{da } \left(\mathbb{R}^l, \|\cdot\|_{l^p}\right) \text{ ein Banachraum ist.} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

(ii) Zur Vollständigkeit: Sei u_m eine Cauchyfolge in $W^{k,p}(\Omega)$. Dann ist auch $D^\alpha u_m$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \le k$. Somit existiert für alle α mit $|\alpha| \le k$ ein Grenzwert,

$$\begin{aligned}D^\alpha u_m &\to u_\alpha, \\ u_m &\to u.\end{aligned}$$

Es fehlt nun noch der Nachweis, dass die Grenzwertbildung mit dem Ableiten vertauscht, also dass $u_\alpha = D^\alpha u$ gilt. Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{tikzcd}
\int\limits_\Omega u_m D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] \arrow[d] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D^\alpha u_m \varphi \arrow[d] \\
\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_\alpha \varphi.
\end{tikzcd}$$

Die Konvergenz folgt hier, da φ in jedem L^q-Raum ist. Somit ist $D^\alpha u = u_\alpha$ und es gilt $u_m \to u \in W^{k,p}(\Omega)$. □

8.2. **Approximierbarkeit.** In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}$-Funktionen durch glatte Funktionen in der $W^{k,p}$-Norm approximieren.

Theorem 8.2.1 (Lokale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.**
Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, η_ε die zugehörige Diracfolge. Sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Dann ist

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

und es gilt

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Beweis. Die Regularitätsaussage ist bekannt. Sei also $|\alpha| \le k$. Wir behaupten, dass

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u \text{ in } \Omega_\varepsilon$$

gilt, dass also Glätten und schwaches Ableiten kommutieren. Für $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned}
D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) u(y)dy = \int\limits_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha u(y)dy,
\end{aligned}$$

da $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ für festes $x \in \Omega_\varepsilon$ eine Testfunktion ist. Somit folgt

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x).$$

Sei nun $\Omega' \Subset \Omega$. Da die Mollifizierungen in L^p konvergieren, erhalten wir

$$D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u \text{ in } L^p(\Omega').$$

Also konvergiert jeder Bestandteil der Norm und es gilt auch

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega').$$ □

Bemerkung 8.2.2. Dies funktioniert im Falle $p = \infty$ nicht, da sich L^∞-Funktionen i. a. aufgrund ihrer Sprungstellen nicht durch glatte Funktionen in L^∞ approximieren lassen.

Theorem 8.2.3 (Globale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Proof.
Zerlege mit Hilfe von Abschneidefunktionen u in Anteile auf „Zwiebelschalen". Betrachte also $u\eta_i$ statt u, wobei (η_i) eine Zerlegung der Eins ist, wobei die Träger dieser Funktionen jeweils in einer festen Anzahl benachbarter Zwiebelschalen enthalten sind. Solche Zerlegung können wir so wählen: Definiere

$$U_i := \{x \in \Omega : \frac{1}{2} \cdot 2^{-i}\delta < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < 2 \cdot 2^{-i}\delta\},$$

wobei $\delta := \operatorname{diam}(\Omega)$. Wähle $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Teiling der Eins. Weiter sei $c_i > 0$ (werden später bestimmt) und $\varepsilon > 0$. Nach Theorem 8.2.1 gibt es $u_{i,\varepsilon} \in C^\infty(U_{i+1})$ mit

$$\|u - u_{i,\varepsilon}\|_{W^{k,p}(U_i)} \le c_i\varepsilon.$$

Definiere

$$u_\varepsilon = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i u_{i,\varepsilon}.$$

Also gilt

$$u - u_\varepsilon = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i (f - f_{i,\varepsilon}).$$

Sie achten darauf, dass auf jede $\Omega' \subset\subset \Omega$ nur endlich η_i nicht verschwindet sind. Damit gilt

$$D^\alpha(u - u_\varepsilon) = \sum_{i\in\mathbb{N}} D^\alpha(\eta_i u_{i,\varepsilon}).$$

Mit Hilfe der Leibnizregel, Theorem 8.1.10 (iv), erhalten wir

$$D^\alpha(\eta_i u_{i,\varepsilon}) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta_i D^{\alpha-\beta}(u - u_e),$$

Nun können schätzen wir ab und erhalten

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} &\le C \sum_i \|\eta_i\|_{C^k(\Omega)} \|u - u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(U_i)} \\ &\le C\varepsilon \sum_i \|\eta_i\|_{C^k(\Omega)} \le C\varepsilon, \end{aligned}$$

falls wir am Anfang c_i etwa mit $c_i \le 2^{-i}(\|\eta_i\|_{C^k(\Omega)} + 1)^{-1}$ wählen.

□

Bemerkung 8.2.4. Wir benötigen keine Randregularität von Ω und bekommen dafür nur $u_m \in C^\infty(\Omega)$ und nicht $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Theorem 8.2.5 (Globale Approximierbarkeit in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Seien $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass*

$$u_m \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert (nach Umbenennen der Koordinatenachsen) eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1, so dass

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : x^n > \gamma(x^1, \ldots, x^{n-1})\}$$

gilt. Definiere $V := \Omega \cap B_{r/2}(x_0)$.

(ii) Definiere für $x \in V$ und $\varepsilon > 0$ den Punkt $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert ein $\lambda = \lambda(|D\gamma|) \gg 1$, so dass $B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subset \Omega \cap B_r(x_0)$ für $x \in V$ gilt, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist. Definiere $u_\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$ für alle x mit $x^\varepsilon \in \Omega$, die um $\lambda\varepsilon$ in Richtung e_n verschobene Funktion. Mollifiziere und definiere $v^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Dies ist für $\lambda \gg 1$ in der Menge V wohldefiniert. Wir erhalten insbesondere $v^\varepsilon \in C^\infty\left(\overline{V}\right)$.

(iii) Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

Wie in Theorem 8.2.1 sehen wir, dass $D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon \to 0$ in L^p gilt. Weiterhin gilt $D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u \to 0$ in L^p, da Translationen in L^p stetig sind. Hieraus folgt dann $v^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}(V)$.

Wir wollen noch genauer begründen, warum Translationen in L^p für $1 \le p < \infty$ stetige Abbildungen sind. Seien also $\delta > 0$ und $u \in L^p$ vorgegeben. Wir wollen nachweisen, dass $u(\cdot) - u(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p gilt. Approximiere dazu zunächst die Funktion u bis auf $\delta/3$ in L^p durch eine glatte Funktion. Das Ergebnis, $\tilde{u}$, hat einen beschränkten Gradienten, wobei die Schranke von der Approximation abhängt. Dies funktioniert so nur auf beschränkten Gebieten. Auf unbeschränkten Gebieten sind aber die Beiträge zum L^p-Integral außerhalb einer großen Kugel ohnehin klein und können direkt abgeschätzt werden. Da Translationen für Funktionen mit beschränktem Gradienten in L^p stetig sind, erhalten wir $\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p. Wir wählen nun $|h|$ so klein, dass auch diese Differenz durch $\delta/3$ beschränkt ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\|u(\cdot) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \le{}& \|u(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|_{L^p} + \|\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h)\|_{L^p} \\ &+ \|\tilde{u}(\cdot - h) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \\ \le{}& \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta.\end{aligned}$$

(iv) Sei nun $\delta > 0$. Da Ω beschränkt ist, existieren endlich viele Punkte $x_i^0 \in \partial\Omega$ und Radien $r_i > 0$, so dass $V_i = \Omega \cap B_{r_i/2}(x_i^0)$ wie in (i) ist und $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^N B_{r_i/2}(x_i^0)$ gilt. Wie oben gezeigt, gibt es also $v_i \in C^\infty\left(\overline{V}_i\right)$ mit $\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \le \delta$. Wähle noch $V_0 \Subset \Omega$, so dass $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=0}^N V_i$ gilt. Nach Theorem 8.2.1 gibt es $v_0 \in C^\infty\left(\overline{V}_0\right)$ mit $\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \le \delta$.

(v) Sei nun ζ_i eine den Mengen V_i untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Definiere $v := \sum\limits_{i=0}^N \zeta_i v_i$. Es gilt $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} ={}& \left\|\sum_{i=0}^N D^\alpha(\zeta_i v_i) - \sum_{i=0}^N D^\alpha(\zeta_i u)\right\|_{L^p(\Omega)} \\ \le{}& \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \\ \le{}& c \cdot \sum_{i=0}^N \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \\ \le{}& c \cdot (N+1)\delta,\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt benutzt haben, dass die Ableitungen der Funktionen ζ_i gleichmäßig beschränkt sind. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 8.2.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $1 \le p < \infty$ ist $(W^{1,p} \cap C^\infty)(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ (Satz 8.2.3). Dagegen ist i.a. $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.

Wir wiederholen die Definitionen von $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$ (Definition 8.1.7).

Definition 8.2.7.
(i) Wir definieren
$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$
Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt.
(ii) $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$ is separabel für $1 \le p < \infty$ und reflexiv für $1 < p < \infty$.

8.3. **Fortsetzbarkeitssätze.**
In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}(\Omega)$-Funktionen nach $\mathbb{R}^n$ als $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger fortsetzen, so dass deren Norm durch die ursprüngliche Norm abgeschätzt bleibt.

Theorem 8.3.1 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega \Subset V$. Dann gibt es eine beschränkte lineare Abbildung*
$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty,$$
so dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgendes gilt
- *$Eu = u$ fast überall in Ω,*
- supp$(Eu) \subset V$,
- $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c(p, \Omega, V) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Die Funktion Eu heißt Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis.
(i) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Nehme zunächst an, dass lokal $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Dann gibt es $r > 0$, so dass ohne Einschränkung
$$B^+ := B_r(x_0) \cap \{x^n \ge 0\} \subset \overline{\Omega},$$
$$B^- := B_r(x_0) \cap \{x^n \le 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$
(ii) Nehme zunächst an, dass $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt. Definiere eine Spiegelung von höherer Ordnung durch
$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ -3u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) + 4u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\frac{1}{2}x^n\right), & x \in B^-. \end{cases}$$
(iii) Wir behaupten zunächst, dass $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$ ist. Definiere dazu $u^- := \overline{u}|_{B^-}$ und $u^+ := \overline{u}|_{B^+}$. Für die Normalableitungen erhalten wir
$$\frac{\partial u^-}{\partial x^n} = 3\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) - 2\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\tfrac{1}{2}x^n\right).$$
Somit gilt auf $\{x^n = 0\} \cap B_r(x_0)$ für die Normalenableitungen $u^-_{x^n} = u^+_{x^n}$. Auf der Menge $\{x^n = 0\} \cap B_r(x_0)$ stimmen die Funktionswerte von u^+ und u^- und damit auch die Tangentialableitungen überein. Somit ist $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$.
(iv) Es gilt
$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(B_r(x_0))} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$
da in der Definition der Spiegelung höherer Ordnung nie weiter als bisher von $\{x^n = 0\}$ entfernt ausgewertet wird. Da die Spiegelung eine Linearkombination von $W^{1,p}$-Funktionen ist und da das neue Argument die Norm höchstens um eine Konstante vergrößert, folgt die Behauptung.

(v) Ist der Rand nicht eben/flach, so biegt man den Rand zunächst flach, setzt dann fort und transformiert anschließend zurück.
(vi) Da sich der Rand nicht mit einer solchen Umgebung überdecken läßt, zerlegt man die Funktion zunächst mit einer geeigneten Zerlegung der Eins und baut das Resultat anschließend wieder zusammen.
(vii) Durch Multiplikation mit einer Abschneidefunktion, die Null wird bevor man Stellen erreicht, an denen u nicht mehr von der Klasse C^1 ist, stellt man sicher, dass der Träger der fortgesetzten Funktion nicht zu groß wird.
(viii) Wir erhalten also die Abschätzung

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Die Details zu den letzten Schritten sind eine Übung.
(ix) Seien nun $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wir approximieren u durch Funktionen $u_m \in C^\infty(\overline{u})$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir $u_m \to u$ fast überall in Ω annehmen. Damit folgt später $Eu = u$ in Ω. Die Abbildung $v \mapsto Ev := \overline{v}$ ist ein linearer Operator. Die Stetigkeit folgt dabei aus der obigen Abschätzung für glatte Funktionen. Diese Abschätzung liefert aber auch

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Daher ist Eu_m eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren nun $\overline{u} = Eu$ als den Grenzwert dieser Folge. Eu ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig und die gesuchte Fortsetzung.
(x) Der Fall $p = \infty$ ist ebenfalls eine Übung. □

Bemerkung 8.3.2. Für $\partial\Omega \in C^2$ funktioniert die obige Konstruktion auch noch für $W^{2,p}(\Omega)$-Funktionen. Dabei bleibt eine C^2-Funktion jedoch nicht in dieser Klasse.

Mit Hilfe von Spiegelungen höherer Ordnung kann man analog aber auch Fortsetzungsoperatoren für die Räume $W^{k,p}$ konstruieren. Dies bleibt als Übung.

8.4. **Spuren von Sobolevfunktionen.** Wir wollen Randwerte von $W^{1,p}$-Funktionen definieren. Diese Funktionen sind i. a. nicht stetig und $\partial\Omega$ ist eine Nullmenge.

Sei Ω beschränkt. Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < \infty$, so besitzt u Randwerte als L^p-Funktion.

Theorem 8.4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

so dass $Tu = u|_{\partial\Omega}$, falls $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ ist und

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c(p, \Omega) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt.

Beweis.
(i) Nehme zunächst an, dass $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist, dass $\partial\Omega$ in der Nähe eines Randpunktes $x_0 \in \partial\Omega$ flach ist, lokal also $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Wähle nun $r > 0$ so, dass $B_r(x_0) \cap \Omega = B_r(x_0) \cap \{x^n > 0\}$ gilt. Definiere $\hat{B} := B_{r/2}(x_0)$ und $B := B_r(x_0)$. Setze weiterhin $\Gamma := \partial\Omega \cap \{x^n = 0\} \cap \hat{B}$ und $(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x^n = 0\}$, wobei das letzte Gleichheitszeichen die Identifikation der beiden Mengen andeutet.

Sei $\zeta \in C_c^\infty(B)$, $\zeta \geq 0$ und $\zeta = 1$ in $\hat{B}$. Setze $B^+ := B \cap \Omega$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma |u|^p d\hat{x} \leq & \int\limits_{\{x^n=0\}} \zeta \cdot |u|^p d\hat{x} \\ = & -\int\limits_{B^+} (\zeta |u|^p)_{x^n}\, dx \quad \text{(Hauptsatz)} \\ \leq & \int\limits_{B^+} |D\zeta| \cdot |u|^p + p|u|^{p-1}|Du|\zeta\end{aligned}$$

(für $p = 1$ erhält man dieselbe obere Aschätzung mit $\pm\zeta u$ punktweise und integriert dann in $\hat{x}$)

$$\leq c \cdot \int\limits_{B^+} |u|^p + |Du|^p \quad \left(\text{Young, } \tfrac{p-1}{p} + \tfrac{1}{p} = 1\right).$$

(ii) Für ein allgemeines C^1-Gebiet Ω, eine kleine Umgebung Γ von $x_0 \in \partial\Omega$ in $\partial\Omega$ erhält man durch Aufbiegen ebenfalls

$$\int\limits_\Gamma |u|^p \leq c \cdot \int\limits_\Omega |u|^p + |Du|^p.$$

(iii) Überdecke nun $\partial\Omega$ mit solchen Randstücken Γ, zerlege mit Hilfe einer Zerlegung der Eins und erhalte

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Definiere $Tu := u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Es folgt

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Wir bemerken, dass T ein linearer Operator ist.

(iv) Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ beliebig. Sei $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ eine approximierende Folge, also $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir erhalten

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Daher ist Tu_m eine Cauchyfolge in $L^p(\partial\Omega)$. Wir definieren also

$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m \text{ in } L^p(\partial\Omega).$$

Diese Definition ist unabhängig von der approximierenden Folge u_m.

(v) Sei schließlich $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Die in Theorem 8.2.5 konstruierte Folge ist so definiert, dass sie in diesem Falle auf ganz $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen u konvergiert. Daher folgt hier $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Da der Grenzwert aber von der approximierenden Folge unabhängig ist, gilt dies auch, wenn man andere approximierende Folgen verwendet. □

Theorem 8.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \leq p < \infty$. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad Tu = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beweis.
„$\Longrightarrow$": Sei zunächst $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es nach Definition der $W_0^{1,p}(\Omega)$-Funktionen eine Folge von Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für alle Folgenglieder gilt $Tu_m = 0$ auf $\partial\Omega$. Da $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ein stetiger linearer Operator ist, folgt auch $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und gelte $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir benutzen eine Zerlegung der Eins und biegen den Rand $\partial\Omega$ lokal auf. Daher dürfen wir annehmen, dass $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right) \equiv W^{1,p}(\{x^n > 0\})$, $\operatorname{supp} u \Subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$ und $Tu = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ gelten. Wir wollen nachweisen, dass sich u in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ durch $C^\infty_c\left(\mathbb{R}^n_+\right)$-Funktionen approximieren läßt. Es gilt $Tu = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$. Daher gibt es $u_m \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$, so dass

$$u_m \to u \text{ in } W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right),$$
$$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0 \text{ in } L^p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right).$$

Sei nun $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x^n \ge 0$. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$|u_m(\hat{x}, x^n)| \le |u_m(\hat{x}, 0)| + \int\limits_0^{x^n} |u_{m,x^n}(\hat{x}, t)|\, dt.$$

Wir betrachten die p-te Potenz dieser Ungleichung und schätzen mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung mit den Exponenten p und $\frac{p}{p-1}$ ab

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, x^n)|^p d\hat{x} \le{}& c(p) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\ &+ c(p) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_0^{x^n} 1 \cdot |Du(\hat{x}, t)|\, dt \right)^p d\hat{x} \\ \le{}& c(p) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\ &+ c(p) \cdot (x^n)^{p-1} \cdot \int\limits_0^{x^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(\hat{x}, t)|^p d\hat{x}\, dt.\end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ gilt $u_m \to 0$ in $L^p\left(\partial\mathbb{R}^n_+\right)$ und $u_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Daher folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x}, t)|^p\, d\hat{x} \le c(p) t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, \tau)|^p d\hat{x}\, d\tau.$$

Wir integrieren dies bezüglich t und erhalten

$$\int\limits_0^{x^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x}, t)|^p\, d\hat{x}\, dt \le c(p) \int\limits_0^{x^n} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, \tau)|^p d\hat{x}\, d\tau\, dt. \tag{8.1}$$

Definiere nun die approximierenden Funktionen mit Randwerten Null. Sei $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $0 \le \zeta \le 1$ und

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } [0, 1], \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \setminus [0, 2]. \end{cases}$$

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n_+$ Funktionen

$$\zeta_m(x) := \zeta(mx^n)$$

und

$$w_m(x) := u(x)(1 - \zeta_m).$$

Es folgt

$$w_{m,x^n} = u_{x^n}(1 - \zeta_m) - mu\zeta'$$

und

$$D_{\hat{x}} w_m = D_{\hat{x}} u(1 - \zeta_m).$$

Zeige nun, dass $w_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ konvergiert. Es gilt $w_m \to u$ in L^p aufgrund der Stetigkeit des Integrals bezüglich des Integrationsgebietes. Wir schätzen wie folgt ab

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p \leq c(p) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p |Du|^p + c(p,\zeta) m^p \int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \equiv A + B.$$

Wir benutzen nochmals die Stetigkeit bezüglich des Integrationsgebietes (oder den Satz von der dominierenden Konvergenz mit entsprechend "abgeschnittenen" Funktionen) und erhalten $A \to 0$ für $m \to \infty$. Das zweite Integral schätzen wir mit Hilfe von (8.1) ab

$$\begin{aligned}
B &\leq c \cdot m^p \int\limits_0^{2/m} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},\tau)|^p d\hat{x} d\tau dt \\
&\leq c \cdot m^p \left(\int\limits_0^{2/m} t^{p-1} dt \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x} dt \right) \\
&\leq c \cdot \int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x} dt \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $m \to \infty$. Wir erhalten also $w_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Andererseits gilt $w_m = 0$ für $0 < x^n < 1/m$. Daher erhält man durch Mollifizierung der w_m eine Folge $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ und es gilt (wie behauptet) $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. □

9. Anwendungen

9.1. **Die Direkte Methode.**

Zunächst brauchen wir die Poincaré-Ungleichung

Lemma 9.1.1 (Poincaré-Ungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es gibt eine Konstante $c_0 = c_0(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega |u|^2 \leq c_0^2 \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Proof. Mit Approximationsargument brauchen wir die Ungleichung nur für $u \in C_c^\infty(\Omega)$ zu zeigen. OBdA nehmen wir an, dass $\Omega \subset [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Da $u \in C_c^\infty(\Omega)$ ist, setzen wir u trivialerweise auf ganzem $\mathbb{R}^n$ fort. Für $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$ setze $x_a = (a, x_2, \cdots, x_n)$. Nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned}
|u(x)|^2 &= |u(x) - u(x_a)|^2 = \left| \int_a^{x_1} \partial_{x_1} u(s, x_2, \cdots, x_n) \right|^2 \\
&\leq (b-a) \int_a^b |\partial_{x_1} u(s, x_2, \cdots, x_n)|^2 \\
&\leq (b-a) \int_a^b |\nabla u(s, x_2, \cdots, x_n)|^2.
\end{aligned}$$

Integriere erste über x_1 und dann über die Reste

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \leq (b-a)^2 \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

□

Die Konstante c_0 kann man $c_0 = d = \operatorname{diam}(\Omega)$ wählen, da in den Beweis kann mann $b - a = \operatorname{diam} + \varepsilon$ für jede $\varepsilon > 0$ wählen.

Die Poincaré-Ungleichung gilt auch für L^p, d.h., $\|u\|_{L^p(\Omega} \leq c(p, \Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Korollar 9.1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Der Raum $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ mit der Norm*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist äquivalent zu $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$.

Proof. Nach Lemma 9.1.1 gilt

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

womit folgt, dass $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ eine Norm ist, die zu $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ äquivalent ist. □

Für den Raum $H_0^1(\Omega)$ benutzt man normalerweise die Norm $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Das zugehörige Skalarprodukt ist

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle.$$

$(H_0^1(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1})$ ist ein Hilbertraum.

Als Anwendung zeigen wir (vergleichen Sie Theorem 7.2.7)

Theorem 9.1.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Weiter ist $f \in L^2(\Omega)$. Dann besitzt dads Funktional*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu$$

einen Minimum.

Proof. Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge von J, d.h., $u_k \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$J(u_k) \to \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} J(u) =: \alpha.$$

OBdA kdironnen wir annehmen, dass $J(_k) \leq \alpha + 1$ für alle u_k. Mit Cauchy-Schwarz und Poincaré haben wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega fu &\leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\
&\leq c_0\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} \\
&\leq c_0\left\{c_0\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{c_0}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right\} \\
&\leq c_0^2\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|\nabla u\|_{L^2}^2, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\alpha + 1 \geq J(u_k) \geq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nu|^2 - c_0^2\|f\|_{L^2}^2.$$

Damit ist $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $H_0^1(\Omega)$ beschränkt. Nach Theorem 7.2.4 gibt es eine Teilfolge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ konvergiert. da die Norm $\|\cdot\|_{H_0^1}$ unterhalbstetig bzlg. der schachen Konvergenz, gilt

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \leq \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 = \alpha.$$

Andererseits gilt

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega fu_k = \int_\Omega fu_0,$$

denn u_k ist schwach konvergent in $H_0^1(\Omega)$, und dann in $L^2(\Omega)$. Insgesammt gilt

$$J(u) \leq \liminf J(u_k) = \alpha,$$

also $J(u) = \alpha = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u)$. □

Da u_0 ein Minimum von J in $H_0^1(\Omega)$ ist, erfüllt die Funktion u_0

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + uf = 0, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{9.1}$$

Der Beweis folgt direkt von die Berechung

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=0} J(u + t\varphi).$$

Falls zusätzlich $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ und $f \in C^0(\Omega)$ sind, gilt nach Gauss und dem Fundamentallemma von Variationsrechnung

$$-\Delta u + f = 0 \tag{9.2}$$

mit dem Dirichletrandwert

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

D.h., u ist eine (klassische) Lösung von (9.2) mit dem Dirichletrandwert. Allgemeiner heißt eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$, die (9.1) erfüllt, eine schwache Lösung von (9.2). (9.1) ist eine schwache Formulierung von der Gleichung (9.2).

Also, wir haben

Korollar 9.1.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Weiter ist $f \in L^2(\Omega)$. Dann besitzt* (9.2) *eine schwache Lösung.*

Unter geeigneter Regularitätsbedingung von $\partial\Omega$ und f kann man zeigen, dass u auch regular ist und somit ist eine klassische Lösung von (9.2). Die Regularitätstheorie ist die haupte Aufgabe von der Vorlesung "partielle Differentialgleichungen".

9.2. **Satz von Lax-Milgram.**

Als eine Folgerung von Darstellungssatz von Riesz (Satz 5.2.5) haben wir

Theorem 9.2.1 (Darstellung von Bilinearformen)**.** *Sei $B : X \times X \to \mathbb{K}$ beschränkte Sesquilinearform auf dem Hilbertraum X, d.h., für alle $x, y, z \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

(i) $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$

(ii) $B(z, \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} B(z, x) + \bar{\beta} B(z, x)$

mit $\|B\| = \sup_{\|x\|, \|y\| = 1} |B(x, y)| < \infty$. Dann gibt es genau ein $T = T_B \in L(X, X)$ mit

$$B(y, x) = \langle y, Tx \rangle \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

Außerdem gilt $\|T\| = \|B\|$.

Proof. Definiere

$$\mathcal{R}_B : X \to X^*, \quad (\mathcal{R}_B x)(y) = B(x, y).$$

Nach Voraussetzung (i) ist $B : X \times X \to \mathbb{K}$ stetig. Also ist $\mathcal{R}_B : X \to X^*$ auch stetig nach Proposition 2.2.10. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 5.2.5) existiert für jede $\mathcal{R}_B x \in X^*$ ein $Tx \in X$ mit

$$\mathcal{R}_B x(y) = \langle y, Tx \rangle, \quad \forall x \in X$$

und
$$\|\mathcal{R}_B x\| = \|Tx\|.$$
Nach der Bezeichung von Theorem 5.2.5 gilt $Tx = I(\mathcal{R}_B x)$, wobei $I : X^* \to X$ bijektiv, isometrisch und konjugiert linear ist.

Es ist leicht nachzuprüfen alle Aussagen über T.

□

Theorem 9.2.2 (Satz von Lax-Milgram)**.** *Sei $B : X \times X \to \mathbb{K}$ beschränkte Bilinearform auf dem reellen Hilbertraum X, und B sei koerziv:*

$$\Re B(x,x) \geq \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \in X, \text{ mit einem } \lambda > 0. \tag{9.3}$$

Dann ist die Abbildung
$$\mathcal{R}_B : X \to X^*, \quad (\mathcal{R}_B x)(y) = B(x,y)$$
invertierbar (insbesondere surjektiv) und
$$\|\mathcal{R}_B^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$
Zusatz. Sei B symmetrisch. Dann ist $\mathcal{R}_B^{-1}\varphi = x_0$ die eindeutig bestimmte Minimalstelle des Funktionals
$$Q(x) = \frac{1}{2} B(x,x) - \Re\varphi(x),$$
für $\varphi \in X^*$.

Proof. Aus dem Riesz'schen Darstellungssatz Satz, Theorem 5.2.5 (sehen Theorem 9.2.1 oben), gibt $T = T_B \in L(X,X)$ mit
$$B(y,x) = \langle y, Tx \rangle \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$
Außerdem gilt, nach der Koerzivitätsbedingung (9.3),
$$\lambda \|x\|^2 \leq \Re B(x,x) = \Re\langle x, Tx \rangle \leq \|x\| \|Tx\|, \quad \forall x \in X,$$
also
$$\lambda \|x\| \leq \|Tx\|, \quad \forall x \in X, \tag{9.4}$$
woraus folgt, dass $N(T) = \{0\}$ ist. Außderm gilt, dass der Bildraum $R(T)$ abgeschlossen ist. Das können wir so zeigen: für $x_k, y \in X$ mit $Tx_k \to y$ ist Tx_k eine Cauchyfolge:
$$\|x_k - x_l\| \leq \frac{1}{\lambda} \|Tx_k - Tx_l\|,$$
woraus konvegiert x_k gegen $x \in X$. Aus der Stetigkeit von T folgt $Tx_k \to Tx$, also $y = Ax$. Zu zeigen bleibt $R(T) = X$. Falls $R(T) \neq X$, nach dem Projektionssatz (genauer Korollar 5.2.4) gilt $y \in R(T)^\perp$, d.h.
$$\langle Tx, y \rangle = 0, \quad \forall x \in X.$$
Daraus folgt
$$0 = \Re\langle Ty, y \rangle = \Re\langle y, Ty \rangle \leq \lambda \|y\|^2 > 0,$$
ein Widerspruch. Damit ist T bijektiv. Aus (9.4) folgt dann $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Da $T = I \circ \mathcal{R}_B$ ist, folgt
$$\|\mathcal{R}_B^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda},$$
denn I ist bijektiv und isometrisch.

Für $\varphi \in X^*$, ist $x_0 = \mathcal{R}_B^{-1}\varphi \in X$. Bei Definition gilt
$$\varphi(y) = \mathcal{R}_B x_0(y) = B(x_0, y), \qquad \forall y \in X.$$

Für $y \in X$ ist

$$\begin{aligned}
Q(y)-Q(x_0) &= \frac{1}{2}(B(y,y)-B(x_0,x_0)) - \Re\varphi(y-x_0)\\
&= \frac{1}{2}(B(y,y)-B(x_0,x_0)) - \Re B(x_0, y-_0)\\
&= \frac{1}{2}(B(y,y)-B(y,x_o)-B(x_0,y)) + B(x_0,x_0))\\
&= \frac{1}{2}B(y-x_0,y-x_0) \geq \frac{1}{2}\lambda\|y-x_0\|^2.
\end{aligned}$$

Aslo ist x_0 ein Minimier. □

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$, $a = (a_{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq n}$ und sei L ein Operator

$$Lv = -\operatorname{div}(aDv) = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\alpha(a_{\alpha\beta}\partial_\beta v).$$

Definition 9.2.3. Die L zugeordnete Bilinearform auf dem Hilbertraum $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist

$$B(u,v) = \int_\Omega \langle Du, aDv\rangle = \int_\Omega a_{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta v$$

B ist beschränkt.

Definition 9.2.4. Wir fassen L auf als Operator

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)', \quad (Lu)(v) = \int_\Omega a_{\alpha\beta}\partial_\alpha u\partial_\beta v = B(u,v).$$

L ist stetig.

Wir interessieren uns nun dafür, ob L surjektiv ist. Wir wollen den Satz von Lax-Milgram verwenden.

Frage: ist B koerziv auf $W_0^{1,2}(\Omega)$?

Lemma 9.2.5. *Sei L elliptisch mit Konstante $\mu > 0$, d.h.,*

$$\langle \xi, a(x)\xi\rangle \geq \mu|\xi|^2 \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist die zugeordnete Bilinearform B auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ koerziv mit Konstante $\lambda = \frac{\mu}{(1+d)^2}$, $d = \operatorname{diam}\Omega$.

Theorem 9.2.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ sei elliptisch mit Konstante $\mu > 0$. Dann ist $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ invertierbar und $\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$.*

Beispiel 9.2.7. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Definiere $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$,

$$\varphi(u) = \int fu.$$

Die Operator Norm von φ ist

$$\begin{aligned}
\|\varphi\| &= \sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,2}}=1} \int uf \leq \sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,2}}=1} \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\\
&\leq d^2\|f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

wobei $d = \operatorname{diam}\Omega$. Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ Lösung von $Lv = \varphi$. Dann gilt

$$\int \langle Du, aDv\rangle = \int fu \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

mit $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu}\|\varphi\| \leq \frac{d^2}{\mu}\|f\|_{L^2}.$$

v heißt schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lv = f \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beispiel 9.2.8. Sei $g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Definiere $\gamma \in W_0^{1,2}(\Omega)'$

$$\gamma(u) = -\int_\Omega \langle Du, g\rangle.$$

Man kann zeigen, dass gilt $\|\gamma\| \leq \|g\|_{L^2}$. Sei $v \in W^{1,2}(\Omega)$ Lösung von $Lv = \gamma$. Wir haben

$$\|v\|_{W^{1,2}} \leq \frac{1}{\mu}\|g\|_{L^2}$$

und

$$\int \langle Du, aDv\rangle = -\int \langle Du, g\rangle, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

v ist schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lv = \operatorname{div} g \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

10. $L^p(\Omega)$

Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. In diesem Kapital schreiben wir q manchmal auch mit p'. Für $v \in L^q(\Omega)$ definiere ein lineares Funktional

$$L_v : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto L_v(u) := \int_\Omega u \cdot v.$$

nach der Hölder-Ungleichung gilt

$$|L_v(u)| \leq \|v\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Damit ist L_v beschränkt mit der Operator-Norm $\|L_v\| \leq \|v\|_{L^q(\Omega)}$. Man kann zeigen, dass $\|L_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)}$. Falls $1 < p \leq \infty$ wählen wir

$$u(x) = \begin{cases} |v(x)|^{q-2}\overline{v(x)}, & \text{falls } v(x) = 0 \\ 0, & \text{sonst .} \end{cases}$$

Es ist leicht to prüfen, dass $u \in L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|^{\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)}$. Also

$$L_v(u) = \int_\Omega |v|^q = \|v\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)},$$

daraus folgt $\|L_v\| \geq \|v\|_{L^q(\Omega)}$, also $\|L_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)}$. Nun betrachte den Fall $p = 1$ (und $q = \infty$), und zwar $v \neq 0$ (Der Fall $v = 0$ ist offensichtlich.) Seien $0 < \varepsilon < \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ und eine Teilmenge $A \subset \Omega$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ und $|v(x)| > \|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon$ in A. Definiere $u(x) = \overline{v(x)}/|v(x)|$ in A und $u(x) = 0$ sonst. Dann gilt $u \in L^1(\Omega)$ und

$$L_v(u) = \int_A |v(x)| < (\|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon)\mu(A) = (\|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon)\|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Es folgt $\|L_v\| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon$, für alle klein $\varepsilon > 0$. Also haben wir $\|L_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)}$ gezeigt. Die obige Überlegung impiezirt dass die Abbildung

$$L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)', \quad v \mapsto Lv$$

eine isometrische Einbettung ist. Nun fragen wir, ob diese Abbildung surjektiv ist.

10.1. $1<p<\infty$. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $1<p<\infty$.
Wir brauchen

Lemma 10.1.1 (Clarkson-Ungleichungen). *Seien $u,v\in L^p(\Omega)$ und $1<p<\infty$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Für $2\le p<\infty$ gilt*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \le \frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^2 \tag{10.1}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^q \ge \left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^2\right)^{q-1}. \tag{10.2}$$

Für $1<p\le 2$ gilt

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \ge \frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^2 \tag{10.3}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^q \le \left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^2\right)^{q-1}. \tag{10.4}$$

Proof. Hier zeigen wir nur den Fall $2\le p<\infty$. Für (10.1) benötigen wir nur die Folgende zu zeigen

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p+\left|\frac{a-b}{2}\right|\le\frac{1}{2}(|a|^p+|b|^p),\qquad \forall a,b>0$$

Man zeige zunächst

$$\alpha^p+\beta^p\le(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{p}{2}},\quad \forall,\alpha,\beta\ge 0.$$

Wegen Homogenität der Ungleichung benötigen wir nur für den Fall $\beta=1$ zu zeigen. Diese folgt aus der Positivität der Funktion $f(x):=(x^2+1)^{\frac{p}{2}}-x^p-1$. Denn f ist monoton steigend. Seien $\alpha=\left|\frac{a+b}{2}\right|$ und $\beta=\left|\frac{a-b}{2}\right|$ haben wir

$$\begin{aligned}\left|\frac{a+b}{2}\right|^p+\left|\frac{a-b}{2}\right| &\le \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2+\left|\frac{a-b}{2}\right|^2+\right)^{\frac{p}{2}}\\ &= \left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\le\frac{1}{2}|a|^p+\frac{1}{2}|b|^p.\end{aligned}$$

In der letzen Ungleichung benuzten wir die konvexität von $x^{\frac{p}{2}}$, denn $p\ge 2$.
Für die Reste bitte sehen Sie das Buch "Sobolev Spaces" von Robert Adams und John Fournier, □

Theorem 10.1.2 (Gleichmäßige Konvexität). *Sei $1<p<\infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex, d.h., zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ exisiert, so dass für alle $u,v\in L^p(\Omega)$ gilt dass*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}\le 1,\|v\|_{L^p(\Omega)}\le 1 \text{ und } \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p(\Omega)}>1-\delta\Rightarrow\|u-v\|_{L^p(\Omega)}\le\varepsilon.$$

Proof. Der Beweis für $2\le p<\infty$ (bzw. $1<p\le 2$) folgt aus (10.1) (bzw. (10.4)). □

Vergleichen Sie die Clarkson-Ungleichungen mit der Parallelogrammgleichung für Hilberträume

$$\|\frac{u+v}{2}\|^2+\|\frac{u-v}{2}\|^2=\frac{1}{2}\{\|u\|^2+\|v\|^2\}$$

Lemma 10.1.3. *Sei* $1 < p < \infty$.
(i) Ist $T \in (L^p(\Omega))'$ *mit* $\|T\| = 1$. *Dann existiert genau ein* $w \in L^p(\Omega)$ *mit* $\|w\|_{L^p(\Omega)} = Tw = 1$.
(ii) Ist $w \in L^p(\Omega)$ *mit* $\|w\|_{L^p(\Omega)} = 1$. *Dann existiert genau ein* $T \in (L^p(\Omega))'$ *mit* $\|T\| = Tw = 1$

Proof. (i) Ist $T \in (L^p(\Omega))'$ mit $\|T\| = 1$. Bei Definition gilt

$$\sup_{u \in L^p(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)}=1} |Tu| = 1.$$

Wir suchen den Maximumpunkt von $|Tu|$ in $\{\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1\}$. Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Maximale Fogle, d.h., $\|u_k\| = 1$ mit $|Tu_k| \to 1$ als $k \to \infty$. OBdA können wir annehmen, dass $\frac{1}{2} < Tu_k \to 1$. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir $\frac{u_k+u_l}{2}$ für hinreichend groß k, l mit $Tu_k > 1 - \delta$ und $Tu_l > 1 - \delta$. Ed folgt $T\frac{u_k+u_l}{2} > 1 - \delta$. Da $\|T\| = 1$, folgt

$$\frac{u_k + u_l}{2} \geq 1 - \delta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvexität von $L^p(\Omega)$ gilt $\|u_k - u_l\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$. D.h., $\{u_k\}$ ist eine Cauchyfolge. Also existiert $w \in L^p(\Omega)$ mit $u_k \to w$ in $L^p(\Omega)$. Es gilt $w \in L^p(\Omega)$ mit $\|w\|_{L^p(\Omega)} = Tw = 1$. Die Eindeutigkeit folgt aus gleicher Überlegung mit der maximale Folge $w, u, w, u, \cdots$, falls w und v zwei Lösungen sind. Der obige Beweis impliziert dass die Folge $w, u, w, u, \cdots$ Cauchyfolge ist, somit $w = u$ ist.

(ii) Ist $w \in L^p(\Omega)$ mit $\|w\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Definiere wie oben ein Funktional L_v durch

$$L_v(u) = \int_\Omega uv, \qquad \text{für } u \in L^p(\Omega),$$

wobei v durch

$$v(x) = \begin{cases} |w(x)|^{q-2}\overline{w(x)}, & \text{falls } w(x) = 0 \\ 0, & \text{sonst .} \end{cases} \tag{10.5}$$

definiert ist. Wie oben, es ist leicht zu prüfen, dass $v \in L^p(\Omega)$ und $Lv(w) = \|w\|^p_{L^p(\Omega)} = 1$ und $\|L_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)} = \|w\|^{p/q}_{L^p(\Omega)} = 1$. Dies zeigt die Existenz. Nun zeigen wir die Eindeutigkeit. Wir zeigen: Seien zwei $T_1, T_2 \in (L^p(\Omega))'$ mit $\|T_1\| = \|T_2\| = 1$ und $T_1(w) = T_2(w) = 1$, dann gilt $T_1 = T_2$. Falls nicht, dann existiert $u \in L^p(\Omega)$ mit $T_1(u) \neq T_2(u)$. Beim Ersetzen u durch λu für eine geeignete Konstante λ können wir annemhen, dass $T_1(u) - T_2(u) = 2$. Beim Ersetzen u mit durch $u + \lambda w$ für eine geeignete Konstante λ können wir weiter annemhen, dass $T_1(u) = 1$ und $T_2(u) = -1$. Für $t > 0$, gilt $T_1(w + tu) = 1 + t$. Es folgt $\|w + tu\|_{L^p(\Omega)} \geq 1 + t$, denn $\|T_1\| = 1$. Analog $\|w - tu\|_{L^p(\Omega)} \geq 1 + t$ folgt aus $T_2(w - tu) = 1 + t$. Falls $1 < p \leq 2$, gilt nach der Clarkson-Ungleichung (10.4)

$$\begin{aligned} 1 + t^p\|u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \left\|\frac{w + tu) + (w - tu)}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{w + tu) - (w - tu)}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|w + tu\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|w - tu\|^p_{L^p(\Omega)} \geq (1 + t)^p, \end{aligned}$$

welche unmöglich für alle $t > 0$ gilt. Analog, für $2 \leq p < \infty$ impiezirt die Clarkson-Ungleichung (10.2)

$$\begin{aligned} 1 + t^{p'}\|u\|^{p'}_{L^p(\Omega)} &= \left\|\frac{w + tu) + (w - tu)}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{w + tu) - (w - tu)}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\|w + tu\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|w - tu\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{p'-1} \geq (1 + t)^{p'}, \end{aligned}$$

auch unmöglich für alle $t > 0$. $\square$

Theorem 10.1.4 (Reiszscher Darstellungssatz für $L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$)**.** *Sei* $1 < p < \infty$ *und sei* $T \in (L^p(\Omega))'$*. Dann existiert* $v \in L^p(\Omega)$*, so dass*

$$Tu = L_v(u) = \int_\Omega uv, \qquad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Weiter gilt $\|v\|_{L^q(\Omega)} = \|T\|$*. D.h., der dual Raum von* $L^p(\Omega)$*,* $(L^p(\Omega))'$ *isometrisch isomorph zum* $L^q(\Omega)$ *ist.*

$$(L^p(\Omega))' \cong L^{p'}(\Omega).$$

Proof. Falls $T = 0$, nehmen wir einfach $v = 0$. Also können wir annehmen, dass $T \neq 0$, und oBdA sogar $\|T\| = 1$. Nach Theorem 10.1.3 existiert $w \in L^p(\Omega)$ mit $\|w\|_{L^p(\Omega)} = 1$ und $Tw = 1$. Definiere v durch (10.5). Dann gilt $\|v\|_{L^q(\Omega)} = \|L_v\| = 1$ und $L_v(w) = 1$. Bei der zweiten Aussage in Lemma 10.5 erhalten wir

$$T = L_v.$$

□

Theorem 10.1.5. *Für* $1 \leq p < \infty$ *ist* $L^p(\Omega)$ *separable.*

Proof. Sei I die Menge aller Quader $Q = \Pi_{k=1}^n (a_k, b_k)$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ und $Q \subset \Omega$. E sei der $\mathbb{Q}$-Vekotrraum gespannt von der charaktrischen Funktionen χ_Q $(Q \in I)$ gespannte $\mathbb{Q}$-Vekotrraum. E ist abzählbar. Wir bleiben noch die Dichtheit von E in $L^p(\Omega)$ zu zeigen. Da $C_c(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ dicht ist, brauchen wir nur die Dichtheit von E in $C_c(\Omega)$ zu zeigen. □

10.2. $p = 1$ **oder** $p = \infty$.

Theorem 10.2.1 (Reiszscher Darstellungssatz für $L^1(\Omega)$)**.** *Sei* $T \in (L^1(\Omega))'$*. Dann existiert* $v \in L^\infty(\Omega)$*, so dass*

$$Tu = \int_\Omega uv, \qquad \forall u \in L^1(\Omega).$$

Weiter gilt $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \|T\|$*. Also*

$$(L^1(\Omega))' \cong L^\infty(\Omega).$$

Proof. ObdA nehmen wir an, dass $T \neq 0$ und $\|T\| = 1$.

(i) $\mu(\Omega) < \infty$. In diesem Fall kann man zeigen, dass $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ und

$$|Tu| \leq \|u\|_1 \leq (\mu(\Omega))^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_p, \qquad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Es folgt $T \in (L^p(\Omega))'$. Nach Theorem 10.1.5 existiert $v_p \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$Tu = \int_\Omega uv_p, \qquad \forall u \in L^p(\Omega) \tag{10.6}$$

und

$$\|v_p\|_{p'} \leq \big(\mu(\Omega)\big)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{10.7}$$

Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ ist, aus (10.6) gilt für beliebige $1 < p, q < \infty$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi v_p = T\varphi = \int_\Omega \varphi v_q,$$

Es folgt $v_p = v_q$ f. ü. in Ω. Also $v = v_p \in L^p(\Omega)$ erfüllt (10.6) für alle $1 < p < \infty$. Aus (10.7) gilt

$$\|v\|_{p'} \leq \big(\mu(\Omega)\big)^{1-\frac{1}{p}} = (\mu(\Omega))^{1/p'}.$$

Mit der Aufgabe 3 in Serie 3 zeigen wir, dass $v \in L^\infty(\Omega)$ und

$$\|v\|_\infty \le \lim_{p' \to \infty} (\mu(\Omega))^{1/p'} = 1.$$

Wie im Anfang des Kapitals kann man zeigen, dass $\|v\|_\infty = 1$.

□

10.3. **Reflexivität und Separabilität von** $L^p(\Omega)$.

Theorem 10.3.1 (Reflexivität von $L^p(\Omega)$)**.** *$L^p(\Omega)$ ist genau dann reflexiv, wenn $1 < p < \infty$.*

Proof. Sei $1 < p < \infty$ Sei $X = L^p(\Omega)$. Da $X' \cong L^{p'}(\Omega)$, erhalten wir

$$X'' \cong (L^{p'}(\Omega))' \cong L^p(\Omega).$$

D.h., für alle $x'' \in X''$ existert $x \in L^p(\Omega) = X$ mit

$$x''(x') = x'(x) = Jx(x'), \qquad \forall x' \in X',$$

also X ist reflexiv.

$L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$ sind not reflexiv. Denn $L^1(\Omega)$ ist separabel und $L^\infty(\Omega)$ nicht. (Siehe Theorem 10.3.3 unten.) Wir hahen auch einen direkten Beweis in dem folgen Lemma. □

Lemma 10.3.2. *$L^1(\Omega)$ ist nich reflexiv. Dann ich $L^\infty(\Omega)$ auch nicht reflexiv.*

Proof. OBdA nehmen wir an, dass $\Omega \in \Omega$. Betrachte eine Filge $f_k = \alpha_k \chi_{B_{\frac{1}{k}}(0)}$ mit hinreichend groß k, so dass $B_{\frac{1}{k}}(0) \subset \Omega$, wobei $\alpha_k = \mu(B_{\frac{1}{k}}(0))^{-1}$. Also $\|f_k\|_{L^1} = 1$. Falls $L^1(\Omega)$ reflexiv ist, ist nach Theorem 7.2.4 $\overline{B_1(0)} \subset L^1(\Omega)$ schwach folgenkompakt. Also oBdA konvergiert f_k gegen $x \in L^1(\Omega)$ schwach, d.h.,

$$\int_\Omega f_k \varphi \to \int_\Omega f\varphi, \qquad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega). \tag{10.8}$$

Falls $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \backslash \{0\})$, gilt $f_k\varphi = 0$ für hinreichend groß k. Aus (10.8) erhalten wir

$$\int_\Omega f\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega \backslash \{0\}).$$

Es folgt $f = 0$ *f.ü.* in Ω. Dies widerspricht (10.8) mit $\varphi \equiv 1$.

Die 2. Aussage folgt aus Theorem 7.2.2 (iv).

□

Nach Theorem 12.2.1 wissen wir $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$. Es folgt $L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))'$. Man kann zeigen, dass

$$L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))'.$$

D.h. existiert es einen stietigen Funktional $F : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, die nicht solche Form

$$F(f) = \int_\Omega uf \qquad \forall f \in L^\infty(\Omega)$$

hat. ObdA nehmen Wir an, dass $0 \in \Omega$. Definiere $\mathcal{F}_0 : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch $F(f) = f(0)$. man kann zeigen, dass F ein stetiges Funktional von $C_c(\Omega)$ ist. Da $C_c(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, nach Hahn-Banach setzen wir F auf $L^\infty(\Omega)$ fort und erhalten wir einen stetigen Funktional $F : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(f) = f(0), \qquad \forall f \in C_c(\Omega).$$

Wir zeigen, dass keine $u \in L^1$ exisiert mit

$$F(f) = \int uf, \qquad \forall f \in L^\infty.$$

Angenommen, dass solche Funtion u existiert. Dann gilt

$$\int uf = 0, \qquad \forall f \in C_c(\Omega\backslash\{0\}).$$

Daraus folgt $u = 0$ *f.ü.* in $\Omega\backslash\{0\}$, und in Ω. Es folgt

$$F(f) = 0, \qquad \forall f \in L^\infty.$$

Widerspruch.

Theorem 10.3.3. *$L^\infty(\Omega)$ ist nicht separabel.*

Lemma 10.3.4. *Sei X ein Banachraum. Es existiert eine Familie $\{O_i\}_{i\in I}$ mit*

(1) (i) $\forall i \in I$ ist O_i eine nichtleere offene Teilmenge von X
(2) (ii) $O_j \cap O_j = \emptyset$, falls $i \neq j$
(3) (iii) I ist nicht anzählbar.

Dann ist X nicht separabel.

Proof. Ein Widerspruch-Argument. □

Beweis von Theorem 10.3.3. Für jede $a \in \Omega$, fixieren wir r_a mit $0 < r_a < \operatorname{dist}(a, \Omega^c)$. Setze $u_a = \chi_{B_{r_a}(a)}$ und

$$O_a := \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}.$$

Man kann leicht zeigen, dass O_a allen Bedingungen in Lemma 10.3.4 erfüllt. □

11. Kompakte Operatoren und Fredholmoperatoren

Motivation: Operator $L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $L_0 v = -\operatorname{div}(aDv)$ wie in Subsection 11.2.4.

$$Kv = -\operatorname{div}(bv) + \langle c, Dv\rangle + qv = \text{Terme niederer Ordnung}$$

oder

$$(Kv)(u) = \int_\Omega (\langle b, Du\rangle v + \langle c, Dv\rangle u + quv).$$

L_0 ist Isomorphismus (Satz von Lax-Milgram). Dagegen ist L aber i.a. kein Isomorphismus.

Beispiel 11.0.5. $Lu = -u'' + u$ auf $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist weder injektiv noch surjektive.

11.1. Kompakte Operatoren.

Definition 11.1.1. Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X, Y)$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $\{x_n\} \subset X$ die Folge $\{Kx_n\}$ eine konvergente Teilfolge hat. Wir bezeichnen den Vektorraum der kompakten Operatoren mit $K(X, Y) \subset L(X, Y)$.

Lemma 11.1.2. *Für $K \in L(X, Y)$ sind äquivalent:*

(1) K ist kompakt.
(2) $K(B)$ ist relativ kompakt in Y für jede beschränkte Menge $B \subset X$.
(3) Falls X reflexiv: K ist vollstetig, d.h., $x_n \rightharpoonup x$ schwach in $X \Longrightarrow Kx_n \to Kx$ stark in Y.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei K kompakt. Ist B beschränkt und y_k Folge in $K(B)$, so gibt es $x_k \in B$ mit $\|y_k - Kx_k\| < \frac{1}{k}$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt dann $Kx_k \to y$. Es folgt $y \in \overline{K(B)}$ und $y_k \to y$, also ist (ii) bewiesen.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei umgekehrt (ii) erfüllt und x_k eine beschränkte Folge in X, also $\|Kx_k\| \leq R$ für alle k. Da $\overline{K(B_R(0)}$ kompakt, gilt für eine Teilfolge $Kx_k \to y$. Somit ist K kompakter Operator.

(i) $\Rightarrow$ (iii). (Für diese Beweisrichtung wird die Reflexivität von X ist nicht gebraucht.) Wir zeigen jetzt: aus (i) folgt (iii). Sei dazu $x_k \rightharpoonup x$ schwach in X. Dann ist die Folge x_k beschränkt (siehe Theorem 7.1.5 (v)) und gibt es nach (i) ein $y \in Y$, so dass $Kx_k \to y$ stark in Y für eine Teilfolge $k \to \infty$. Wir behaupten, dass Kx_k gegen Kx in Y schwach in konvergiert. Für $\varphi \in Y'$ betrachte das lineare Fanktional $\xi : X \to \mathbb{R}$: $z \mapsto \langle Kz, \varphi\rangle = \varphi(Kz)$. Da K stetig ist, ist das Funktional auch stetig, also $\xi \in X'$. Es folgt

$$\xi(x_k) = \langle Kx_k, \varphi\rangle \to \langle Kx, \varphi\rangle = \xi(x),$$

denn $x_k \rightharpoonup x$ schwach in X. Da die starke die schwache Konvergenz impliziert, muss daher $y = Kx$ sein. Da die gesamte Argumentation aber auch auf jede Teilfolge von $(x_k)_{k\in N}$ angewandt werden kann, folgt dann, dass die ganze (!) Folge $(Kx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt Tx hat, also stark gegen K_x konvergiert.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei schließlich nun (iii) erfüllt, und x_k beschränkte Folge in X. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann $x_k \rightharpoonup x$ schwach in X. (Siehe Theorem 7.2.4 hier brauchen wir die Voraussetzung X reflexiv.) Aus (iii) folgt dann $Kx_k \to Kx$ stark in Y, also ist K kompakt.

□

Beispiel 11.1.3. (1) $K \in L(X,Y)$ mit $\dim \operatorname{Bild} K < \infty \Longrightarrow K$ kompakt.
(2) $\mathbb{I} \in L(X,X)$ ist nicht kompakt, falls $\dim X = \infty$
(3) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. Inklusion $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ ist kompakt. Es foglt aus Theorem 11.1.4

Theorem 11.1.4 (Einbettung von Hölderräumen)**.** *Sei X kompakter metrischer Raum, und $u_k \in C^{0,\alpha}(X)$, $0 < \alpha \leq 1$, eine Folge mit $\|u_k\|_{C^{0,\alpha}(X)} \leq \Lambda < \infty$ für alle k. Dann gibt es ein $u \in C^{0,\alpha}(X)$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt: $u_k \to u$ in $C^{0,\beta}(X)$ für jedes $0 \leq \beta < \alpha$.*

Proof. Nach (3.1) gilt für die Oszillation die Abschätzung

$$\omega_{u_k}(\delta) \leq [u_k]_{\alpha,X} \leq \Lambda\delta^\alpha.$$

Damit ist die Folge u_k gleichgradig stetig. Außerdem ist die reelle Folge $u_k(x)$ beschränkt für jedes x, also relativ kompakt in $\mathbb{R}$. Nach Arzelà-Ascoli gibt es ein $u \in C^0(X)$, so dass $u_k \to u$ in $C^0(X)$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Es gilt $u \in C^{0,\alpha}(X)$, denn

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{k\to\infty} \frac{|u(x) - u_k(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \Lambda < \infty.$$

Für $d(x,y) \leq \delta$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{|(u-u_k)(x) - (u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\beta} &= d(x,y)^{\alpha-\beta} \lim_{l\to\infty} \frac{|(u_l-u_k)(x) - (u_l-u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} \\ &\leq \Lambda d(x,y)^{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für $d(x,y) \geq \delta$

$$\frac{|(u-u_k)(x) - (u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\beta} \leq 2\delta^{-\beta}\|u-u_k\|_{C^0(X)}.$$

Also folgt

$$\limsup_{k\to\infty}[u-u_k]_{\beta,X} \le 2\Lambda\delta^{\alpha-\beta} \qquad \text{mit } \delta \to 0,$$

das heißt $u_k \to u$ in $C^{0,\beta}(X)$ wie behauptet. □

Für die Sobolevräume gibt es einen analogen und wichtigen Kompaktheitssatz. Zum Beweis verwenden wir folgendes Lemma. Dabei ist im folgenden $\eta \in C_c^\infty(B-1(0))$ ein Glättungskern mit $\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)dx = 1$.

Lemma 11.1.5. *Sei* $1 \le p < \infty$. *Dann gilt für* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$*:*

$$\text{(11.1)}\ \|u\circ\tau_h - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le |h|\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \ \textit{für } \tau_h(x) = x+h \textit{ mit } h \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{(11.2)}\ \|\eta_\rho * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \rho\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Proof. Durch Approximation können wir $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|u(x+h)-u(x)|^p &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+th)dt\right|^p dx \quad \text{(Hölder)}\\
&\le |h|^p\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 |Du(x+th)|^p dtdx\\
&= |h|^h\|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Für die zweite Abschätzung berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)-(\eta_\rho * u)(x)|^p &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\rho(x-y)(u(x)-u(y))dy\right|^p dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\eta(z)(u(x)-u(x-\rho z))dz\right|^p dx \quad (x-y=\rho z)\\
&\le \int_{B_1(0)}\eta(z)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)-u(x-\rho z)|^p dxdz\\
&\le \rho^p\|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

□

Theorem 11.1.6 (Einbettungssatz von Rellich)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt. Für* $1 \le p < \infty$. *ist dann die Einbettung*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

ein kompakter linearer Operator.

Proof. Sei $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gegeben mit $\|u_k\|_{W^{1,p}} \le M$ für alle k. Wir müssen eine Teilfolge finden, die in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Die Idee ist, dass Glättungeng $\eta_\rho * u_k$ für fest beliebig gut gleichmäßig abgeschätzt sind, und daher nach Arzelà-Ascoli konvergente Teilfolgen haben. Dabei ist der L_p-Abstand von $\eta_\rho * u_k$ zu u_k klein nach Lemma 11.1.5. Indem wir durch Null fortsetzen, ist $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt} u_k \subset \overline{\Omega}$. Wir betrachten

$$u_k^\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad u_k^\rho := \eta_\rho * u_k.$$

Es gilt $\operatorname{spt} u_k^\rho \subset \Omega_\rho$, mit $\Omega_\rho := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x,\Omega) < \rho\}$. Weiter gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig

$$D^\alpha u_k^\rho(x) = \rho^{-n-|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha\eta(\frac{x-y}{\rho})u_k(y)dy.$$

Wir schätzen mit Hölder ab, wobei $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \le M$ nach Voraussetzung,

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_k^\rho(x)| &\le \rho^{-n-|\alpha|}\|D^\alpha \eta\|_{C^0} \int_{B_\rho(y)} |u_k(y)|dy \\ &\le C(\alpha,\eta)\rho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|}\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le C(\alpha,\eta)M\rho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Fur $\rho > 0$ fest gibt es also nach Arzelà-Ascoli eine Teilfolge, so dass $u_{k_j}^\rho \to u^\rho$ in $C^1(\mathbb{R}^n)$. Wähle nun eine Folge $\rho_i \to 0$ und dazu sukzessive konvergente Teilfolgen. Nach Übergang zur Diagonalfolge gilt

$$u_k^\rho \to u^\rho \quad \text{in } C^1(\mathbb{R}^n), \quad \text{für jedes } \rho = \rho_1, \rho_2, \cdots,$$

und wir haben

$$\|u^\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du^\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k\to\infty} \|u_k^\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du_k^\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Hier wurde die L^p -Abschätzung der Glättung benutzt, siehe Analysis 3, Satz 11.2, sowie die Vertauschbarkeit von Ableitung und Glättung. Mit Lemma 11.1.5 foglt

$$\begin{aligned} \|u^{\rho_i} - u^{\rho_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \lim_{k\to\infty} \|u_k^{\rho_i} - u_k^{\rho_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \left(\|u_k^{\rho_i} - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u_k - u_k^{\rho_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) \\ &\le (\rho_i+\rho_j)\lim_{k\to\infty}\|Du_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0, \qquad \text{mit } i,j\to\infty. \end{aligned}$$

Mit Fischer-Riesz folgt $u^{\rho_i} \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit spt $u \subset \overline{\Omega}$. Schließlich folgt

$$\|u-u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \underbrace{\|u-u^{\rho_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\le \rho_i M} + \underbrace{\|u^{\rho_i} - u_k^{\rho_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\to 0, \text{ als } k\to\infty} + \underbrace{\|u_k^{\rho_i} - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\le \rho_i M}.$$

Es folgt $u_k \to u$ in L^p.

□

Lemma 11.1.7. *Die kompakten Operatoren $K(X,Y)$ bilden einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$.*

Proof. Hier ist X Banachraum. Für den Beweis benutzt man: *Sei X Banachraum. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann präkompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.* Diese Aussage können wir so zeigen: Erstens ist $A \subset X$ genau dann präkompakt, wenn $\overline{A}$ präkompakt ist. Nun die Richtung $\Leftarrow$ ist trivial, da $\overline{A}$ kompakt impliziert $\overline{A}$ präkompakt. Die Richtung $\Rightarrow$ ist auch trivial, da $\overline{A}$ präkompakt und abgeschlossen, ist $\overline{A}$ präkompakt und vollständig, also kompakt (siehe Theorem 1.3.3)

Die Reste ist eine Aufagbe. □

Lemma 11.1.8. *Sei Y ein Hilbertruam. Für $K \in L(X,Y)$ ist K genau dann kompakt, wenn es $T_k \in L(X,Y)$ gibt mit* $\dim \mathrm{Bild}\,(T_k) < \infty$ *und* $\|T_k - K\| \to 0$ *für* $k \to \infty$.

Proof. $\Leftarrow$ folgt aus Bsp 11.1.3 (1) und Lemma 11.1.7.

$\Rightarrow$. Da $\overline{K(B_1(0))}$ kompakt ist, ist $K(B_1(0))$ präkompkt. Siehe den Beweis von Lemma 11.1.7. Es folgt, dass für $\varepsilon > 0$ Kugeln $B_\varepsilon(y_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m_\varepsilon)$ exisiert, mit

$$K(B_1(0)) \subset \cup_{i=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(y_i).$$

Sie $Y_\varepsilon := \mathrm{span}\,\{y_1, y_2, \cdots y_{m_\varepsilon}\}$ und P_ε die orthogonale Projektion auf Y_ε. Nach Korollar 5.2.4 ist $Id - P$ auch eine orthogonale Projektion mit $\|Id - P\| \le 1$. Nun definiere $T_\varepsilon = P_\varepsilon K$. Das Bild von T_k ist Y_ε, also $\dim \mathrm{Bild}\,(T_k) < \infty$. Für $x \in B_1(0)$ ist $Kx \in B_\varepsilon(y_i)$ für ein i und gilt

$$(K - T_\varepsilon)(x) = (Id - P_\varepsilon)Kx = (Id - P_\varepsilon)(Kx - y_i),$$

also $\|(K-L_\varepsilon)(x)\|_Y \le \varepsilon$. Es folgt $\|K-L_\varepsilon\|_Y \le \varepsilon$.

□

Proposition 11.1.9 (Adjungierte Abbildung). *Seien E, F normierte Räume. Sei $A \in L(E,F)$. Dann gibt es eine adjungierte Abbildung $A^* \in L(F^{\cdot}E^*)$, die adjungierte oder duale Abbildung mit*

$$\langle Ax, w\rangle = \langle x, A^*w\rangle$$

für alle $(x,w) \in E \times F^*$. Die Abbildung A^* ist eindeutig bestimmt und es gilt $\|A\| = \|A^*\|$.

Beweis.
Existenz: Sei $w \in F^*$. Dann ist $\varphi(x) := \langle Ax, w\rangle$ mit $x \in E$ eine lineare Form auf E. Es gilt $\varphi \in E^*$, d. h. φ ist stetig: Es gilt nämlich

$$|\varphi(x)| = |\langle Ax, w\rangle| \le \|w\| \cdot \|Ax\| \le (\|w\| \cdot \|A\|) \cdot \|x\|$$

und daher $\|\varphi\| \le \|w\| \cdot \|A\|$. Definiere nun $A^*w := \varphi$. Nach Definition von φ ist A^* linear, also eine lineare Abbildung von F^* nach E^*. Aus $\|A^*w\| \le \|w\| \cdot \|A\|$ folgt $\|A^*\| \le \|A\|$. Andererseits folgt aus der Definition von A^*

$$|\langle Ax, w\rangle| = |\langle x, A^*w\rangle| \le \|A^*w\| \cdot \|x\| \le \|A^*\| \cdot \|w\| \cdot \|x\|.$$

Hieraus folgt mit einem Korollar zum Satz von Hahn-Banach, siehe Korollar 4.1.5, $\|Ax\| \le \|A^*\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in E$. Wir erhalten $\|A\| \le \|A^*\|$.

Eindeutigkeit: Sei $A' \in L(F^*, E^*)$ eine Abbildung, die ebenfalls $\langle Ax, w\rangle = \langle x, A'w\rangle$ für alle $(x,w) \in E \times F^*$ erfüllt. Dann erhalten wir $\langle x, (A^*-A')w\rangle = 0$ für alle $(x,w) \in E \times F^*$ und somit $A^*w = A'w$ für alle $w \in F^*$. □

Theorem 11.1.10. *Es gilt*

(1) Bei Verkettung gilt:
stetig $\otimes$ kompakt = kompakt   kompakt $\otimes$ stetig = kompakt
(2) $K : X \to Y$ kompakt $\Longrightarrow K' : Y' \to X'$ kompakt.

Proof. (1) ist trivial.

Für (2) seien $\varphi_k \in Y'$ mit $\|\varphi_k\| \le \Lambda < \infty$. Nach Lemma 11.1.2 ist $M = \overline{K(B_1(0))}$ kompakt in Y. Nun ist $\varphi_{k|M}$ gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig Lipschitz. Nach Arzelà-Ascoli, ist $\varphi_{k|M}$ eine Cauchyfolge in $C^0(M)$, nach Übergang zu einer Teilfolge. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_{C^0(M)} < \varepsilon \quad \forall k, l > k_0,$$

insbesondere wegen $K(B_1(0)) \subset M$

$$\|\varphi_k \circ K - \varphi_l \circ K\| = \sup_{x \in B_1(0)} |\varphi_k(Kx) - \varphi_l(Kx)| < \varepsilon \quad \forall, k, l > k_0,$$

Also ist $K'\varphi_k = \varphi_k \circ K$ eine Cauchyfolge in X', und konvergiert in X'.

□

11.2. **Fredholmoperatoren.**

Theorem 11.2.1 (kanonischer Isomorphismus). *Für $L \in L(X,Y)$ ist die kanonische Abbildung*

$$F : \ker L' \to (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})', \quad (F\varphi)([y]) = \varphi(y), \quad \text{für } y \in Y \tag{11.3}$$

eine Isometrie, insbesondere surjektiv.

Proof. Für $\varphi \in \ker L'$ gilt $\varphi(Lx) = 0, \forall x \in X$. Da φ stetig ist, folgt $\varphi = 0$ auf $\overline{\text{Bild}\, L}$, und $F\varphi : Y/\overline{\text{Bild}\, L} \to \mathbb{R}$ ist wohl-definiert. Nun gilt für alle $z \in \overline{\text{Bild}\, L}$

$$F\varphi([y]) = \varphi(y) = \varphi(y + z) \le \|\varphi\| \cdot \|y + z\|.$$

Durch Bildung des Infimums über z folgt $\|F\varphi\| \le \|\varphi\|$, und $F\varphi \in (Y/\overline{\text{Bild}\, L})'$.

Betrachte nun

$$G : (Y/\overline{\text{Bild}\, L})' \to Y', \quad G\psi(y) = \psi([y]).$$

Es gilt $|G\psi(y)| \le \|\psi\|\|[y]\|$, also $\|G\psi\| \le \|\psi\|$, insbesondere $G\psi \in Y'$. Außerdem bildet G nach $\ker L'$ ab, denn

$$L'(G\psi)(x) = (G\psi)(Lx) = \psi([Lx]) = 0.$$

Es ist offensichtlich, dass F, G zueinander invers sind. Somit sind F, G Isometrien. □

Theorem 11.2.2. *Hat $L \in L(X, Y)$ abgeschlossenes Bild, so ist auch Bild L' abgeschlossen und die kanonische Abbildung*

$$F : X'/\text{Bild}\, L' \to (\ker L)', \quad F([\varphi])(x) = \varphi(x).$$

ist eine Isometrie.

Proof. F ist wohldefiniert wegen $L'\psi(x) = \psi(Lx) = 0$ für $\psi \in Y'$, $x \in \ker L$. Weiter gilt

$$|F[\varphi](x)| = |(\varphi + L'\psi)(x)| \le \|\varphi + L'\| \cdot \|x\|.$$

Durch Bildung des Infimums folgt $\|F[\varphi]\| \le \|[\varphi]\|$. Wir zeigen nun

$$\varphi \in X' \text{ mit } \varphi_{|\ker L} = 0 \Rightarrow \varphi \in \text{Bild}\, L'. \tag{11.4}$$

Für das gesuchte $\psi \in Y'$ muss offenbar $\psi(Lx) = \varphi(x)$ gelten, und dadurch ist *psi* auf Bild L auch wohldefiniert. Für die Stetigkeit von ψ schätzen wir für $x_0 \in \ker L$ beliebig ab:

$$|\psi(Lx)| = |\psi(L(x + x_0)) = |\varphi(x + x_0)| \le \|\varphi\|\|x + x_0\|,$$

also $|\psi(Lx)| \le \|[x]\|$ nach Bildung des Infimums über x_0. Aber nun ist

$$\overline{L} : X/\ker L \to \text{Bild}\, L, \quad \overline{L}[x] = Lx$$

bijektiv und stetig, also gilt $\|[x]\| \le C\|Lx\|$ nach dem Satz von der inversen Abbildung, Korollar 6.1.9, (hier ist Bild L abgeschlossen wesentlich). Insgesamt ist $\psi \in (\text{Bild}\, L)'$ und kann zu $\psi \in Y'$ fortgesetzt werden nach Hahn-Banach.

Jetzt definieren wir die Umkehrabbildung $G : (\ker L)' \to X'/\text{Bild}\, L'$: Setze $\varphi \in (\ker L)'$ nach Hahn-Banach mit gleicher Norm zu $\psi \in X'$ fort, dann ist $G\varphi = [\psi]$. Mit (11.4) zeigt man, dass G wohl-definiert ist. Es gilt

$$\|G\varphi\| = \|[\psi]\| \le \|\psi\| = \|\varphi\|.$$

Alsi G ist stetig. F, G sind zueinander invers. Ferner ist Bild $L' = \{\varphi \in X' : \varphi_{|\ker L} = 0\}$ abgeschlossen. □

Definition 11.2.3. Seien X, Y Banachräume. $T \in L(X, Y)$ heißt *Fredholmoperator* ($T \in F(X, Y)$), falls Bild T ist abgeschlossener Unterraum und $\ker T$, $\operatorname{coker} T := Y/T(X)$ sind endlichdimensional.

$\dim \ker T$= Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogene Gleichung $Tx = 0$.

$\dim \operatorname{coker} T$=Anzahl der linear unabhängigen bedingunge, die $y \in Y$ erfüllen nuss, damit die inhomogene Gleichung $Tx = y$ lösbar ist.

Definition 11.2.4. Sei $T \in L(X, Y)$ Fredholmoperator.

$$\mathrm{ind}\,(T) = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \in \mathbb{Z}$$

heißt *Index* von T.

Bemerkung 11.2.5. Falls X, Y endlichdimensionl sind, so ist

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}\,(T) &= \dim \ker T - (\dim Y - \dim \mathrm{Bild}\, T) \\ &= \dim X - \dim Y. \qquad \text{(Dimensionsformel)} \end{aligned}$$

Dann ist der Index also uninteressant (da nicht abhängig von T).

Bemerkung 11.2.6. Sei $T \in L(X, Y)$. Falls ker, $\operatorname{coker} T := Y/T(X)$ sind endlichdimensional, ist $\mathrm{Bild}\, T$ abgeschlossen, also T einer Fredholmoperator.

Sei dazu T injektiv, sonst gehe über zu $X/\ker T$. Wähle ein (algebraisches) Komplement Y_0 von $\mathrm{Bild}\, L$. Dann ist $X \times Y_0$ ein Banachraum mit der Produktnorm, da Y_0 end-lichdimensional ist. Die Abbildung $\tilde{T} : X \times Y_0 \to Y$, $\tilde{T}(x, y) = Tx + y$, ist bijektiv und stetig. Nach dem Satz von der inversen Abbildung (Korollar 6.1.9) ist auch $\tilde{T}^{-1}$, und damit $\mathrm{Bild}\, T = (\tilde{T}^{-1})^{-1}(X \times \{0\})$ abgeschlossen.

Beispiel 11.2.7. $(x_1, x_2, \cdots) \to (0, x_1, x_2, \cdots)$ hat Index -1.
$(x_1, x_2, \cdots) \to (x_2, x_3, \cdots)$ hat Index 1.
Isomorphismusen haben natürlich Index null.

Theorem 11.2.8 (kanonische Isomorphismen für T, T')**.** *Sei $T \in L(X, Y)$ und* $\mathrm{Bild}\,(T)$ *abgeschlossen. Dann ist* $\mathrm{Bild}\,(T')$ *auch abgeschlossen und es gilt*

- $\ker(T') \cong (\operatorname{coker} T)'$
- $(\operatorname{coker} T') \cong (\ker T)'$

Das ist ein deriktes Korollar von Theorem 11.2.1 und Theorem 11.2.2

Korollar 11.2.9. *Sei $T \in L(X, Y)$ Fredholmoperator. Dann ist $T' \in L(Y', X')$ ebenfalls Fredholmsch und* $\mathrm{ind}\,(T') = -\mathrm{ind}(T)$.

Theorem 11.2.10 (Riesz-Schauder)**.** *Seien X, Y Banachräume. Die Abbildung $L_0 \in L(X, Y)$ habe eine beschränkte Inverse und $K \in L(X, Y)$ sei kompakt. Dann ist $L = L_0 + K$ Fredholmoperator vom Index Null. Insbesondere gilt*

$$L \textit{ surjektiv } \Leftrightarrow L \textit{ injektiv.}$$

Proof. Beweis: Wir können $X = Y$ und $L = Id + K$ annehmen, andernfalls betrachte $L_0^{-1}L$. Wir zeigen den Satz in fünf Schritten.

Schritt 1. $\ker L$ und $\ker L'$ sind endlichdimensional.

Sei $x_k \in \ker L$ mit $\|x_k\| \leq 1$. Dann gilt $x_k = -Kx_k$, also konvergiert x_k gegen ein $x \in \ker L$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Nach Heine-Borel, Theorem 11.2.11 unten, ist $\ker L$ endlichdimensional. Weiter gilt $L' = (Id + K)' = Id + K'$. Da K' kompakt ist nach Lemma 11.1.10, ist auch $\ker L'$ endlichdimensional.

Schritt 2. Sei X_0 abgeschlossenes Komplement von $\ker L$. Dann existiert $\mu > 0$ mit

$$\|Lx\| \geq \mu \|x\| \quad \text{für alle } x \in X_0.$$

Andernfalls finde $x_k \in X_0$, $\|x_k\| = 1$, mit $\|Lx_k\| \leq 1/k$. Wir können $Kx_k \to x \in X$ annehmen, da K kompakt. Dann folgt aber

$$X_0 \ni x_k = Lx_k - Kx_k \to -x,$$

also $x \in X_0$ und $\|x\| = 1$. Aber $Lx = \lim_{k\to\infty} Lx_k = 0$, ein Widerspruch.

Schritt 3. $\mathrm{Bild}\, L$ ist abgeschlossen.

Sei $y_k = Lx_k \to y \in X$. Wir können $x_k \in X_0$ annehmen. Dann folgt aus Schritt 2

$$\|x_k - x_l\| \le \frac{1}{\mu}\|L(x_k - x_l)\| = \frac{1}{\mu}\|y_k - y_l)\| \to 0 \quad \text{ mit } k, l \to \infty.$$

Also konvergiert $x_k \to x$, und $y = \lim_{k\to\infty} Lx_k = Lx \in \operatorname{Bild} L$.

Schritt 4 $(coker L)' \cong \ker L'$ nach Theorem 11.2.1.
Zusammen mit Schritt 1 folgt $\dim \operatorname{coker} L < \infty$, damit ist L Fredholm.

Schritt 5. Bestimmung des Fredholmindex. Unten zeigen wir, dass die Menge der Fredholmperatoren offen ist und der Index lokal konstant. Somit ist die Funktion $t \to \operatorname{ind}(Id + tK)$ konstant, also gleich Null.

□

Theorem 11.2.11 (Heine-Borel)**.** *Für einen normierten Raum X gilt:*

$$\overline{B_1(0)} \textit{ kompakt } \Leftrightarrow \dim X < \infty.$$

Proof. Die Implikation $\Leftarrow$ folgt aus der Aquivalenz der Normen und dam Satz von Bolzano-Weierstraß. Für $\Rightarrow$ zeigen wir zunchst die Behauptung
$V \subset X$ ein abgeschlossener, echter Teilraum. Dann gibt es zu $\vartheta < 1$ ein $x_\vartheta \in X$ mit

$$\operatorname{dist}(x_\vartheta, V) \ge \vartheta, \quad \textit{und} \quad \|x_\vartheta\| = 1.$$

Mit der Behauptung wähle induktiv eine Folge $x_k \in X$ mit

$$\|x_k\| = 1 \quad \text{ und } \quad \operatorname{dist}(x_k, \operatorname{span}\{x_1, \cdots x_{k-1}\}) \ge \frac{1}{2}.$$

Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen.

Nun zeigen wir die Behauptung. Wähle $x \in X\backslash V$. Da V abgeschlossen, gilt $\operatorname{dist}(x, V) > 0$ und es gibt ein $v_\vartheta \in V$ mit $\|x - v_\vartheta\| \le \frac{1}{\vartheta}\operatorname{dist}(x, V)$. Setze

$$x_\vartheta = \frac{x - v_\vartheta}{\|x - v_\vartheta\|}.$$

Es folgt für alle $v \in V$

$$\|x_\vartheta - v\| = \frac{1}{\|x - v_\vartheta\|}\Big\|x - v_\vartheta - \|x - v_\vartheta\|v\Big\| \ge \frac{\operatorname{dist}(x, V)}{\|x - v_\vartheta\|} \ge \vartheta.$$

□

Bemerkung 11.2.12. Falls X Hilbertraum ist, kann man in der Behauptung in dem Beweis in Theorem 11.2.11 $\vartheta = 1$ wählen. D.h., es ein $x \in X$ mit $\operatorname{dist}(x, V) = 1$ und $\|x\| = 1$ gibt. Das folgt aus dem Projektionssatz, Theorem 5.2.4: Wähle $0 \ne z_0 \in X\backslash V$. Nach Theorem 5.2.4 gilt $z_0 = x_0 + y_0$ mit $y_0 \in V$ und $x_0 \in V^\perp$. Dann setze $x = x_0/\|x_0\|$. Es ist klar, dass $\|x\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(x, V) = \inf_{y \in V} \|x - y\| \le \|x\| = 1.$$

Andererseits gilt $\|x - y\|^2 \ge \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 = 1$, $\forall y \in V$, also $\operatorname{dist}(x, V) = 1$.

Lemma 11.2.13. *Sei V Unterraum eines Banachraums X.*

(a) Falls $\dim V < \infty$ oder falls V abgeschlossen mit $\dim(X/V) < \infty$, so hat V ein abgeschlossenes Komplement.

(b) Ist $X = V \oplus W$ für abgeschlossene Unterräume V, W, so sind die Projektionen P_V, P_W stetig.

Proof. Wir beginnen mit (a) im Fall $\dim V = n < \infty$. Sei $v_1, \cdots, v_n$ eine Basis von V, und $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ die duale Basis von V' , also $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Nach Hahn-Banach, haben die φ_i eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_i \in X'$. Definiere die stetige lineare Abbildung

$$P \in L(X, V), \quad Px = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\varphi}_i(x) v_i.$$

Es folgt $Pv_j = v_j$, $P^2 = P$ und $P_{|V} = Id_{|V}$. Für $x \in X$ folgt $x = Px + (x - Px) \in V \oplus \ker P$. Der Raum $\ker P$ ist ein Komplement wie verlangt. Für $\dim X/V = n < \infty$ wähle eine Basis $[x_1], \cdots, [x_n]$ von X/V. Dann ist $\operatorname{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$ ein endlichdimensionales, also abgeschlossenes, Komplement.

In (b) ist $V \times W$ mit der Produktnorm ein Banachraum, und die Abbildung $V \times W \to X, (v, w) \mapsto v + w$, ist bijektiv und stetig. Nach Satz der inversen Abbildung ist auch die Inverse stetig, und damit die Projektionen P_V, P_W, auf die Komponenten.

□

Lemma 11.2.14 (Additivität des Fredholmindex). *Seien $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$ Fredholm. Dann ist $TS : X \to Z$ Fredholm und es gilt*

$$\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T).$$

Proof. Es ist $S : \ker TS \to \operatorname{Bild} S \cap \ker T$ surjektiv mit Kern $\ker S$, also gilt

$$\dim \ker TS = \dim \ker S + \dim(\operatorname{Bild} S \cap \ker T) < \infty.$$

Wähle nun Komplemente $\ker T = (\operatorname{Bild} S \cap \ker T) \oplus Y_0$, und dann $Y = \operatorname{Bild} S \oplus Y_0 \oplus Y_1$. Es folgt die direkte Summe $\operatorname{Bild} T = \operatorname{Bild} TS \oplus TY_1$, also

$$\dim \operatorname{coker} TS = \dim \operatorname{coker} T + \dim Y_1 < \infty.$$

Schließlich haben wir

$$\begin{aligned} \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} S &= \dim(\operatorname{Bild} S \cap \ker T) + \dim Y_0 - (\dim Y_0 + \dim Y_1) \\ &= \dim(\operatorname{Bild} S \cap \ker T) - \dim Y_1. \end{aligned}$$

Durch Kombination der drei Gleichungen ergibt sich die Behauptung.

□

Lemma 11.2.15 (Neumannsche Reihe). *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist $\mathrm{id} - T \equiv \mathbb{1} - T$ invertierbar, es gelten $(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in L(X)$ und $\|(\mathbb{1} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$.*

Beweis. Aufgrund der geometrischen Reihe konvergiert die Reihe absolut:

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} T^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|T\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Die angegebene Reihe ist invers zu $\mathbb{1} - T$, denn es gilt

$$\sum_{n=0}^{N} T^n \cdot (\mathbb{1} - T) = \mathbb{1} - T^{N+1} = (\mathbb{1} - T) \cdot \sum_{n=0}^{N} T^n.$$

Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung, da $\left\| T^{N+1} \right\| \leq \|T\|^{N+1} \to 0$. □

Theorem 11.2.16. *Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, X)$ und gelte $ST = \mathbb{1}_X$ sowie $TS = \mathbb{1}_Y$. S heißt dann Inverse zu T. Dann gibt es eine Umgebung U von T in $L(X, Y)$, so dass alle $\tilde{T} \in U$ eine Inverse in $L(Y, X)$ besitzen.*

Der Beweis funktioniert auch für einseitige Inverse.

Beweis. Sei

$$U := \left\{\tilde{T} \in L(X,Y) \colon \|S\| \cdot \left\|\tilde{T} - T\right\| < 1\right\}.$$

Sei $\tilde{T} \in U$ beliebig. Es gilt $S\tilde{T} = ST + S\big(\tilde{T} - T\big) = \mathbb{1} + S\big(\tilde{T} - T\big)$. Dann ist $S\tilde{T} \in L(X)$ mit $\left\|\mathbb{1} - S\tilde{T}\right\| = \left\|S\big(\tilde{T} - T\big)\right\| \leq \|S\| \cdot \left\|\tilde{T} - T\right\| < 1$. Somit ist $S\tilde{T} = \mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - S\tilde{T}\right)$ mit Hilfe der Neumannschen Reihe invertierbar. Sei $A \in L(X)$ die Inverse zu $S\tilde{T}$. Es folgt $\mathbb{1} = (AS)\tilde{T}$.

Analog bekommen wir eine rechtsseitige Inverse.

Rechtsseitige und linksseitige Inverse stimmen überein. □

Theorem 11.2.17. *Sei $L : X \to Y$ Fredholmoperator. Dann hat L in $L(X,Y)$ eine Umgebung, die aus Fredholmperatoren mit demselben Index besteht.*

Proof. Beweis: Wähle abgeschlossene Komplemente $X = X_0 \oplus \ker L$ und $Y = \operatorname{Bild} L \oplus Y_1$, insbesondere $\dim Y_1 < \infty$. Die Projektionen auf die Komponenten sind dann stetig. Für $S \in L(X,Y)$ setze $S_0 : X_0 \to \operatorname{Bild} L$, $S_0 = P_{\operatorname{Bild} L} S i_{X_0}$, wobei i_{X_0} die Inklusionsabbildung ist. Es gilt

$$\|S_0 - L_0\| = \|P_{\operatorname{Bild} L}(S - L) i_{X_0}\| \leq C \|S - L\|.$$

Hierbei ist $L_0 : X_0 \to \operatorname{Bild} L$, $L_0 = P_{\operatorname{Bild} L} L i_{X_0}$. Es ist offensichtlich, dass L_0 ein Isomorphismus ist, also auch S_0 für $\|S - L\| < \varepsilon$, nach dem obigen Satz. Dann ist S Fredholmoperator:

(1) Die Projektion $\ker S \to X/X_0$ ist injektiv: aus $Sx = 0$ für $x \in X_0$ folgt $S_0 x = P_{\operatorname{Bild} L} S i_{X_0} x = 0$ und somit $x = 0$.

(2) Die Projektion $Y_1 \to Y/\operatorname{Bild} S$ ist surjektiv: zu $y \in Y$ wähle $x \in X_0$ mit $S_0 x = P_{\operatorname{Bild} L} y$, also $P_{\operatorname{Bild} L}(y - Sx) = 0$ bzw. $ySx = y_1 \in Y_1$.

In $S_0 = P_{\operatorname{Bild} L} S i_{X_0}$ sind also alle Operatoren Fredholm. Es folgt aus Lemma 11.2.14

$$0 = \operatorname{ind} S_0 = \dim \operatorname{coker} L + \operatorname{ind} S - \dim \ker L = \operatorname{ind} S - \operatorname{ind} L.$$

□

11.3. **Anwendung auf elliptischee Randwertptrobleme.**

Lemma 11.3.1. *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator*

$$\begin{array}{rcl} K : W_0^{1,2}(\Omega) & \to & W_0^{12}(\Omega)' \\ (Ku)(v) & = & \int_\Omega (\langle b, Dv\rangle u + \langle c, Du\rangle v + quv) \end{array}$$

für $b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $q \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist K kompakt.

Proof. Nach Theorem 11.1.6 (Einbettungssatz von Rellich) ist die Einbettung $E : W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ kompakt. Da die Inverse der Rieszabbildung $I^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)'$, $I^{-1}u(v) = \int_\Omega uv$, stetig ist, folgt mit Theorem 11.1.10 (i) auch die Kompaktheit von

$$E' I^{-1} : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)', \quad (E' I^{-1} f)(v) = I^{-1} f(Ev) = \int_\Omega fv.$$

wobei E' der adjungierte Operator von E ist. Daraus folgt die Kompaktheit der drei Abbildungen, mit Theorem 11.1.10 (ii)

$$\begin{array}{ccccc} W_0^{1,2}(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & W_0^{1,2}(\Omega)' \\ u & \xmapsto{E} & u & \xmapsto{-\partial_j b^j} & -\partial_j(b^j u) \\ u & \xmapsto{c^j\partial_j} & c^j\partial_j u & \xmapsto{E'I^{-1}} & c^j\partial_j u \\ u & \xmapsto{E} & u & \xmapsto{q} & qu \end{array}$$

□

Theorem 11.3.2. *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator $L = L_0 + K$ mit*

$$\begin{aligned} L_0 u &= -\operatorname{div}(aDu) \\ Ku &= -\operatorname{div}(bu) + \langle c, Du\rangle + qu \end{aligned}$$

und den Voraussetzungen:

(B) beschränkte Koeffizienten:

$$a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R})), \quad b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad q \in L^\infty.$$

(E) Elliptizität: $\langle \xi, a(x)\xi\rangle \geq \mu|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ und einem $\mu > 0$.

Dann ist $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ ein Fredholmoperator vom Index null. Insbesondere gilt die Alternativ

$$L \text{ injektiv} \Longleftrightarrow L \text{ surjektiv}.$$

Proof. Unter der Bedingungen (B) und (E) können wir Satz von lax-Milgram anwenden und zeigen, dass L_0 Isomorphismus ist. Da K kompakt ist, ist L nach Riesz-Schauder, Theorem 11.2.9, Fredholm mit Index Null. Insbesondere gilt die Alternativ: L injektiv $\Longleftrightarrow$ L surjektiv.

□

Theorem 11.3.3 (Lösbarkeitskriterium für Dirichletproblem)**.** *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator $L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ wie in Satz 11.3.2. Für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ sind äquivalent:*

(1) $Lv = \varphi$ besitzt eine Lösung $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,
(2) $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in \ker(L^*)$, wobei L^*bezeichnet als den (formal) adjungierten Operator von L, es gilt $L^*v = -\operatorname{div}(a^*Dv) - \operatorname{div}(cv) + \langle b, Dv\rangle + qv$.

Hier ist L der *formal* adjungierte Operator zu L, definiert durch

$$L^* : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)', \quad L^*u(v) = Lv(u). \tag{11.5}$$

Wir berechnen explizit

$$\begin{aligned} Lv(u) &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a^{ij}\partial_i v \partial_j u + \sum_{j=1}^n b^j v(\partial_j u) + \sum_{j=1}^n c^j(\partial_j v)u + qvu \Big) \\ &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a^{ji}\partial_i u \partial_j v + \sum_{j=1}^n c^j u(\partial_j v) + \sum_{j=1}^n b^j(\partial_j u)v + quv \Big) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die (schwache) Darstellung

$$L^*u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j a^{ji}\partial_i u - \sum_{j=1}^n \partial_j(c^j u) + \sum_{j=1}^n b^j\partial_j u + qu. \tag{11.6}$$

Die Koeffizienten von ergeben sich also durch formale partielle Integration. Sind Lu und Lv als L^2-Funktionen darstellbar, so gilt in der Tat

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = Lu(v) = Lv(u) = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Der Operator L^* ist adjungierter Operator von L bezüglich des L^2-Skalarprodukts. Er ist nicht die Hilbertraumadjungierte von $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ im Sinne der folgenden Definition der Hilbertraumadjungierte

Lemma 11.3.4 (Hilbertraumadjungierte)**.** *Seien X, Y Hilberträume über $\mathbb{R}$. Dann gibt es zu jedem $T \in L(X, Y)$ genau ein $T \in L(Y, X)$ mit*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall, x \in X, y \in Y$$

Es gilt $\|T\| = \|T\|$. T^* heißt die Hilbertraumadjungierte von T.

Proof. Sei T' die Adjungierte Abbildung von T, gemäß Proposition 11.1.9, d.h., $T' : Y' \to X'$ mit $\langle Tx, \varphi\rangle = \langle x, T'\varphi\rangle$ für alle $x \in X$ und $\varphi \in Y'$. Seien $I_X : X' \to X$ und $I_Y : Y' \to Y$ sind die in Thereom 5.2.5 definierte Abbildungen Setze $T^* = I_X T' I_Y^{-1}$. T^* ist die gesuchte:

$$\langle x, T^*y\rangle \quad = \quad \langle x, I_X T' I_Y^{-1} y\rangle = T' I_Y^{-1} y(x) = I_Y^{-1} y(Tx) = \langle Tx, y\rangle$$

□

12. Spektralsatz

12.1. **Spektrum.** Sei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 12.1.1. Sei X ein Banachraum und $T \in L(X, X) \equiv L(X)$.

(i) Die Menge $\rho(T) \subset \mathbb{K}$ aller rellen oder komplexen
Zahlen, so dass $T - \lambda\,\mathrm{id} \equiv T - \lambda$ ein Banachraumisomorphismus ($T - \lambda$ ist stetig, bijektiv und $(T-\lambda)^{-1}$ ist ebenfalls stetig) ist, heißt Resolventenmenge von T.

(ii) $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heißt Spektrum von T.

(iii) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \colon T - \lambda \text{ ist nicht injektiv}\}$ heißt das Punktspektrum von T. $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißt Eigenwert und $\ker(T - \lambda \mathbb{1})$ heißt Eigenraum.

(iv) $\sigma_c(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \colon T - \lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} = X, (T-\lambda)^{-1} \colon R(T-\lambda) \to X \text{ nicht stetig}\}$ heißt das kontinuierliche Spektrum von T.

(v) $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon T - \lambda \text{ injektiv}, \overline{R(T-\lambda)} \neq X\}$ heißt das residuelle Spektrum oder Restspektrum von X.

Korollar 12.1.2. *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T) \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen.*

Beweis. Wir haben in Korollar 11.2.16 gezeigt, dass $\mathbb{K} \setminus \sigma(T) = \rho(T)$ offen ist. □

Lemma 12.1.3. *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T)$ kompakt.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|T\|$. Dann ist $T - \lambda = (-\lambda)(\mathbb{1} - \lambda^{-1}T)$ invertierbar, da $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ gilt. Somit ist $\sigma(T)$ beschränkt und die Behauptung folgt, da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist. □

12.2. **Selbstadjungierte Operatoren.** Die adjungierte Abbildung haben wir in Proposition 11.1.9 definiert.

Definition 12.2.1. Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$. Seien $x, y \in H$. Sei $I \colon H^* \to H$ wie im Satz von Riesz, Theorem 5.2.5. In der folgenden Rechnung schreiben wir explizit hin, wenn es sich um das Skalarprodukt und nicht im die Paarung zwischen H und H^* handelt. Es gilt

$$\langle Ax, y\rangle_{\text{Skp.}} = \left\langle Ax, I^{-1}y\right\rangle = \left\langle x, A^*I^{-1}y\right\rangle = \left\langle x, I^{-1}IA^*I^{-1}y\right\rangle$$

$$= \left\langle x, IA^*I^{-1}y \right\rangle .$$

Dann nennen wir $IA^*I^{-1} \in L(H)$ die Hilbertraumadjungierte von A und bezeichnen diese Abbildung wieder mit A^*.

Gilt $A = A^*$, so heißt A selbstadjungiert.

Statt der Rechnung mit $I\colon H^* \to H$ in der Definition der Hilbertraumadjungierten kann man den Beweis der Existenz einer allgemeinen Adjungierten auch an Hilberträume anpassen (Übung).

Proposition 12.2.2. *Sei H ein Hilbertraum. Dann hat die Abbildung $*\colon L(H) \to L(H)$ mit $A \mapsto A^*$ die folgenden Eigenschaften:*

(i) $A^{**} = A$, *d. h. $*$ ist eine Involution.*
(ii) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$ *für* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
(iii) $(AB)^* = B^*A^*$,
(iv) $\|A\| = \|A^*\|$,
(v) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.
(vi) Besitzt A eine stetige Inverse, so auch A^*. Es gilt dann $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Beweis. Übung. □

Definition 12.2.3. Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $A \in L(H)$ heißt normal, falls $AA^* = A^*A$ gilt.

Proposition 12.2.4. *Sei H ein Hilbertraum.*

(i) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren, $A \in L(H)$ und gelte $A_n \to A$ punktweise (oder sogar in der Operatornorm). Dann ist A selbstadjungiert.
(ii) Seien A, B selbstadjungiert. Dann ist die Verknüpfung AB genau dann selbstadjungiert, wenn A und B vertauschen.

Beweis.

(i) Seien $x, y \in H$ beliebig. Dann folgt
$$\langle Ax, y \rangle \leftarrow \langle A_n x, y \rangle = \langle x, A_n y \rangle \to \langle x, Ay \rangle$$
für $n \to \infty$ und damit die Behauptung.
(ii) Dies folgt aus $AB \overset{?}{=} (AB)^* = B^*A^* = BA$, wobei die Gleichheitszeichen stets gelten.

□

Lemma 12.2.5. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$. Dann gilt $H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = \overline{R(A^*)} \oplus N(A)$. Die Summanden stehen jeweils senkrecht aufeinander.*

Beweis. Wegen $A^{**} = A$ genügt es, die erste Gleichheit zu beweisen.

Wir erinnern weiterhin an Lemma 5.1.10, wonach $\overline{R(A)}^\perp = R(A)^\perp$ gilt.

„$N(A^*) \subset \overline{R(A)}^\perp$“: Sei $y \in N(A^*)$. Dann gilt $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle = 0$ für alle $x \in H$. Also ist $y \in R(A)^\perp$.

„$\overline{R(A)}^\perp \subset N(A^*)$“: Sei $y \in \overline{R(A)}^\perp$. Dann folgt $\langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle = 0$ für alle $x \in H$. Somit ist $y \in N(A^*)$. □

Definition 12.2.6. Sei H ein Hilbertraum. Seien $A, B \in L(H)$ selbstadjungiert.

(i) Dann ist A kleiner als B, $A \le B$, falls $\langle Ax, x \rangle \le \langle Bx, x \rangle$ für alle $x \in H$ gilt.
(ii) A heißt positiv (semidefinit) oder monoton, falls $0 \le A$ gilt.
(iii) A heißt gleichmäßig positiv definit, falls es ein $c > 0$ mit
$$c \cdot \|x\|^2 \le \langle Ax, x \rangle$$
für alle $x \in H$ gibt.

Bemerkung 12.2.7. Ist $A \geq 0$, so gilt auch $A^n \geq 0$, da wir rund die Hälfte der Operatoren A im Skalarprodukt auf die andere Seite schreiben dürfen.

Theorem 12.2.8. *Sei H ein Hilbertraum. Erfülle $A \in L(H)$*

$$\|Ax\| \geq c\|x\| \quad \text{für alle } x \in H$$

für ein $c > 0$ und sei A^* injektiv. Dann ist A stetig invertierbar.

Die Injektivität von A^* ist automatisch gegeben, wenn A selbstadjungiert ist.

Beweis.

(i) $R(A)$ ist abgeschlossen, denn aus $Ax_x = y_n \to y$ folgt

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|Ax_n - Ax_m\| = \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|.$$

Somit bilden die x_n eine Cauchyfolge. Gelte $x_n \to x$. Dann folgt $Ax = y$.

(ii) Nach Lemma 12.2.5 gilt $H = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}$. Nach Voraussetzung ist $N(A^*) = \{0\}$. Da $R(A)$ abgeschlossen ist, folgt $H = R(A)$. Somit ist A bijektiv.

(iii) Sei B die Inverse zu A. Dann ist B linear und wegen

$$\|By\| \leq \tfrac{1}{c}\|ABy\| = \tfrac{1}{c}\|y\|$$

für alle $y \in H$ ist B auch beschränkt. ◻

Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen.

Theorem 12.2.9. *Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Es gilt

$$\langle Ax, x\rangle - \lambda\|x\|^2 = \langle (A - \lambda\mathbb{1})x, x\rangle.$$

Da A selbstadjungiert ist, erhalten wir

$$|\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|x\|^2 = |\operatorname{Im}\langle (A - \lambda\mathbb{1})x, x\rangle| \leq \|(A - \lambda\mathbb{1})x\| \cdot \|x\|.$$

Es ist $(A - \lambda\mathbb{1})^* = A - \overline{\lambda}\mathbb{1}$.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\left\langle \left(A - \bar{\lambda}\mathbb{1}\right) x, x\right\rangle = \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{\in\mathbb{R}} - \bar{\lambda}\underbrace{\|x\|^2}_{\in\mathbb{R}} \notin \mathbb{R}$$

für $x \neq 0$. Somit ist $(A - \lambda\mathbb{1})^*$ injektiv. Nach Theorem 12.2.8 ist $A - \lambda\mathbb{1}$ daher stetig invertierbar. ◻

Theorem 12.2.10. *Sei H ein Hilbertraum und sei $A \in L(H)$ mit $A \geq 0$. Dann gilt $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.*

Beweis. Nach Theorem 12.2.9 gilt stets $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Für $\lambda < 0$ erfüllt $A - \lambda\mathbb{1}$ die Voraussetzungen aus Theorem 12.2.8. ◻

Theorem 12.2.11 (Satz von Vigier)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von selbstadjungierten Operatoren in $L(H)$ mit*

$$A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq \kappa\mathbb{1}$$

für ein $\kappa > 0$. Dann gibt es einen selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ mit $A_n \to A$ punktweise.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass man für selbstadjungierte Operatoren $B \geq 0$ ähnlich wie in der Linearen Algebra eine Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle$$

für alle $x, y \in H$ zeigt: Betrachte das Skalarprodukt $\langle (B + \varepsilon \mathbb{1})\cdot, \cdot\rangle$ und lasse am Ende $\varepsilon \to 0$.

Gelte ohne Einschränkung $0 \leq A_0$ und $\kappa = 1$. Es genügt nach Proposition 12.2.4 nachzuweisen, dass $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in H$ eine Cauchyfolge ist, da Linearität und Stetigkeit erhalten sind.

Sei $x \in H$ und sei $n > m \geq 0$. Dann gilt $0 \leq A_n - A_m \leq \mathbb{1}$ und daraus erhalten wir mit der verallgemeinerten Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|(A_n - A_m)x\|^4 &= \langle (A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x\rangle^2 \\
&\leq \langle (A_n - A_m)x, x\rangle \left\langle (A_n - A_m)^2 x, (A_n - A_m)x\right\rangle \\
&\leq \langle (A_n - A_m)x, x\rangle \|A_n - A_m\|^3 \|x\|^2 \\
&\leq (\langle A_n x, x\rangle - \langle A_m x, x\rangle)\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Da die Folge $\langle A_n x, x\rangle$ eine monotone beschränkte reelle Folge ist, ist sie eine Cauchyfolge. Somit ist auch $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Die Behauptung folgt. ☐

12.3. **Projektoren.**

Definition 12.3.1. Sei H ein Hilbertraum. Ein Projektor P ist ein idempotenter ($P^2 = P$) selbstadjungierter Operator in $L(H)$.

Proposition 12.3.2. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes. Dann ist die Projektion auf M wie in Theorem 5.2.2 oder Korollar 5.2.4 ein Projektor.*

Beweis. Sei $H = M \oplus M^\perp$ und $z = x + y$ mit $(x, y) \in M \times M^\perp$ wie in Korollar 5.2.4 zerlegt. Dann ist $Pz = x$. Die Linearität folgt aus der Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$. Die Stetigkeit haben wir in Lemma 5.2.3 bereits nachgewiesen. Aus $\|z\|^2 = \|Pz\|^2 + \|y\|^2$ folgt sogar $\|P\| \leq 1$. $P^2 = P$ ist klar.

P ist selbstadjungiert: Seien $z_1 = x_1 + y_1$ und $z_2 = x_2 + y_2$ Zerlegungen wie oben. Dann folgt $Pz_i = x_i$ für $i = 1, 2$ und

$$\langle Pz_1, z_2\rangle = \langle x_1, z_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle = \langle z_1, x_2\rangle = \langle z_1, Pz_2\rangle.$$ ☐

Proposition 12.3.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $P \in L(H)$ ein Projektor. Dann ist $M := R(P) = P(H)$ ein abgeschlossener Unterraum, der genau die Fixpunkte von P enthält. P ist die Projektion aus Theorem 5.2.2 auf M.*

Beweis.

(i) Da P linear ist, ist M ein Unterraum.

(ii) Sei x ein Fixpunkt, so gilt $Px = x$, also $x \in P(H) = M$.
Sei umgekehrt $x \in P(H)$, so existiert ein $y \in H$ mit $Py = x$. Also folgt $x = Py = P^2 y = Px$. Somit ist x auch ein Fixpunkt.
Wegen $M = \{x \in H : Px - \mathbb{1}x = 0\}$ ist M abgeschlossen.

(iii) Sei $x \in H$ beliebig. Dann ist $x - Px \in M^\perp$, denn es gilt für beliebiges $y \in H$
$$\langle x - Px, Py\rangle = \langle Px - P^2 x, y\rangle = 0.$$
Da die Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$ eindeutig ist, ist Px durch $Px \in M$ und $x - Px \in M^\perp$ eindeutig bestimmt. Die Projektion auf M aus Theorem 5.2.2 liefert ebenfalls eine solche Zerlegung. Somit ist P gerade diese Projektion.

☐

Definition 12.3.4. Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$.

(i) Ein Teilraum $M \subset H$ heißt bezüglich A invariant, falls $A(M) \subset M$ gilt.
(ii) Ein Teilraum $M \subset H$ heißt bezüglich A reduzierend, falls M bezüglich A und bezüglich A^* invariant ist.

Proposition 12.3.5. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes, P der Projektor auf M. Sei $A \in L(H)$. Dann gelten*
(i) M ist genau dann bezüglich A invariant, wenn $P \circ A \circ P = A \circ P$ gilt.
(ii) M reduziert A genau dann, wenn A und P vertauschen.

Beweis.
(i) $P \circ A \circ P = A \circ P$ ist äquivalent zu $PAx = Ax$ für alle $x \in M$. Dies ist äquivalent zur Invarianz von M.
(ii) „$\Longrightarrow$“: Angenommen, M reduziert A. Dann gilt nach (i) $PA^*P = A^*P$ und ebenso $PAP = AP$. Hieraus folgt
$$PA = (A^*P)^* = (PA^*P)^* = PAP = AP.$$
„$\Longleftarrow$“: Gelte nun $AP = PA$. Dann folgt $AP = APP = PAP$, also $A(M) \subset M$.
Aus $AP = PA$ folgt $A^*P = PA^*$ und dann ebenso, dass $A^*(M) \subset M$ gilt. Also reduziert M den Operator A. □

Proposition 12.3.6. *Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraumes. Dann gilt für die Projektoren*
$$\mathrm{pr}_{M^\perp} = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M\,.$$

Beweis. $\mathrm{pr}_{M^\perp}$ sowie $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_{M^\perp}$ sind selbstadjungiert und es gilt $(\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M)^2 = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M - \mathrm{pr}_M + \mathrm{pr}_M^2 = 1 - \mathrm{pr}_M$. Somit ist $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$ ein Projektor. Aus der Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$ folgt direkt, dass $(\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M)(H) = M^\perp$ gilt. Somit ist $\mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$ ein Projektor auf $M^\perp$. □

Proposition 12.3.7. *Ein Teilraum $M \subset H$ eines Hilbertraumes ist genau dann ein $A \in L(H)$ reduzierender Teilraum, wenn A die Räume M und $M^\perp$ invariant lässt.*

In diesem Fall gibt es zu A Operatoren $A_1 \in L(M)$ und $A_2 \in L\left(M^\perp\right)$, so dass A, wenn wir H als $H = M \oplus M^\perp$ zerlegen, als
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$
dargestellt werden kann, d. h. es gilt für $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in M$ und $x_2 \in M^\perp$
$$Ax = A_1x_1 + A_2x_2,$$
wobei wir $A_1x_1 \in M$ und $A_2x_2 \in M^\perp$ als Elemente in H betrachten.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Reduziert M den Operator A, so vertauscht A mit pr_M, also auch mit $\mathrm{pr}_{M^\perp} = \mathbb{1} - \mathrm{pr}_M$. Daher reduziert auch $M^\perp$ den Operator A. Somit sind M und $M^\perp$ unter A invariante Unterräume.

„$\Longleftarrow$“: Nehme an, dass A die Räume M und $M^\perp$ invariant lässt. Setze $P := \mathrm{pr}_M$. Dann folgt $AP = PAP$ nach Proposition 12.3.5. Aus der Invarianz von $M^\perp$ folgt ebenso $A(\mathbb{1} - P) = (\mathbb{1} - P)A(\mathbb{1} - P)$. Wir multiplizieren aus und erhalten
$$A - AP = A - PA \underbrace{- AP + PAP}_{=0} = A - PA.$$
Somit vertauschen A und P und wir erhalten nach Proposition 12.3.5, dass M den Operator A reduziert.

Die Zerlegung von A in Blockmatrixgestalt folgt direkt aus der Invarianz von M und $M^\perp$ unter A. □

Proposition 12.3.8. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann ist $P := P_1 \circ P_2$ genau dann ein Projektor, wenn $[P_1, P_2] = 0$ gilt. In diesem Fall ist P ein Projektor auf den Raum $M := M_1 \cap M_2$.*

Beweis. Nach Proposition 12.2.4 ist P genau dann selbstadjungiert, wenn $[P_1, P_2] = 0$ gilt. Hieraus folgt dann

$$P^2 = P_1 \circ P_2 \circ P_1 \circ P_2 = P_1^2 \circ P_2^2 = P_1 \circ P_2 = P.$$

Somit ist P ein Projektor.

Es gilt $R(P) \subset M_1 \cap M_2$, da wir mit $M_{12}^{\perp(M_2)} := \{x \in M_2 \colon x \perp M_1 \cap M_2\}$ die orthogonale Zerlegung $H = (M_1 \cap M_2) \oplus M_{12}^{\perp(M_2)} \oplus M_2^\perp$ haben. Andererseits gilt $P|_M = \mathbb{1}|_M$. □

Korollar 12.3.9. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann gilt $M_1 \perp M_2$ genau dann, wenn $P_1 \circ P_2 = 0$ ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Seien M_1 und M_2 orthogonal zueinander. Seien $x, y \in H$ beliebig. Dann folgt $0 = \langle P_1 x, P_2 y\rangle = \langle x, P_1 P_2 y\rangle$. Somit ist $P_1 P_2 = 0$.

„$\Longleftarrow$“: Seien $x \in M_1$ und $y \in M_2$. Dann gilt $\langle x, y\rangle = \langle P_1 x, P_2 y\rangle = \langle x, P_1 P_2 y\rangle = 0$. □

Proposition 12.3.10. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $P_1, P_2 \in L(H)$ Projektoren auf M_1 bzw. M_2. Dann ist $P := P_1 + P_2$ genau dann ein Projektor, wenn $P_1 \circ P_2 = 0$ gilt. In diesem Fall ist P ein Projektor auf $M = M_1 \oplus M_2$, die orthogonale Summe von M_1 und M_2.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Ist P ein Projektor, so ist P idempotent. Wäre $P_1 P_2 \neq 0$, so folgt nach Korollar 12.3.9, dass $M_1 \not\perp M_2$ gilt. Ohne Einschränkung nehmen wir also an, dass es $M_1 \ni x = y_2 + y_2^\perp$ mit $\left(y_2, y_2^\perp\right) \in M_2 \times M_2^\perp$ und $y_2 \neq 0$ gibt. Dann gelten $P_1 x = x$, $P_2 y_2 = y_2$ und $P_2 y_2^\perp = 0$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} Px &= (P_1 + P_2)(x) = x + P_2\left(y_2 + y_2^\perp\right) = x + y_2 \\ = P^2 x &= (P_1 + P_2)(x + y_2) = x + P_1 y_2 + P_2 x + P_2 y_2 = x + P_1 y_2 + y_2 + y_2 \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$P_1 y_2 = -y_2.$$

Also ist $y_2 \neq 0$ ein Eigenvektor von P_1 zum Eigenwert -1. Dies ist absurd, da Projektoren nur die Eigenwerte 0 und 1 haben, es gilt nämlich für einen Eigenvektor z und einen Eigenwert λ stets

$$\lambda z = Pz = P^2 z = P(\lambda z) = \lambda^2 z,$$

also $0 = \lambda(\lambda - 1)$.

„$\Longleftarrow$“: Gelte $P_1 P_2 = 0$. Aus Korollar 12.3.9 erhalten wir auch $P_2 P_1 = 0$. Somit ist $P := P_1 + P_2$ idempotent. Nach Proposition 12.2.4 oder direkter Überlegung ist P auch selbstadjungiert.

Sei also P ein Projektor. Die Räume $M_1, M_2 \subset H$ stehen orthogonal aufeinander. Für $x = x_1 + x_2$ mit $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$ gilt $Px = P_1 x_1 + P_1 x_2 + P_2 x_1 + P_2 x_2 = x_1 + 0 + 0 + x_2 = x$. Also gilt $M_1 \oplus M_2 \subset R(P)$. Andererseits gilt $R(P) \subset R(P_1) \oplus R(P_2) = M_1 \oplus M_2$. Somit folgt die Behauptung. □

Proposition 12.3.11. *Sei H ein Hilbertraum. Seien $M_i \subset H$, $i = 1, 2$, abgeschlossene Teilräume mit zugehörigen Projektoren P_i.*

(i) Dann ist $P := P_2 - P_1$ genau dann ein Projektor, wenn $M_1 \subset M_2$ gilt.

(ii) *P projiziert auf das orthogonale Komplement von M_1 in M_2.*
(iii) *Es gilt*

$$M_1 \subset M_2 \quad \Longleftrightarrow \quad P_1 = P_2P_1 \quad \Longleftrightarrow \quad P_1 \le P_2.$$

Beweis.
(i) Nach Proposition 12.3.6 ist $P = P_2 - P_1$ genau dann ein Projektor, wenn $Q := \mathbb{1} - P = (\mathbb{1} - P_2) + P_1$ ein Projektor ist. Nach Proposition 12.3.10 ist dies äquivalent zu $(\mathbb{1} - P_2) \circ P_1 = 0$ oder $P_1 = P_2P_1$. Dies ist äquivalent zu $M_1 \subset M_2$.
(ii) Betrachte die Einschränkungen auf M_2. Dort ist P_2 die Identität und die Behauptung folgt aus Proposition 12.3.6. Elemente von $M_2^\perp$ werden durch P_1 und P_2 auf Null abgebildet.
(iii) Die erste Äquivalenz ist klar.
„$\Longrightarrow$“: Sei $M_1 \subset M_2$. Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum M von H mit $M_2 = M_1 \oplus M$, wobei die Summe orthogonal ist, M also das orthogonale Komplement von M_1 in M_2. Sei $x \in H$. Es folgt $P_2x = P_1(P_2x) + \overline{x} = P_1x + \overline{x}$ für ein $\overline{x} \in M$. Da die Zerlegung orthogonal ist, erhalten wir $\|P_1x\|^2 \le \|P_2x\|^2$ für $x \in H$. Da beide P_i's selbstadjungiert sind, erhalten wir $\langle P_1x, x\rangle \le \langle P_2x, x\rangle$ für alle $x \in H$ und somit $P_1 \le P_2$.
„$\Longleftarrow$“: Sei $P_1 \le P_2$. Sei $x \in M_1$. Dann folgt $\|x\|^2 \le \|P_2x\|^2$ wie in den letzten Zeilen oben. Andererseits gilt $\|P_2x\|^2 \le \|x\|$, da P_2 eine Projektion ist (zerlege H in $M_2 \oplus M_2^\perp$). Somit gilt $\|P_2x\|^2 = \|x\|^2$ für $x \in M_1$. Mittels orthogonaler Zerlegung von M_1 in $M_2 \cap M_1$ und das zugehörige orthogonale Komplement erhalten wir $P_2x = x$ für $x \in M_1$. Somit gilt $M_1 \subset M_2$. □

Aus dem Satz von Vigier, Theorem 12.2.11, erhalten wir

Proposition 12.3.12. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (oder fallende) Folge von Projektoren $P_n \in L(H)$. Dann gibt es einen Projektor P, so dass $P_n \to P$ punktweise konvergiert.*

Beweis. Wegen $0 \le P \le \mathbb{1}$ ist jeder Projektor gleichmäßig beidseitig beschränkt. Betrachte ohne Einschränkung den Fall einer monoton wachsenden Folge $P_0 \le P_1 \le P_2 \le \ldots$. Nach dem Satz von Vigier konvergiert somit $P_n \to P$ punktweise und P ist selbstadjungiert.

P ist auch idempotent, denn es gilt

$$\left\langle P^2x, y\right\rangle = \langle Px, Py\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, P_ny\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_nx, y\rangle = \langle Px, y\rangle. \qquad \square$$

Bemerkung 12.3.13. Es ist leicht zu sehen, dass der punktweise Grenzwert P einer monoton wachsenden Folge von Projektoren P_n

$$R(P) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)}$$

erfüllt.

12.4. **Orthonormalbasen.**

Definition 12.4.1. (i) Sei X ein Banach- oder Hilbertraum. Dann heißt $S \subset X$ Banach- oder Hilbertraumbasis, falls S linear unabhängig ist und $\overline{\langle S\rangle} = X$ gilt.
(ii) Eine Hilbertraumbasis S von H heißt Orthonormalbasis, falls $\|x\| = 1$ und $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \ne y \in S$ gilt.
(iii) Zur deutlicheren Unterscheidung bezeichnen wir eine Basis im Sinne der Linearen Algebra als Hamelbasis.

Beispiel 12.4.2. Die Vektoren $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $e_i = (0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots) \in l^2(\mathbb{N})$ bilden eine Orthonormalbasis von $l^2(\mathbb{N})$, aber keine Hamelbasis von $l^2(\mathbb{N})$.

Lemma 12.4.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ein Orthonormalsystem in H, d. h. gelte $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Setze $M := \langle e_1,\ldots,e_n\rangle$ und sei P die Projektion auf M. Dann gilt*

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Beweis. Definiere P_i als den Projektor auf den Teilraum $\langle e_i\rangle$. Dann gilt $P_i x = \langle x, e_i\rangle e_i$ für $x \in H$. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 12.3.10 per Induktion. □

Theorem 12.4.4. *Jeder separable Hilbertraum H besitzt eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis, die durch Gram-Schmidt Orthonormalisierung aus einer gegebenen Basis gewonnen werden kann.*

Beweis. Nach dem Zornschen Lemma existiert eine Basis, die man aus einer abzählbaren dichten Teilmenge gewinnt.

Die Orthonormalisierung funktioniert genau so wie in der Linearen Algebra. Beachte dazu, dass die Erzeugnisse der ersten n Vektoren einer gegebenen Basis und der Orthonormalisierung davon übereinstimmen. □

Proposition 12.4.5. *Sei H ein unendlich dimensionaler Hilbertraum. Dann erfüllt eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann $\overline{\langle\{e_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle} = H$, wenn sie*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

(Parsevalsche Identität) oder, äquivalent dazu,

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

für alle $x \in H$ erfüllt.

Vergleiche dies mit der Besselschen Ungleichung, Korollar 5.1.12.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Gelte $\overline{\langle\{e_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle} = H$. Setze $M_n := \langle e_0,\ldots,e_n\rangle$ und $M = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} M_n$. Dann ist M dicht in H. Definiere P_n als den Projektor auf M_n. Aus Proposition 12.3.12, Bemerkung 12.3.13 und Lemma 12.4.3 erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i = P_n x \to x \quad \text{für alle } x \in H$$

und somit

$$\sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|P_n x\|^2 \to \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in H.$$

„$\Longleftarrow$“: Sei nun die Parsevalsche Identität erfüllt. Wir definieren Projektoren P_n durch $P_n x := \sum\limits_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Dann ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge von Projektoren, konvergiert also punktweise gegen einen Projektor P. Wäre $P \neq \mathbb{1}$, so folgt $R(P) \subsetneq H$. Ein zu $R(P)$ orthogonaler Vektor $y \neq 0$ steht auch auf allen Vektoren e_n senkrecht. Somit gilt für ihn die Parsevalsche Ungleichung nicht. Widerspruch. Aus $P = \mathbb{1}$ folgt die Behauptung direkt. □

12.5. **Spektralsatz.** Die Zerlegung kompakter selbstadjungierter Operatoren ist eine Verallgemeinerung der Resultate aus Kapitel 6.8, „Diagonalisierung von selbstadjungierten linearen Endomorphismen“, in [**?**].

Lemma 12.5.1. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte reell und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.*

Beweis. Lineare Algebra. □

Lemma 12.5.2. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Sei die Familie $(e_i)_{i\in I}$ ein unendliches Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von A mit $Ae_i = \lambda_i e_i$ für $i \in I$. Dann ist 0 der einzige Häufungspunkt der Folge $(\lambda_i)_{i\in I}$ und die Menge der Eigenwerte ist höchstens abzählbar.*

Beweis. Wegen $|\lambda_i| \le \|A\|$ für $i \in I$ sind die Eigenwerte gleichmäßig beschränkt. Somit besitzen die Eigenwerte einen Häufungspunkt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen, dass $\lambda = 0$ gilt. Somit gibt es auch höchstens abzählbar viele Eigenwerte.

Angenommen, es gälte doch $\lambda \neq 0$. Wir dürfen ohne Einschränkung $I = \mathbb{N}$ und $\lambda_i \to \lambda$ für $i \to \infty$ annehmen. Seien e_i die zugehörigen Eigenvektoren mit $\|e_i\| = 1$. Nehme weiterhin ohne Einschränkung $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e_i \rightharpoonup e$ für ein $e \in H$ an. Es gilt $\lambda_i^{-1} Ae_i = e_i$. Da A kompakt ist, folgt $Ae_i \to Ae$. Somit erhalten wir
$$e_i = \lambda_i^{-1} Ae_i \to \lambda^{-1} Ae,$$
die Vektoren e_i konvergieren also nicht nur schwach, sondern sogar stark. Da der schwache Grenzwert eindeutig bestimmt ist, folgt auch $e_i \to e$. Da die Vektoren $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jedoch ein Orthonormalsystem bilden, gilt $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ für $i \neq j$. Widerspruch. □

Korollar 12.5.3. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A mit Eigenraum E_λ, so gilt* $\dim E_\lambda < \infty$.

Beweis. Andernfalls könnten wir mit dem Gram-Schmidtschen-Orthonormalisierungsverfahren induktiv ein abzählbares Orthonormalsystem in E_λ konstruieren. Widerspruch zur Kompaktheit. □

Da wir für unendliche Vektorräume i. a. keine Determinante und somit auch kein charakteristisches Polynom haben, benutzen wir variationelle Methoden um Eigenwerte zu finden.

Lemma 12.5.4. *Sei H ein Hilbertraum. Sei $0 \neq A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann besitzt A mindestens einen Eigenwert $\lambda \neq 0$.*

Beweis. Betrachte das Variationsproblem
$$J(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \to \max$$
für $0 \neq x \in H$ oder, äquivalent dazu,
$$j(x) = \langle Ax, x\rangle \to \max$$
für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$. Definiere $\lambda := \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$. Wir nehmen ohne Einschränkung (betrachte sonst $-A$) an, dass $\lambda > 0$ gilt.

Sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|x_n\| = 1$ eine Maximalfolge für j, d. h. gelte $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda$. Eine ohne Einschränkung nicht umbenannte Teilfolge konvergiert dann schwach: $x_n \rightharpoonup x$. Da A kompakt ist, folgt $Ax_n \to Ax$ und wir erhalten
$$\langle Ax, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle = \lambda > 0.$$

Somit ist $x \neq 0$. Da $\{x \colon \|x\| \le 1\}$ nach Definition der Norm eine konvexe Menge ist (benutze $\|tx + (1-t)y\| \le t\|x\| + (1-t)\|y\|$), folgt nach dem Lemma von Mazur, Lemma 7.2.6, $\|x\| \le 1$ (Alternative: Benutze die Unterhalbstetigkeit der Norm unter schwacher Konvergenz.). Andererseits gilt

$$\lambda = \sup_{\|y\|=1} j(y) = \sup_{y \neq 0} J(y) \ge J(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\lambda}{\|x\|^2}.$$

Somit ist $\|x\| \ge 1$. Also gilt $\|x\| = 1$, das Funktional j nimmt also, ebenso wie J, sein Maximum in x an.

Wir erhalten für beliebiges $y \in H$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \ll 1$, also $x + ty \neq 0$,

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt} J(x+ty)\right|_{t=0}, \\
\langle A(x+ty), x+ty\rangle &= \langle Ax, x\rangle + t\langle Ax, y\rangle + t\langle Ay, x\rangle + t^2\langle Ay, y\rangle, \\
\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle &= \langle Ax, y\rangle + \langle y, Ax\rangle = \langle Ax, y\rangle + \overline{\langle Ax, y\rangle} = 2\operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle, \\
\|x+ty\|^2 &= \|x\|^2 + 2t\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2, \\
\left.\frac{d}{dt} J(x+ty)\right|_{t=0} &= \frac{2}{\|x\|^4}\Big(\underbrace{\|x\|^2}_{=1} \cdot \operatorname{Re}\langle Ax, y\rangle - \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{=\lambda} \cdot \operatorname{Re}\langle x, y\rangle\Big) \\
&= 2\operatorname{Re}\langle Ax - \lambda x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Somit folgt $Ax = \lambda x$. □

Theorem 12.5.5 (Spektralsatz)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann besitzt A höchstens abzählbar viele Eigenwerte $(\lambda_i)_{i\in I}$. Sei M_{λ_i} der (abgeschlossene) Eigenraum zum Eigenwert λ_i und E_{λ_i} der Projektor auf M_{λ_i}. Dann gelten*

$$A = \sum_{i\in I} \lambda_i E_{\lambda_i} \quad \text{und} \quad \mathbb{1} = \sum_{i\in I} E_{\lambda_i},$$

wobei die Reihen punktweise konvergieren.

Die Eigenräume zu Eigenwerten $\lambda_i \neq 0$ sind endlichdimensional. Gibt es abzählbar viele Eigenwerte λ_i, so können wir $I = \mathbb{N}$ wählen und erhalten $\lambda_i \to 0$ für $i \to \infty$.

Ist $\dim H < \infty$, so ist dieser Satz bereits aus der Linearen Algebra in äquivalenter Formulierung bekannt.

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir $A \neq 0$ annehmen. Ist $N(A) \neq \{0\}$, so ist 0 ein Eigenwert mit Eigenraum $N(A)$. Da A selbstadjungiert ist, gilt nach Lemma 12.2.5 $\overline{R(A)} \oplus N(A) = H$. Somit ist $N(A)$ ein reduzierender Unterraum, siehe Proposition 12.3.7. Wir setzen $\mathcal{H} := N(A)^\perp$. Können wir das Theorem für $A|_{\mathcal{H}} \in L(\mathcal{H})$ zeigen, so folgt das Theorem auch für den ursprünglichen Operator A. Wir dürfen also ohne Einschränkung annehmen, dass $N(A) = \{0\}$ gilt, dass also A injektiv ist. Wegen $A \neq 0$ folgt auch $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Der Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$ ist aus der Linearen Algebra bekannt. Sei also $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Seien $(\lambda_i)_{i\in I}$, I eine geeignete Indexmenge, die Eigenwerte von A mit Eigenräumen M_{λ_i} und Projektoren E_{λ_i}. Gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Es gilt $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in I$. Nach Lemma 12.5.4 besitzt A mindestens einen Eigenwert. Nach Lemma 12.5.2 ist I höchstens abzählbar, also gilt ohne Einschränkung $I \subset \mathbb{N}$. Nach Korollar 12.5.3 gilt $\dim M_{\lambda_i} < \infty$ für alle $i \in I$. Ist I abzählbar (noch ist nicht klar, dass es überhaupt mehr als einen Eigenwert gibt), so ist die Menge $\{\lambda_i \colon i \in I\}$ beschränkt und besitzt somit einen Häufungspunkt. Nach Lemma 12.5.2 ist dies Null.

Nach Lemma 12.5.1 sind die Eigenräume M_{λ_i} paarweise orthogonal zueinander. Somit konvergiert die Reihe der Projektoren E_{λ_i} punktweise gegen einen Projektor E, $E = \sum_{i \in I} E_{\lambda_i}$. Wir wenden dazu Proposition 12.3.12, die Folgerung aus dem Satz von Vigier, an.

Es gilt $E = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$: Da jeder Eigenraum von A den Operator A reduziert, gilt dies auch für $R(E)$, da man in $AP_n x = P_n Ax$ zum Grenzwert $APx = PAx$ übergehen kann. Somit reduziert E den Operator A. Benutze Bemerkung 12.3.13. Wäre $R(E)^\perp \neq \{0\}$, so gäbe es darin aufgrund der Injektivität von A einen Eigenvektor zu einem Eigenwert ungleich Null. Somit ist $R(E) = \mathcal{H}$. Nach Lemma 12.5.3 ist somit I abzählbar.

Es gilt $\mathbb{1} = \sum_{i \in I} E_{\lambda_i}$. Die Konvergenz ist punktweise.

Sei schließlich $x \in H$ beliebig. Dann folgt $x = \sum_{i \in I} E_{\lambda_i} x$. Da A stetig ist, erhalten wir

$$Ax = \sum_{i \in I} AE_{\lambda_i} x = \sum_{i \in I} \lambda_i E_{\lambda_i} x$$

wie behauptet. $\square$