Einführung

Das Skript ist basiert auf den Skripts von Herrn Kuwert und Herrn Schuerer.

In dieser Vorlesung geht es hauptsächlich um unendlich dimensionale Vektorräume und lineare Abbildungen zwischen ihnen.

Thema: Seien X, Y Funktionenräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $A : X \to Y$ lineare Abbibildung.

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$$

i.a. $\dim X = \dim Y = \infty$. We wollen die Lšungen von linearen Gleicheung $Au = f$ untersuchen. Lösungsverfahren der linearen Algebra sind nictht anwendar.

Beispiel 1. $X = \{x = (x_1, x_2, x_3 \cdots) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R}\}$
(i) $A : X \to X, A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$. A is linear, injektiv, aber nicht surjektiv.
(ii) $B : X \to X$, $B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$. B is linear, surjektiv, aber nicht injektiv.

Beispiel 2. $X = C^0([-\pi, \pi])$, $A : X \to X$, $(Au)(t) = (\sin t)u(t)$
A ist linear, aber hat keinen Eihenwert: Angenommen, A hat einen Eigenwert: $Au = \lambda u$, $u \neq 0$, und $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.,

$$(\sin t)u(t) = \lambda u(t), \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Daraus folgt $\{t : u(t) \neq 0\} \subset \{t : \sin t = \lambda.\}$ Das ist unmöglich.

Beispiel 3. Dirichlet-Prinzip für elliptische Randwertprobleme.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ veschänkt mit glatten Rand. Sei $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gegeben. Gesucht ist eine Lösung $u \in C_0^\infty(\Omega)$ des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Variationasansatz: Funktional $F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 - \int_\Omega fv$.

Lemma 0.0.1. *Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $F(u) \leq F(v) \, \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt*

$$-\Delta u = f$$

Proof. Sei $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann gilt

$$F(u + \varepsilon\eta) = F(u) + \varepsilon \int_\Omega \langle Du, D\eta\rangle - \varepsilon \int_\Omega f\eta + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_\Omega |D\eta|^2.$$

Daraus folgt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}_{|\varepsilon=0} F(u + \varepsilon\eta) = \int_\Omega \langle Du, D\eta\rangle - \int_\Omega f\eta = -\int_\Omega (\Delta u + f)\eta.$$

Aus dem Lemma von Variationsrechnung folgt

$$-\Delta u = f.$$

□

(I) Minimieren $F = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 - \int_\Omega fv$ in $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ ist formal analog zu
(II) Minimieren $F(x) = \frac{1}{2}|x|^2 - \langle a, x\rangle$ in $\mathbb{R}^n$.

1. Topologische Grundlagen

1.1. **Topologische Räume.**

Definition 1.1.1. Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}X$ heißt Topologie auf X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,

(ii) $\mathcal{O}$ ist unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen, d. h. aus $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, I eine beliebige (Index-)Menge, folgt auch $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

(iii) $\mathcal{O}$ ist unter endlichen Schnitten abgeschlossen, d. h. aus $O_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, n$, folgt auch $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{O}$.

(Es genügt hier für $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ auch $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ zu fordern.)

$(X, \mathcal{O})$ (oder auch X) heißt *topologischer Raum*.

Eine Menge $A \subset X$ heißt *offen*, falls $A \in \mathcal{O}$ gilt. $B \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus B \in \mathcal{O}$ gilt.

Definition 1.1.2. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$ eine Teilmenge von X.

(i) Sei $x \in X$. Dann heißt $U \subset X$ *Umgebung* von x, falls es ein $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subset U$ gibt.

(ii) $x \in X$ heißt *Berührpunkt* von A, wenn jede Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat.

(iii) Die Menge der Berührpunkte von A heißt *Abschluss* (oder abgeschlossene Hülle) von A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.

(iv) Ein Punkt x ist ein *innerer Punkt* von A, falls A eine Umgebung von x ist.

(v) Das *Innere* von A ist als die Menge der inneren Punkte definiert und wird mit $\mathring{A}$ bezeichnet, der einfacheren Schreibweise wegen aber auch mit $\operatorname{int}(A)$.

(vi) Ein Punkt x heißt *Randpunkt*, $x \in \partial A$, wenn er Berührpunkt von A und von $X \setminus A$ ist.

Definition 1.1.3. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

(i) Sei $A \subset X$. Dann ist $(A, \mathcal{O}_A)$ mit

$$\mathcal{O}_A := \{O \cap A \colon O \in \mathcal{O}\}$$

ein topologischer Raum. $\mathcal{O}_A$ heißt *induzierte Topologie* (oder *Relativtopologie* oder Spurtopologie).

Beispiel: $(1/2, 1]$ ist in $[0, 1]$ offen.

(ii) Sei $A \subset X$. Dann heißt A *dicht* in X, falls $\overline{A} = X$ gilt.

Sei $A \subset B \subset X$. Dann heißt A dicht in B, falls A dicht in $(B, \mathcal{O}_B)$ ist.

(iii) X heißt *separabel*, falls es eine höchstens abzählbare Teilmenge $A \subset X$ mit $\overline{A} = X$ gibt.

(iv) Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien auf X. Dann heißt $\mathcal{O}_1$ *gröber* als $\mathcal{O}_2$, falls $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ gilt. Gilt $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_1$ *feiner* als $\mathcal{O}_2$.

Bemerkung 1.1.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Setze $B_\varepsilon(x) := \{y \in X \colon d(y, x) < \varepsilon\}$. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{A \subset X \colon \forall\, x \in A\ \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A\}$$

eine Topologie auf X. (Beweis: Analysis-Vorlesung.) Auf metrischen Räumen werden wir stets diese von der Metrik induzierte Topologie verwenden.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X gibt, die die vorgegebene Topologie induziert.

Der Raum $(X, \{\emptyset, X\})$ ist nicht metrisierbar, falls X mehr als zwei Punkte enthält, da es dann Mengen $B_\varepsilon(x) \neq X$ gibt.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vekotrraum versehen mit einer Norm. Dann ist $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik.

Definition 1.1.5. Zwei Metriken heißen äquivalent, falls sie die gleiche Topologie induzieren.

Definition 1.1.6. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$ mit $x_n \in B_r(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

(ii) Eine Menge $A \subset X$ heißt beschränkt, falls es ein $x_0 \in X$ und ein $r > 0$ mit $A \subset B_r(x_0)$ gibt.

Lemma 1.1.7. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine Metrik auf X, die zu d äquivalent ist, so dass X in dieser Metrik beschränkt ist.*

Beweis. Setze $\hat{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. □

Definition 1.1.8. Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $A \subset X$. Dann heißt U *Umgebung* von A, falls U Umgebung für alle Punkte von A ist.

Definition 1.1.9. Sei $(X,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann heißt $x_0 \in X$

(i) *Häufungspunkt* der Folge, falls in jeder Umgebung von x_0 unendlich viele Folgeglieder enthalten sind.

(ii) *Grenzwert* der Folge, falls außerhalb jeder Umgebung von x_0 nur endlich viele Folgeglieder liegen.

1.2. **Stetige Abbildungen.**

Definition 1.2.1. Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i = 1,2$, topologische Räume. Sei $f\colon X_1 \to X_2$ eine Abbildung.

(i) Dann heißt f stetig, falls für alle offenen Mengen $U \subset X_2$ auch $f^{-1}(U)$ in X_1 offen ist.

(ii) f heißt offen, falls für alle offenen Mengen $U \subset X_1$ auch $f(U)$ in X_2 offen ist.

(iii) f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

(iv) f heißt in $x_0 \in X_1$ stetig, falls es zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$ gibt.

Beispiel 1.2.2. Sei $X = C^0([0,1])$. Dann definieren $\|f\|_{L^1([0,1])} := \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx$ und $\|f\|_{L^\infty([0,1])} := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ Normen auf X. Sie induzieren Metriken auf X vermöge $d_1(f,g) := \|f-g\|_{L^1([0,1])}$ und $d_\infty(f,g) := \|f-g\|_{L^\infty([0,1])}$. Wir wollen zukünftig stets annehmen, dass die Metrik auf einem normierten Raum die von der Norm induzierte Metrik ist.

Dann ist $\mathrm{id}\colon (X,d_\infty) \to (X,d_1)$ stetig, denn es gilt

$$\|f\|_{L^1([0,1])} = \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty([0,1])},$$

also auch $d_1(f,g) \le d_\infty(f,g)$. Die Umkehrung $\mathrm{id}\colon (X,d_1) \to (X,d_\infty)$ ist jedoch nicht stetig, denn für $f_n(x) := x^n$ gilt

$$\|f_n\|_{L^1([0,1])} = \int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \quad \text{aber} \quad \|f_n\|_{L^\infty([0,1])} = 1.$$

Also erhalten wir $d_1(f_n, 0) \to 0$, aber $d_\infty(f_n, 0) \not\to 0$.

Definition 1.2.3. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Dann heißt die Abbildung $f\colon X_1 \to X_2$ Isometrie, falls

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

für alle $x, y \in X_1$ gilt. Eine bijektive Isometrie heißt isometrischer Isomorphismus.

Theorem 1.2.4. *Sei $\mathbb{R}^n$ der euklidische Raum, d. h. der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik oder Standardmetrik (wie immer, wenn wir die Metrik des $\mathbb{R}^n$ nicht explizit angeben). Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein isometrischer Isomorphismus. Dann gilt $f(x) = Ax + b$ für eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$ und ein $b \in \mathbb{R}^n$.*

Der Nachweis, dass Abbildungen dieser Form isometrische Isomorphismen sind, ist einfach. Der Beweis der umgekehrten Implikation findet sich in der Vorlesung LA.

1.3. Kompaktheit.

Definition 1.3.1.

(i) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X *(überdeckungs-)kompakt*, falls jede Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$

durch offene Mengen A_i, $i \in I$, d. h. eine offene Überdeckung, eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} A_{i_j}$$

besitzt.

(In der Topologie heißt ein überdeckungskompakter T_2-Raum kompakt.)

(ii) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $A \subset X$ *relativ kompakt*, wenn $\overline{A} \subset X$ kompakt ist.

(iii) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Dann heißt X *(folgen-)kompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

(iv) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt X *präkompakt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_i \in X$, $1 \le i \le N$, mit

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)$$

gibt.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt kompakt, falls A mit von X induzierter Metrik bzw. Topologie kompakt ist. Wir wollen ebenso einen Teilraum $A \subset X$ vollständig, beschränkt, präkompakt, ... nennen, falls dies für A mit der von X induzierten Topologie oder Metrik gilt.

Theorem 1.3.2. *Seien X, Y topologische Räume. Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ (überdeckungs-)kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$. Da f stetig ist, ist auch $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Sei ohne Einschränkung $\left(f^{-1}(U_i)\right)_{1 \le i \le N}$ eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist $(U_i)_{1 \le i \le N}$ eine endliche Überdeckung von $f(X)$. □

Theorem 1.3.3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) X ist (überdeckungs-)kompakt.
(ii) X ist folgenkompakt.
(iii) X ist präkompakt und vollständig.

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Sei $(x_n)_n$ eine Folge. Definiere

$$F_n := \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}.$$

Die Mengen F_n sind abgeschlossen, $U_n := X \setminus F_n$ ist also offen. Wir behaupten, dass es ein $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ gibt. Dies ist dann der gesuchte Häufungspunkt der Folge. Falls es kein solches a gibt, ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, was äquivalent zu $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$ ist. Somit ist $(U_n)_n$ eine offene Überdeckung von X und endlich viele der Mengen U_n überdecken bereits X, ohne Einschränkung gelte $\bigcup_{n=1}^{N} U_n = X$. Dies ist äquivalent zu $\bigcap_{i=1}^{N} F_n = \emptyset$. Es gilt aber $\bigcap_{i=1}^{N} F_n = F_N \neq \emptyset$. Widerspruch.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Da X folgenkompakt ist, ist X auch vollständig.

Falls X nicht präkompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i) \subsetneq X$ für alle $x_i \in X$ und alle N gilt. Fixiere nun $x_0 \in X$ beliebig und wähle $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{n} B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$ beliebig. Es gilt stets $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ für $i \neq j$. Somit besitzt $(x_n)_n$ keine konvergente Teilfolge. Widerspruch.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“:

Nehme an, dass es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ ohne endliche offene Teilüberdeckung gibt. $n = 0$: Da X präkompakt ist, gibt es endlich viele offene Kugeln vom Radius $1 = 2^{-0}$, die X überdecken. Mindestens eine davon, $B_{2^{-0}}(x_0)$, wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt.

Seien $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bereits definiert. Dann wird X von endlich vielen Kugeln vom Radius $2^{-(n+1)}$ überdeckt. Mindestens eine davon, $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1})$ wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt. Wir können dabei $B_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1}) \cap B_{2^{-n}}(x_n) \neq \emptyset$ annehmen. (Sonst würden nämlich alle Bälle vom Radius $2^{-(n+1)}$ mit nichtleerem Schnitt mit $B_{2^{-n}}(x_n)$ endlich durch Mengen in $\mathcal{U}$ überdeckt und das würde somit auch für $B_{2^{-n}}(x_n)$ gelten. Widerspruch.) Also gilt $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-(n+1)} + 2^{-n} < 2^{-(n-1)}$ und somit für $p \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+p}) < 2^{-(n-1)} + 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \ldots + 2^{-(n+p-2)} < 2^{-(n-2)}.$$

Daher ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X, konvergiert also gegen ein $x \in X$ und wir erhalten $d(x_n, x) \leq 2^{-(n-2)}$ durch Grenzübergang $p \to \infty$. x liegt aber in einer offenen Menge aus $\mathcal{U}$. Dies gilt auch für $B_\varepsilon(x)$. Nach Dreiecksungleichung gilt aber $B_{2^{-n}}(x_n) \subset B_{2^{-(n-2)}+2^{-n}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ für große Werte von n. Widerspruch zur Wahl von x_n.

(Die Idee: Definiere die Eigenschaft “eine Menge wird nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt” mit $(*)$. Wir zeigen die Implikation mit Widerspruch. d.h., wir nehmen an, dass X die Eigenschaft $(*)$ besitzt. Wir zeigen die Behauptung

Für jede $A \subset X$ mit $(*)$ und $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, B_\varepsilon(x)$ auch mit $(*)$ und $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

Der Beweis der Behauptung: Da X präkompakt ist, existiert N und $B_\varepsilon(x_i)$ $(x_j \in X, j = 1, 2 \cdots, N)$ mit $A \subset X \subset \cup_{j=1}^{N} B_\varepsilon(x_j)$. oBdA können wir annehmen, dass $A \cap B_\varepsilon(x_j) \neq \emptyset$, für alle $j = 1, \cdots, N$. Es ist nun leicht to sehen, dass eine vom $B_\varepsilon(x_i)$ $(x_j \in X, j = 1, 2 \cdots, N$ die Eigenschaft $(*)$ besitzt.)

□

Theorem 1.3.4. *Sei Y ein metrischer Raum. Sei $X \subset Y$ kompakt. Dann ist X*

(i) *beschränkt,*
(ii) *abgeschlossen sowie*
(iii) *separabel.*

Nur für die Abgeschlossenheit ist der umgebende Raum wichtig.

Beweis.
(i) Folgt aus der Präkompaktheit.
(ii) Folgt aus der Folgenkompaktheit.
(iii) Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es endlich viele Kugeln mit Radius $1/n$, die X überdecken. Sei X_n die endliche Menge der zugehörigen Mittelpunkte. Dann ist $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ die gesuchte höchstens abzählbare dichte Teilmenge. $\square$

Definition 1.3.5. Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall \, x, y \in X_1 : \, d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 1.3.6. *Seien X, Y metrische Räume. Sei X kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Falls nicht, gibt es $\varepsilon > 0$ und Punkte $a_n, b_n \in X$ mit $d_X(a_n, b_n) < 1/n$ aber $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon$. Da X kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge der a_n, ohne Einschränkung gelte also $a_n \to a \in X$ für $n \to \infty$. Nach Dreiecksungleichung gilt $d_X(a, b_n) \leq d_X(a, a_n) + d_X(a_n, b_n)$, also gilt auch $b_n \to a$ für $n \to \infty$. Da aber f in a stetig ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ gilt. Sei n so groß, dass $a_n, b_n \in B_\delta(a)$ gilt. Wir erhalten dann $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \leq d_Y(f(a_n), f(a)) + d_Y(f(a), f(b_n)) < \varepsilon$. Widerspruch. $\square$

Definition 1.3.7. Seien (X, d) und (Z, D) metrische Räume und sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen $f_i : X \to Z$.
(i) $(f_i)_{i\in I}$ heißt *gleichgradig stetig*, falls
$$\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall i \in I \, \forall y \in X : d(x, y) < \delta \implies D(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$
(ii) $(f_i)_{i\in I}$ heißt *gleichmäßig gleichgradig* stetig, falls
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, \forall i \in I \, \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \implies D(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Theorem 1.3.8 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sei X ein kompakter metrischer Raum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge gleichgradig stetiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge, ohne Einschränkung $(f_n)_n$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert: $f_n \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$.*

Proof. Beweisidee: Mit einem Diagonalfolgenargument erhalten wir eine Teilfolge, die auf einer dichten Teilmenge konvergiert. Aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit konvergiert die Teilfolge überall, und gleichmäßig.

Schritt 0. Aus die Kompaktheit von X ist X separabel ist. (Wie oben uberdecken wir X fur jedes k mit Ballen des Radius $1/k$. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Menge A_k, so dass $X = \cup_{x\in A_k} U_{1/k}(x)$. Also ist die abzahlbare Menge $A := \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ dicht.) Sei $A = \{x_j\}_{j=1}^\infty$ mit $\overline{A} = X$. Wir sollen eine konvergente Teilfolge von $\{f_n\}_n$ finden.

Schritt 1. Wir finden zunachst eine Teilfolge, die in jedem x_j konvergiert. Dazu benutzen wir ein Diagonalargument zusammen mit der gleichmäßigen Beschranktheit. Da $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^\infty$ eine beschrankte Folge in $\mathbb{R}$ ist, besitzt sie eine konvergente Teilfolge $\{f_{n,1}(x_1)\}$. Die Folge $\{f_{n,1}(x_2)\}_{n=1}^\infty$ ist wiederum beschrankt in $\mathbb{R}$, also besitzt sie eine konvergente Teilfolge $\{f_{n,2}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$. Jetzt wiederholen wir das Argument und betrachten die Diagonalfolge $\{f_{n,n}\} =: \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Diese Folge ist eine Teilfolge von $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, die nach Konstruktion in jedem x_j konvergiert.

Schritt 2. Jetzt zeigen wir, dass $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig konvergiert. Dazu benötigen wir die gleichgradige Stetigkeit. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme δ aus der Definition der gleichgradigen Stetigkeit. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \cdots, x_l \in A$, so dass die Kugeln um sie mit Radius δ ganz X überdecken. Sei jetzt $x \in X$ beliebig. Betrachte x_j mit $d(x, x_j) < \delta$. Da $g_n(x_j)$ nach Schritt 1 konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ gilt. Damit erhalten wir

$$|g_n(x) - g_m(x)| \le |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - gm(x)| < 3\varepsilon,$$

wobei wir bei dem ersten und dem letzten Summanden die gleichgradige Stetigkeit benutzt haben. Also ist g_n eine Cauchyfolge. □

Bemerkung 1.3.9. Im $\mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge kompakt. In metrischen Räumen gilt dies i. a. nicht mehr: In $l^2(\mathbb{N})$ (siehe folgendes Kapitel) ist $\overline{B_1(0)}$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt, da die Vektoren $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ für $i \neq j$ die Gleichheit $d(e_i, e_j) = \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ erfüllen.

1.4. **Vervollständigung.**

Definition 1.4.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt Cauchyfolge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n, m \ge N \colon d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(ii) X heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Lemma 1.4.2. *Sei $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ gleichmäßig stetig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_1. Dann ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X_2.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass

$$d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

gilt. Da $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X_1 ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $d_1(x_n, x_m) < \delta$ für alle $n, m \ge N$ gilt. Zusammengenommen folgt $d_2(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \ge N$. □

Lemma 1.4.3. *Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume. Sei X_2 vollständig. Sei $X \subset X_1$ dicht. Sei $f\colon X \to X_2$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $g\colon X_1 \to X_2$. g ist gleichmäßig stetig.*

Guofang Wang

Beweis. (Serie 1, Aufgabe 1) □

Definition 1.4.4 (Vervollständigung)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Vervollständigung von (X, d) ist ein Tripel $\left(\hat{X}, \hat{d}, \iota\right)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
(ii) $\iota\colon X \to \hat{X}$ ist eine Isometrie mit dichtem Bild.
(iii) Sei Y ein vollständiger metrischer Raum. Dann gibt es zu jeder gleichmäßig stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\hat{f}\colon \hat{X} \to$

Y, so dass $\hat{f} \circ \iota = f$ gilt, d. h.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & \hat{X} \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Später nennt man auch laxerweise $(\hat{X}, \hat{d})$ die Vervollständigung von (X, d) oder sagt, dass $\hat{X}$ die Vervollständigung von X sei.

Wir nennen $\hat{f}$ eine Fortsetzung von f, da wir X vermöge ι als Teilmenge von $\hat{X}$ auffassen können.

Bemerkung $\star$ Die Forderung nach $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$ kann man auch durch die Forderung nach einer eindeutigen Fortsetzung $\hat{f} \colon \hat{X} \to Y$ ersetzen und erhält eine äquivalente Definition.

Beweis.

(i) Ist $\overline{\iota(X)} = \hat{X}$, so ist $\hat{f}$ wegen $\hat{f} \circ \iota = f$ auf einer dichten Teilmenge eindeutig vorgegeben. Da $\hat{f}$ stetig ist, ist die Abbildung also eindeutig bestimmt.

(ii) Ist $\overline{\iota(X)} \subsetneq \hat{X}$, so können wir mit $x_0 \in \hat{X} \setminus \overline{\iota(X)}$ und $Y = [0, 1]$ nach Tietze-Urysohn stetige Funktionen $\hat{f}_i \colon \hat{X} \to Y$ mit $f_i\left(\overline{\iota(X)}\right) = \{0\}$ und $\hat{f}_i(x_0) = i$ finden. Somit ist die zur Nullabbildung $f \colon X \to Y$ zugeordnete Abbildung $\hat{f}$ nicht eindeutig bestimmt.

□

Theorem 1.4.5 (Vervollständigung)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine Vervollständigung $(\hat{X}, \hat{d}, \iota)$.*

Die Vervollständigung $(\hat{X}, \hat{d}, \iota)$ ist bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Vergleiche dies mit der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

Beweis $\star$.

(i) Existenz: Auf dem Raum der Cauchyfolgen in X definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad :\iff \quad \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Es ist mit Hilfe der Dreiecksungleichung leicht zu sehen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Mit $[(x_n)_n]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge $(x_n)_n$. Sei

$$\hat{X} := \{[(x_n)_n] \colon (x_n)_n \text{ ist Cauchyfolge in X}\}.$$

Auf $\hat{X}$ definieren wir eine Metrik $\hat{d} \colon \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}_+ \equiv \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\hat{d}([(x_n)_n], [(y_n)_n]) := \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n).$$

Man rechnet direkt nach, dass $\hat{d}$ wohldefiniert und eine Metrik ist. Die Dreiecksungleichung folgt dabei aus

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n),$$

indem man zunächst auf der rechten Seite den Grenzwert $n \to \infty$ betrachtet. Die behaupteten Eigenschaften von $(\hat{X}, \hat{d})$ werden wir noch nachweisen.

(ii) Definiere $\iota \colon X \to \hat{X}$ durch

$$x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}],$$

wir bilden x also auf die Äquivalenzklasse der konstanten Cauchyfolge ab. Dies ist eine Isometrie.

(iii) $\iota(X)$ liegt dicht in $\hat{X}$: Sei $[(x_n)_n] \in \hat{X}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ für $n, m \geq N$ gilt. Es ist $[(x_N)_n] \in \iota(X)$ und es gilt

$$\hat{d}([(x_N)_n], [(x_n)_n]) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_N, x_n)}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

(iv) Vollständigkeit: Sei $([x_k])_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Gelte $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{k,n}, x_{k,m}) < 1/k$ für $n, m \geq N_k$. Wir definieren $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ durch $y_l := x_{l,N_l}$. Wir wollen nachweisen, dass $y := (y_l)_l$ eine Cauchyfolge in X ist und dass $[x_k] \to [y]$ in $\left(\hat{X}, \hat{d}\right)$ gilt.

(v) $(y_l)_l$ ist eine Cauchyfolge in X: Zunächst ist

$$\hat{d}(\iota(x_{i,N_i}), [x_i]) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x_{i,N_i}, x_{i,n})}_{\leq 1/i \text{ für } n\geq N_i} \leq \tfrac{1}{i}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} d(y_k, y_l) &\leq d(y_k, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{l,m}) + d(x_{l,m}, y_l) \\ &\leq \tfrac{1}{k} + d(x_{k,m}, x_{l,m}) + \tfrac{1}{l} \quad \forall\, m \geq \max\{N_k, N_l\} \\ &\leq \tfrac{1}{k} + \hat{d}([x_k], [x_l]) + \left|\hat{d}([x_k], [x_l]) - d(x_{k,m}, x_{l,m})\right| + \tfrac{1}{l} \\ &\qquad \forall\, m \geq \max\{N_k, N_l\}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. $([x_k])_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Daher können wir $k, l \in \mathbb{N}$ mit $1/k + 1/l \leq \varepsilon/3$ und $\hat{d}([x_k], [x_l]) \leq \varepsilon/3$ fixieren. Benutze die Definition von $\hat{d}$ und wähle m so groß, dass

$$\left|\hat{d}([x_k], [x_l]) - d(x_{k,m}, x_{l,m})\right| \leq \varepsilon/3$$

gilt. Wir erhalten somit $d(y_k, y_l) \leq \varepsilon$. Daher ist $(y_l)_l$ eine Cauchyfolge.

(vi) $[x_k] \to [y]$: Es gilt

$$\begin{aligned} d(x_{k,l}, y_l) &\leq d(x_{k,l}, x_{k,N_k}) + d(x_{k,N_k}, y_l) \\ &\leq \tfrac{1}{k} + d(y_k, y_l) \quad \text{für } l \geq N_k. \end{aligned}$$

Lasse nun $k, l \to \infty$ mit $l \geq N_k$. Somit folgt $\hat{d}([x_k], [y]) \to 0$ für $k \to \infty$.

Ausführlicher: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $d(y_i, y_j) < \varepsilon/2$ für $i, j \geq N$. Wähle $k \geq N$ so groß, dass $1/k < \varepsilon/2$ gilt. Wähle nun $l \geq \max\{N, N_k\}$. Dann folgt $d(x_{k,l}, y_l) < \varepsilon$. Mit $l \to \infty$ erhalten wir also $\hat{d}([x_k], [y]) \leq \varepsilon$.

(vii) Fortsetzbarkeit: Sei $f\colon X \to Y$ gleichmäßig stetig. Definiere $\hat{f}\colon \hat{X} \to Y$ durch

$$\hat{f}([(x_n)_n]) := \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Die Wohldefiniertheit und gleichmäßige Stetigkeit von $\hat{f}$ folgen aus Lemma 1.4.3, da $\hat{f}$ die Fortsetzung der gleichmäßig stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} f \circ \iota^{-1}\colon \iota(X) &\to Y, \\ [(x)_n] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

ist.

(viii) Eindeutigkeit: Sei $\hat{\jmath}$ die Fortsetzung von $\jmath$, also

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\jmath"'] & & \hat{X}. \arrow[dl, "\hat{\jmath}"] \\ & \tilde{X} & \end{tikzcd}$$

Da $\jmath \circ \iota^{-1} \colon \iota\big(\hat{X}\big) \to \tilde{X}$ eine Isometrie mit dichtem Bild in $\tilde{X}$ ist, ist $\hat{\jmath}$ eine isometrische Isometrie.

$\square$