11. Kompakte Operatoren und Fredholmoperatoren

Motivation: Operator $L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $L_0 v = -\operatorname{div}(aDv)$ wie in Subsection 11.2.4.

$$Kv = -\operatorname{div}(bv) + \langle c, Dv\rangle + qv = \text{Terme niederer Ordnung}$$

oder

$$(Kv)(u) = \int_\Omega (\langle b, Du\rangle v + \langle c, Dv\rangle u + quv).$$

L_0 ist Isomorphismus (Satz von Lax-Milgram). Dagegen ist L aber i.a. kein Isomorphismus.

Beispiel 11.0.5. $Lu = -u'' + u$ auf $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist weder injektiv noch surjektive.

11.1. Kompakte Operatoren.

Definition 11.1.1. Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X,Y)$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $\{x_n\} \subset X$ die Folge $\{Kx_n\}$ eine konvergente Teilfolge hat. Wir bezeichnen den Vektorraum der kompakten Operatoren mit $K(X,Y) \subset L(X,Y)$.

Lemma 11.1.2. *Für $K \in L(X,Y)$ sind äquivalent:*

(1) K ist kompakt.
(2) $K(B)$ ist relativ kompakt in Y für jede beschränkte Menge $B \subset X$.
(3) Falls X reflexiv: K ist vollstetig, d.h., $x_n \rightharpoonup x$ schwach in $X \Longrightarrow Kx_n \to Kx$ stark in Y.

Proof. (i) ⇒ (ii). Sei K kompakt. Ist B beschränkt und y_k Folge in $K(B)$, so gibt es $x_k \in B$ mit $\|y_k - Kx_k\| < \frac{1}{k}$. Nach Wahl einer Teilfolge gilt dann $Kx_k \to y$. Es folgt $y \in \overline{K(B)}$ und $y_k \to y$, also ist (ii) bewiesen.

(ii) ⇒ (i). Sei umgekehrt (ii) erfüllt und x_k eine beschränkte Folge in X, also $\|Kx_k\| \le R$ für alle k. Da $\overline{K(B_R(0)}$ kompakt, gilt für eine Teilfolge $Kx_k \to y$. Somit ist K kompakter Operator.

(i) ⇒ (iii). (Für diese Beweisrichtung wird die Reflexivität von X ist nicht gebraucht.) Wir zeigen jetzt: aus (i) folgt (iii). Sei dazu $x_k \rightharpoonup x$ schwach in X. Dann ist die Folge x_k beschränkt (siehe Theorem 7.1.5 (v)) und gibt es nach (i) ein $y \in Y$, so dass $Kx_k \to y$ stark in Y für eine Teilfolge $k \to \infty$. Wir behaupten, dass Kx_k gegen Kx in Y schwach in konvergiert. Für $\varphi \in Y'$ betrachte das lineare Fanktional $\xi : X \to \mathbb{R}$: $z \mapsto \langle Kz, \varphi\rangle = \varphi(Kz)$. Da K stetig ist, ist das Funktional auch stetig, also $\xi \in X'$. Es folgt

$$\xi(x_k) = \langle Kx_k, \varphi\rangle \to \langle Kx, \varphi\rangle = \xi(x),$$

denn $x_k \rightharpoonup x$ schwach in X. Da die starke die schwache Konvergenz impliziert, muss daher $y = Kx$ sein. Da die gesamte Argumentation aber auch auf jede Teilfolge von $(x_k)_{k\in N}$ angewandt werden kann, folgt dann, dass die ganze (!) Folge $(Kx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt Tx hat, also stark gegen K_x konvergiert.

(iii) ⇒ (i). Sei schließlich nun (iii) erfüllt, und x_k beschränkte Folge in X. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann $x_k \rightharpoonup x$ schwach in X. (Siehe Theorem 7.2.4 hier brauchen wir die Voraussetzung X reflexiv.) Aus (iii) folgt dann $Kx_k \to Kx$ stark in Y, also ist K kompakt.

□

Beispiel 11.1.3. (1) $K \in L(X,Y)$ mit $\dim \operatorname{Bild} K < \infty \Longrightarrow K$ kompakt.
(2) $\mathbb{I} \in L(X,X)$ ist nicht kompakt, falls $\dim X = \infty$
(3) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 \le \beta < \alpha \le 1$. Inklusion $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ ist kompakt. Es foglt aus Theorem 11.1.4

Theorem 11.1.4 (Einbettung von Hölderräumen)**.** *Sei X kompakter metrischer Raum, und $u_k \in C^{0,\alpha}(X)$, $0 < \alpha \leq 1$, eine Folge mit $\|u_k\|_{C^{0,\alpha}(X)} \leq \Lambda < \infty$ für alle k. Dann gibt es ein $u \in C^{0,\alpha}(X)$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt: $u_k \to u$ in $C^{0,\beta}(X)$ für jedes $0 \leq \beta < \alpha$.*

Proof. Nach (3.1) gilt für die Oszillation die Abschätzung

$$\omega_{u_k}(\delta) \leq [u_k]_{\alpha,X} \leq \Lambda\delta^\alpha.$$

Damit ist die Folge u_k gleichgradig stetig. Außerdem ist die reelle Folge $u_k(x)$ beschränkt für jedes x, also relativ kompakt in $\mathbb{R}$. Nach Arzelà-Ascoli gibt es ein $u \in C^0(X)$, so dass $u_k \to u$ in $C^0(X)$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Es gilt $u \in C^{0,\alpha}(X)$, denn

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha} = \lim_{k\to\infty} \frac{|u(x) - u_k(y)|}{d(x,y)^\alpha} \leq \Lambda < \infty.$$

Für $d(x,y) \leq \delta$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{|(u-u_k)(x) - (u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\beta} &= d(x,y)^{\alpha-\beta} \lim_{l\to\infty} \frac{|(u_l-u_k)(x) - (u_l-u_k)(y)|}{d(x,y)^\alpha} \\ &\leq \Lambda d(x,y)^{\alpha-\beta}.\end{aligned}$$

Andererseits gilt für $d(x,y) \geq \delta$

$$\frac{|(u-u_k)(x) - (u-u_k)(y)|}{d(x,y)^\beta} \leq 2\delta^{-\beta}\|u-u_k\|_{C^0(X)}.$$

Also folgt

$$\limsup_{k\to\infty} [u-u_k]_{\beta,X} \leq 2\Lambda\delta^{\alpha-\beta} \qquad \text{mit } \delta \to 0,$$

das heißt $u_k \to u$ in $C^{0,\beta}(X)$ wie behauptet. $\square$

Für die Sobolevräume gibt es einen analogen und wichtigen Kompaktheitssatz. Zum Beweis verwenden wir folgendes Lemma. Dabei ist im folgenden $\eta \in C_c^\infty(B-1(0))$ ein Glättungskern mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$.

Lemma 11.1.5. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$:*

(11.1) $\|u \circ \tau_h - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq |h|\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, *für $\tau_h(x) = x + h$ mit $h \in \mathbb{R}^n$*

(11.2) $\|\eta_\rho * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \rho\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Proof. Durch Approximation können wir $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h) - u(x)|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+th)dt\right|^p dx \quad \text{(Hölder)} \\ &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 |Du(x+th)|^p dtdx \\ &= |h|^h \|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Für die zweite Abschätzung berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - (\eta_\rho * u)(x)|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\rho(x-y)(u(x) - u(y))dy\right|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta(z)(u(x) - u(x-\rho z))dz\right|^p dx \quad (x - y = \rho z) \\ &\leq \int_{B_1(0)} \eta(z) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(x-\rho z)|^p dxdz \\ &\leq \rho^p \|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

□

Theorem 11.1.6 (Einbettungssatz von Rellich)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $1 \leq p < \infty$. ist dann die Einbettung*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

ein kompakter linearer Operator.

Proof. Sei $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gegeben mit $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq M$ für alle k. Wir müssen eine Teilfolge finden, die in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Die Idee ist, dass Glättungeng $\eta_\rho * u_k$ für fest beliebig gut gleichmäßig abgeschätzt sind, und daher nach Arzelà-Ascoli konvergente Teilfolgen haben. Dabei ist der L_p-Abstand von $\eta_\rho * u_k$ zu u_k klein nach Lemma 11.1.5. Indem wir durch Null fortsetzen, ist $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{spt} u_k \subset \overline{\Omega}$. Wir betrachten

$$u_k^\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad u_k^\rho := \eta_\rho * u_k.$$

Es gilt spt $u_k^\rho \subset \Omega_\rho$, mit $\Omega_\rho := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \Omega) < \rho\}$. Weiter gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig

$$D^\alpha u_k^\rho(x) = \rho^{-n-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \eta(\frac{x-y}{\rho}) u_k(y) dy.$$

Wir schätzen mit Hölder ab, wobei $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq M$ nach Voraussetzung,

$$\begin{aligned} |D^\alpha u_k^\rho(x)| &\leq \rho^{-n-|\alpha|} \|D^\alpha \eta\|_{C^0} \int_{B_\rho(y)} |u_k(y)| dy \\ &\leq C(\alpha, \eta) \rho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|} \|u_k\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C(\alpha, \eta) M \rho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Fur $\rho > 0$ fest gibt es also nach Arzelà-Ascoli eine Teilfolge, so dass $u_{k_j}^\rho \to u^\rho$ in $C^1(\mathbb{R}^n)$. Wähle nun eine Folge $\rho_i \to 0$ und dazu sukzessive konvergente Teilfolgen. Nach Übergang zur Diagonalfolge gilt

$$u_k^\rho \to u^\rho \quad \text{ in } C^1(\mathbb{R}^n), \qquad \text{für jedes } \rho = \rho_1, \rho_2, \cdots,$$

und wir haben

$$\|u^\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du^\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k\to\infty} \|u_k^\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|Du_k^\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Hier wurde die L^p -Abschätzung der Glättung benutzt, siehe Analysis 3, Satz 11.2, sowie die Vertauschbarkeit von Ableitung und Glättung. Mit Lemma 11.1.5 foglt

$$\begin{aligned} \|u^{\rho_i} - u^{\rho_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \lim_{k\to\infty} \|u_k^{\rho_i} - u_k^{\rho_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\|u_k^{\rho_i} - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|u_k - u_k^{\rho_j}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq (\rho_i + \rho_j) \lim_{k\to\infty} \|Du_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0, \qquad \text{mit } i, j \to \infty. \end{aligned}$$

Mit Fischer-Riesz folgt $u^{\rho_i} \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit spt $u \subset \Omega$. Schließlich folgt

$$\|u - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \underbrace{\|u - u^{\rho_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\leq \rho_i M} + \underbrace{\|u^{\rho_i} - u_k^{\rho_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\to 0, \text{ als } k\to\infty} + \underbrace{\|u_k^{\rho_i} - u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\leq \rho_i M}.$$

Es folgt $u_k \to u$ in L^p.

□

Lemma 11.1.7. *Die kompakten Operatoren $K(X,Y)$ bilden einen abgeschlossenen Unterraum von $L(X,Y)$.*

Proof. Hier ist X Banachraum. Für den Beweis benutzt man: *Sei X Banachraum. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann präkompakt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.* Diese Aussage können wir so zeigen: Erstens ist $A \subset X$ genau dann präkompakt, wenn $\overline{A}$ präkompakt ist. Nun die Richtung $\Leftarrow$ ist trivial, da $\overline{A}$ kompakt impliziert $\overline{A}$ präkompakt. Die Richtung $\Rightarrow$ ist auch trivial, da $\overline{A}$ präkompakt und abgeschlossen, ist $\overline{A}$ präkompakt und vollständig, also kompakt (siehe Theorem 1.3.3)

Die Reste ist eine Aufagbe. □

Lemma 11.1.8. *Sei Y ein Hilbertruam. Für $K \in L(X,Y)$ ist K genau dann kompakt, wenn es $T_k \in L(X,Y)$ gibt mit $\dim \mathrm{Bild}\,(T_k) < \infty$ und $\|T_k - K\| \to 0$ für $k \to \infty$.*

Proof. $\Leftarrow$ folgt aus Bsp 11.1.3 (1) und Lemma 11.1.7.

$\Rightarrow$. Da $\overline{K(B_1(0))}$ kompakt ist, ist $K(B_1(0))$ präkompkt. Siehe den Beweis von Lemma 11.1.7. Es folgt, dass für $\varepsilon > 0$ Kugeln $B_\varepsilon(y_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m_\varepsilon)$ exisiert, mit

$$K(B_1(0)) \subset \cup_{i=1}^{m_\varepsilon} B_\varepsilon(y_i).$$

Sie $Y_\varepsilon := \mathrm{span}\,\{y_1, y_2, \cdots y_{m_\varepsilon}\}$ und P_ε die orthogonale Projektion auf Y_ε. Nach Korollar 5.2.4 ist $Id - P$ auch eine orthogonale Projektion mit $\|Id - P\| \leq 1$. Nun definiere $T_\varepsilon = P_\varepsilon K$. Das Bild von T_k ist Y_ε, also $\dim \mathrm{Bild}\,(T_k) < \infty$. Für $x \in B_1(0)$ ist $Kx \in B_\varepsilon(y_i)$ für ein i und gilt

$$(K - T_\varepsilon)(x) = (Id - P_\varepsilon)Kx = (Id - P_\varepsilon)(Kx - y_i),$$

also $\|(K - L_\varepsilon)(x)\|_Y \leq \varepsilon$. Es folgt $\|K - L_\varepsilon\|_Y \leq \varepsilon$.

□

Proposition 11.1.9 (Adjungierte Abbildung)**.** *Seien E, F normierte Räume. Sei $A \in L(E, F)$. Dann gibt es eine adjungierte Abbildung $A^* \in L(F^{\prime}E^*)$, die adjungierte oder duale Abbildung mit*

$$\langle Ax, w\rangle = \langle x, A^*w\rangle$$

für alle $(x, w) \in E \times F^*$. Die Abbildung A^* ist eindeutig bestimmt und es gilt $\|A\| = \|A^*\|$.

Beweis.
Existenz: Sei $w \in F^*$. Dann ist $\varphi(x) := \langle Ax, w\rangle$ mit $x \in E$ eine lineare Form auf E. Es gilt $\varphi \in E^*$, d. h. φ ist stetig: Es gilt nämlich

$$|\varphi(x)| = |\langle Ax, w\rangle| \leq \|w\| \cdot \|Ax\| \leq (\|w\| \cdot \|A\|) \cdot \|x\|$$

und daher $\|\varphi\| \leq \|w\| \cdot \|A\|$. Definiere nun $A^*w := \varphi$. Nach Definition von φ ist A^* linear, also eine lineare Abbildung von F^* nach E^*. Aus $\|A^*w\| \leq \|w\| \cdot \|A\|$ folgt $\|A^*\| \leq \|A\|$. Andererseits folgt aus der Definition von A^*

$$|\langle Ax, w\rangle| = |\langle x, A^*w\rangle| \leq \|A^*w\| \cdot \|x\| \leq \|A^*\| \cdot \|w\| \cdot \|x\|.$$

Hieraus folgt mit einem Korollar zum Satz von Hahn-Banach, siehe Korollar 4.1.5, $\|Ax\| \leq \|A^*\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in E$. Wir erhalten $\|A\| \leq \|A^*\|$.

Eindeutigkeit: Sei $A' \in L(F^*, E^*)$ eine Abbildung, die ebenfalls $\langle Ax, w\rangle = \langle x, A'w\rangle$ für alle $(x, w) \in E \times F^*$ erfüllt. Dann erhalten wir $\langle x, (A^* - A')w\rangle = 0$ für alle $(x, w) \in E \times F^*$ und somit $A^*w = A'w$ für alle $w \in F^*$. □

Theorem 11.1.10. *Es gilt*

(1) Bei Verkettung gilt:
stetig $\otimes$ kompakt = kompakt   kompakt $\otimes$ stetig = kompakt

(2) $K : X \to Y$ kompakt $\Longrightarrow K' : Y' \to X'$ kompakt.

Proof. (1) ist trivial.

Für (2) seien $\varphi_k \in Y'$ mit $\|\varphi_k\| \leq \Lambda < \infty$. Nach Lemma 11.1.2 ist $M = \overline{K(B_1(0))}$ kompakt in Y. Nun ist $\varphi_{k|M}$ gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig Lipschitz. Nach Arzelà-Ascoli, ist $\varphi_{k|M}$ eine Cauchyfolge in $C^0(M)$, nach Übergang zu einer Teilfolge. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_{C^0(M)} < \varepsilon \quad \forall k, l > k_0,$$

insbesondere wegen $K(B_1(0)) \subset M$

$$\|\varphi_k \circ K - \varphi_l \circ K\| = \sup_{x \in B_1(0)} |\varphi_k(Kx) - \varphi_l(Kx)| < \varepsilon \quad \forall, k, l > k_0,$$

Also ist $K'\varphi_k = \varphi_k \circ K$ eine Cauchyfolge in X', und konvergiert in X'.

□

11.2. **Fredholmoperatoren.**

Theorem 11.2.1 (kanonischer Isomorphismus)**.** *Für $L \in L(X, Y)$ ist die kanonische Abbildung*

$$F : \ker L' \to (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})', \quad (F\varphi)([y]) = \varphi(y), \quad \textit{für } y \in Y \tag{11.3}$$

eine Isometrie, insbesondere surjektiv.

Proof. Für $\varphi \in \ker L'$ gilt $\varphi(Lx) = 0, \forall x \in X$. Da φ stetig ist, folgt $\varphi = 0$ auf $\overline{\operatorname{Bild} L}$, und $F\varphi : Y/\overline{\operatorname{Bild} L} \to \mathbb{R}$ ist wohl-definiert. Nun gilt für alle $z \in \overline{\operatorname{Bild} L}$

$$F\varphi([y]) = \varphi(y) = \varphi(y + z) \leq \|\varphi\| \cdot \|y + z\|.$$

Durch Bildung des Infimums ̈ber z folgt $\|F\varphi\| \leq \|\varphi\|$, und $F\varphi \in (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})'$.

Betrachte nun

$$G : (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})' \to Y', \quad G\psi(y) = \psi([y]).$$

Es gilt $|G\psi(y)| \leq \|\psi\|\|[y]\|$, also $\|G\psi\| \leq \|\psi\|$, insbesondere $G\psi \in Y'$. Außerdem bildet G nach $\ker L'$ ab, denn

$$L'(G\psi)(x) = (G\psi)(Lx) = \psi([Lx]) = 0.$$

Es ist offensichtlich, dass F, G zueinander invers sind. Somit sind F, G Isometrien.

□

Theorem 11.2.2. *Hat $L \in L(X, Y)$ abgeschlossenes Bild, so ist auch Bild L' abgeschlossen und die kanonische Abbildung*

$$F : X'/\operatorname{Bild} L' \to (\ker L)', \quad F([\varphi])(x) = \varphi(x).$$

ist eine Isometrie.

Proof. F ist wohldefiniert wegen $L'\psi(x) = \psi(Lx) = 0$ für $\psi \in Y'$, $x \in \ker L$. Weiter gilt

$$|F[\varphi](x)| = |(\varphi + L'\psi)(x)| \leq \|\varphi + L'\| \cdot \|x\|.$$

Durch Bildung des Infimums folgt $\|F[\varphi]\| \leq \|[\varphi]\|$. Wir zeigen nun

$$\varphi \in X' \text{ mit } \varphi_{|\ker L} = 0 \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Bild} L'. \tag{11.4}$$

Für das gesuchte $\psi \in Y'$ muss offenbar $\psi(Lx) = \varphi(x)$ gelten, und dadurch ist *psi* auf Bild L auch wohldefiniert. Für die Stetigkeit von ψ schätzen wir für $x_0 \in \ker L$ beliebig ab:

$$|\psi(Lx)| = |\psi(L(x + x_0)) = |\varphi(x + x_0)| \leq \|\varphi\|\|x + x_0\|,$$

also $|\psi(Lx)| \leq \|[x]\|$ nach Bildung des Infimums über x_0. Aber nun ist

$$\overline{L} : X/\ker L \to \operatorname{Bild} L, \quad \overline{L}[x] = Lx$$

bijektiv und stetig, also gilt $\|[x]\| \leq C\|Lx\|$ nach dem Satz von der inversen Abbildung, Korollar 6.1.9, (hier ist $\operatorname{Bild} L$ abgeschlossen wesentlich). Insgesamt ist $\psi \in (\operatorname{Bild} L)'$ und kann zu $\psi \in Y'$ fortgesetzt werden nach Hahn-Banach. □

Definition 11.2.3. Seien X, Y Banachräume. $T \in L(X, Y)$ heißt *Fredholmoperator* ($T \in F(X, Y)$), falls $\operatorname{Bild} T$ ist abgeschlossener Unterraum und $\ker T$, $\operatorname{coker} T := Y/T(X)$ sind endlichdimensional.

$\dim \ker T$= Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogene Gleichung $Tx = 0$.

$\dim \operatorname{coker} T$=Anzahl der linear unabhängigen bedingunge, die $y \in Y$ erfüllen nuss, damit die inhomogene Gleichung $Tx = y$ lösbar ist.

Definition 11.2.4. Sei $T \in L(X, Y)$ Fredholmoperator.

$$\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \in \mathbb{Z}$$

heißt *Index* von T.

Bemerkung 11.2.5. Falls X, Y endlichdimensionl sind, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(T) &= \dim \ker T - (\dim Y - \dim \operatorname{Bild} T) \\ &= \dim X - \dim Y. \text{(Dimensionsformel)} \end{aligned}$$

Dann ist der Index also uninteressant (da nicht abhängig von T).

Bemerkung 11.2.6. Sei $T \in L(X, Y)$. Falls $\ker$, $\operatorname{coker} T := Y/T(X)$ sind endlichdimensional, ist $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen, also T einer Fredholmoperator.

Sei dazu T injektiv, sonst gehe über zu $X/\ker T$. Wähle ein (algebraisches) Komplement Y_0 von $\operatorname{Bild} L$. Dann ist $X \times Y_0$ ein Banachraum mit der Produktnorm, da Y_0 end-lichdimensional ist. Die Abbildung $\tilde{T} : X \times Y_0 \to Y$, $\tilde{T}(x, y) = Tx + y$, ist bijektiv und stetig. Nach dem Satz von der inversen Abbildung (Korollar 6.1.9) ist auch $\tilde{T}^{-1}$, und damit $\operatorname{Bild} T = (\tilde{T}^{-1})^{-1}(X \times \{0\})$ abgeschlossen.

Beispiel 11.2.7. $(x_1, x_2, \cdots) \to (0, x_1, x_2, \cdots)$ hat Index -1.

$(x_1, x_2, \cdots) \to (x_2, x_3, \cdots)$ hat Index 1.

Isomorphismusen haben natürlich Index null.

Theorem 11.2.8 (kanonische Isomorphismen für T, T')**.** *Sei $T \in L(X, Y)$ und* $\operatorname{Bild}(T)$ *abgeschlossen. Dann ist* $\operatorname{Bild}(T')$ *auch abgeschlossen und es gilt*

- $\ker(T') \cong (\operatorname{coker} T)'$
- $(\operatorname{coker} T') \cong (\ker T)'$