Proof. (1) ist trivial.

Für (2) seien $\varphi_k \in Y'$ mit $\|\varphi_k\| \leq \Lambda < \infty$. Nach Lemma 11.1.2 ist $M = \overline{K(B_1(0))}$ kompakt in Y. Nun ist $\varphi_{k|M}$ gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig Lipschitz. Nach Arzelà-Ascoli, ist $\varphi_{k|M}$ eine Cauchyfolge in $C^0(M)$, nach Übergang zu einer Teilfolge. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_{C^0(M)} < \varepsilon \quad \forall k, l > k_0,$$

insbesondere wegen $K(B_1(0)) \subset M$

$$\|\varphi_k \circ K - \varphi_l \circ K\| = \sup_{x \in B_1(0)} |\varphi_k(Kx) - \varphi_l(Kx)| < \varepsilon \quad \forall, k, l > k_0,$$

Also ist $K'\varphi_k = \varphi_k \circ K$ eine Cauchyfolge in X', und konvergiert in X'.

□

11.2. **Fredholmoperatoren.**

Theorem 11.2.1 (kanonischer Isomorphismus)**.** *Für $L \in L(X, Y)$ ist die kanonische Abbildung*

(11.3) $$F : \ker L' \to (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})', \quad (F\varphi)([y]) = \varphi(y), \quad \textit{für } y \in Y$$

eine Isometrie, insbesondere surjektiv.

Proof. Für $\varphi \in \ker L'$ gilt $\varphi(Lx) = 0, \forall x \in X$. Da φ stetig ist, folgt $\varphi = 0$ auf $\overline{\operatorname{Bild} L}$, und $F\varphi : Y/\overline{\operatorname{Bild} L} \to \mathbb{R}$ ist wohl-definiert. Nun gilt für alle $z \in \overline{\operatorname{Bild} L}$

$$F\varphi([y]) = \varphi(y) = \varphi(y + z) \leq \|\varphi\| \cdot \|y + z\|.$$

Durch Bildung des Infimums über z folgt $\|F\varphi\| \leq \|\varphi\|$, und $F\varphi \in (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})'$.

Betrachte nun

$$G : (Y/\overline{\operatorname{Bild} L})' \to Y', \quad G\psi(y) = \psi([y]).$$

Es gilt $|G\psi(y)| \leq \|\psi\|\|[y]\|$, also $\|G\psi\| \leq \|\psi\|$, insbesondere $G\psi \in Y'$. Außerdem bildet G nach $\ker L'$ ab, denn

$$L'(G\psi)(x) = (G\psi)(Lx) = \psi([Lx]) = 0.$$

Es ist offensichtlich, dass F, G zueinander invers sind. Somit sind F, G Isometrien.

□

Theorem 11.2.2. *Hat $L \in L(X, Y)$ abgeschlossenes Bild, so ist auch Bild L' abgeschlossen und die kanonische Abbildung*

$$F : X'/\operatorname{Bild} L' \to (\ker L)', \quad F([\varphi])(x) = \varphi(x).$$

ist eine Isometrie.

Proof. F ist wohldefiniert wegen $L'\psi(x) = \psi(Lx) = 0$ für $\psi \in Y'$, $x \in \ker L$. Weiter gilt

$$|F[\varphi](x)| = |(\varphi + L'\psi)(x)| \leq \|\varphi + L'\| \cdot \|x\|.$$

Durch Bildung des Infimums folgt $\|F[\varphi]\| \leq \|[\varphi]\|$. Wir zeigen nun

(11.4) $$\varphi \in X' \text{ mit } \varphi_{|\ker L} = 0 \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Bild} L'.$$

Für das gesuchte $\psi \in Y'$ muss offenbar $\psi(Lx) = \varphi(x)$ gelten, und dadurch ist *psi* auf Bild L auch wohldefiniert. Für die Stetigkeit von ψ schätzen wir für $x_0 \in \ker L$ beliebig ab:

$$|\psi(Lx)| = |\psi(L(x + x_0)) = |\varphi(x + x_0)| \leq \|\varphi\|\|x + x_0\|,$$

also $|\psi(Lx)| \leq \|[x]\|$ nach Bildung des Infimums über x_0. Aber nun ist

$$\overline{L} : X/\ker L \to \operatorname{Bild} L, \quad \overline{L}[x] = Lx$$

bijektiv und stetig, also gilt $\|[x]\| \le C\|Lx\|$ nach dem Satz von der inversen Abbildung, Korollar 6.1.9, (hier ist $\operatorname{Bild} L$ abgeschlossen wesentlich). Insgesamt ist $\psi \in (\operatorname{Bild} L)'$ und kann zu $\psi \in Y'$ fortgesetzt werden nach Hahn-Banach.

Jetzt definieren wir die Umkehrabbildung $G : (\ker L)' \to X'/\operatorname{Bild} L'$: Setze $\varphi \in (\ker L)'$ nach Hahn-Banach mit gleicher Norm zu $\psi \in X'$ fort, dann ist $G\varphi = [\psi]$. Mit (11.4) zeigt man, dass G wohl-definiert ist. Es gilt

$$\|G\varphi\| = \|[\psi]\| \le \|\psi\| = \|\varphi\|.$$

Alsi G ist stetig. F, G sind zueinander invers. Ferner ist Bild $L' = \{\varphi \in X' : \varphi_{|\ker L} = 0\}$ abgeschlossen. □

Definition 11.2.3. Seien X, Y Banachräume. $T \in L(X, Y)$ heißt *Fredholmoperator* ($T \in F(X, Y)$), falls $\operatorname{Bild} T$ ist abgeschlossener Unterraum und $\ker T$, $\operatorname{coker} T := Y/T(X)$ sind endlichdimensional.

$\dim \ker T$= Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogene Gleichung $Tx = 0$.

$\dim \operatorname{coker} T$=Anzahl der linear unabhängigen bedingunge, die $y \in Y$ erfüllen nuss, damit die inhomogene Gleichung $Tx = y$ lösbar ist.

Definition 11.2.4. Sei $T \in L(X, Y)$ Fredholmoperator.

$$\operatorname{ind}(T) = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \in \mathbb{Z}$$

heißt *Index* von T.

Bemerkung 11.2.5. Falls X, Y endlichdimensionl sind, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(T) &= \dim \ker T - (\dim Y - \dim \operatorname{Bild} T) \\ &= \dim X - \dim Y. \qquad \text{(Dimensionsformel)} \end{aligned}$$

Dann ist der Index also uninteressant (da nicht abhängig von T).

Bemerkung 11.2.6. Sei $T \in L(X, Y)$. Falls ker, $\operatorname{coker} T := Y/T(X)$ sind endlichdimensional, ist $\operatorname{Bild} T$ abgeschlossen, also T einer Fredholmoperator.

Sei dazu T injektiv, sonst gehe über zu $X/\ker T$. Wähle ein (algebraisches) Komplement Y_0 von $\operatorname{Bild} L$. Dann ist $X \times Y_0$ ein Banachraum mit der Produktnorm, da Y_0 end-lichdimensional ist. Die Abbildung $\tilde{T} : X \times Y_0 \to Y$, $\tilde{T}(x, y) = Tx + y$, ist bijektiv und stetig. Nach dem Satz von der inversen Abbildung (Korollar 6.1.9) ist auch $\tilde{T}^{-1}$, und damit $\operatorname{Bild} T = (\tilde{T}^{-1})^{-1}(X \times \{0\})$ abgeschlossen.

Beispiel 11.2.7. $(x_1, x_2, \cdots) \to (0, x_1, x_2, \cdots)$ hat Index -1.
$(x_1, x_2, \cdots) \to (x_2, x_3, \cdots)$ hat Index 1.
Isomorphismusen haben natürlich Index null.

Theorem 11.2.8 (kanonische Isomorphismen für T, T')**.** *Sei $T \in L(X, Y)$ und* $\operatorname{Bild}(T)$ *abgeschlossen. Dann ist* $\operatorname{Bild}(T')$ *auch abgeschlossen und es gilt*

- $\ker(T') \cong (\operatorname{coker} T)'$
- $(\operatorname{coker} T') \cong (\ker T)'$

Das ist ein deriktes Korollar von Theorem 11.2.1 und Theorem 11.2.2

Korollar 11.2.9. *Sei $T \in L(X, Y)$ Fredholmoperator. Dann ist $T' \in L(Y', X')$ ebenfalls Fredholmsch und* $\operatorname{ind}(T') = -\operatorname{ind}(T)$.

Theorem 11.2.10 (Riesz-Schauder)**.** *Seien X, Y Banachräume. Die Abbildung $L_0 \in L(X, Y)$ habe eine beschränkte Inverse und $K \in L(X, Y)$ sei kompakt. Dann ist $L = L_0 + K$ Fredholmoperator vom Index Null. Insbesondere gilt*

$$L \text{ surjektiv } \Leftrightarrow L \text{ injektiv.}$$

Proof. Beweis: Wir können $X = Y$ und $L = Id + K$ annehmen, andernfalls betrachte $L_0^{-1}L$. Wir zeigen den Satz in fünf Schritten.

Schritt 1. $\ker L$ und $\ker L'$ sind endlichdimensional.

Sei $x_k \in \ker L$ mit $\|x_k\| \leq 1$. Dann gilt $x_k = -Kx_k$, also konvergiert x_k gegen ein $x \in \ker L$ nach Übergang zu einer Teilfolge. Nach Heine-Borel, Theorem 11.2.11 unten, ist $\ker L$ endlichdimensional. Weiter gilt $L' = (Id + K)' = Id + K'$. Da K' kompakt ist nach Lemma 11.1.10, ist auch $\ker L'$ endlichdimensional.

Schritt 2. Sei X_0 abgeschlossenes Komplement von $\ker L$. Dann existiert $\mu > 0$ mit

$$\|Lx\| \geq \mu \|x\| \quad \text{für alle } x \in X_0.$$

Andernfalls finde $x_k \in X_0$, $\|x_k\| = 1$, mit $\|Lx_k\| \leq 1/k$. Wir können $Kx_k \to x \in X$ annehmen, da K kompakt. Dann folgt aber

$$X_0 \ni x_k = Lx_k - Kx_k \to -x,$$

also $x \in X_0$ und $\|x\| = 1$. Aber $Lx = \lim_{k\to\infty} Lx_k = 0$, ein Widerspruch.

Schritt 3. $\operatorname{Bild} L$ ist abgeschlossen.

Sei $y_k = Lx_k \to y \in X$. Wir können $x_k \in X_0$ annehmen. Dann folgt aus Schritt 2

$$\|x_k - x_l\| \leq \frac{1}{\mu}\|L(x_k - x_l)\| = \frac{1}{\mu}\|y_k - y_l)\| \to 0 \quad \text{mit } k, l \to \infty.$$

Also konvergiert $x_k \to x$, und $y = \lim_{k\to\infty} Lx_k = Lx \in \operatorname{Bild} L$.

Schritt 4 $(cokerL)' \cong \ker L'$ nach Theorem 11.2.1.

Zusammen mit Schritt 1 folgt $\dim \operatorname{coker} L < \infty$, damit ist L Fredholm.

Schritt 5. Bestimmung des Fredholmindex. Unten zeigen wir, dass die Menge der Fredholmperatoren offen ist und der Index lokal konstant. Somit ist die Funktion $t \to \operatorname{ind}(Id + tK)$ konstant, also gleich Null.

□

Theorem 11.2.11 (Heine-Borel)**.** *Für einen normierten Raum X gilt:*

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt } \Leftrightarrow \dim X < \infty.$$

Proof. Die Implikation $\Leftarrow$ folgt aus der Aquivalenz der Normen und dam Satz von Bolzano-Weierstraß. Für $\Rightarrow$ zeigen wir zunchst die Behauptung

$V \subset X$ ein abgeschlossener, echter Teilraum. Dann gibt es zu $\vartheta < 1$ ein $x_\vartheta \in X$ mit

$$\operatorname{dist}(x_\vartheta, V) \geq \vartheta, \quad \textit{und} \quad \|x_\vartheta\| = 1.$$

Mit der Behauptung wähle induktiv eine Folge $x_k \in X$ mit

$$\|x_k\| = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(x_k, \operatorname{span}\{x_1, \cdots x_{k-1}\}) \geq \frac{1}{2}.$$

Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen.

Nun zeigen wir die Behauptung. Wähle $x \in X \backslash V$. Da V abgeschlossen, gilt $\operatorname{dist}(x, V) > 0$ und es gibt ein $v_\vartheta \in V$ mit $\|x - v_\vartheta\| \leq \frac{1}{\vartheta} \operatorname{dist}(x, V)$. Setze

$$x_\vartheta = \frac{x - v_\vartheta}{\|x - v_\vartheta\|}.$$

Es folgt für alle $v \in V$

$$\|x_\vartheta - v\| = \frac{1}{\|x - v_\vartheta\|}\big\|x - v_\vartheta - \|x - v_\vartheta\|v\big\| \geq \frac{\operatorname{dist}(x, V)}{\|x - v_\vartheta\|} \geq \vartheta.$$

□

Bemerkung 11.2.12. Falls X Hilbertraum ist, kann man in der Behauptung in dem Beweis in Theorem 11.2.11 $\vartheta = 1$ wählen. D.h., es ein $x \in X$ mit $\operatorname{dist}(x, V) = 1$ und $\|x\| = 1$ gibt. Das folgt aus dem Projektionssatz, Theorem 5.2.4: Wähle $0 \neq z_0 \in X \backslash V$. Nach Theorem 5.2.4 gilt $z_0 = x_0 + y_0$ mit $y_0 \in V$ und $x_0 \in V^\perp$. Dann setze $x = x_0/\|x_0\|$. Es ist klar, dass $\|x\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(x, V) = \inf_{y \in V} \|x - y\| \leq \|x\| = 1.$$

Andererseits gilt $\|x - y\|^2 \geq \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 = 1$, $\forall y \in V$, also $\operatorname{dist}(x, V) = 1$.

Lemma 11.2.13. *Sei V Unterraum eines Banachraums X.*

(a) Falls $\dim V < \infty$ oder falls V abgeschlossen mit $\dim(X/V) < \infty$, so hat V ein abgeschlossenes Komplement.

(b) Ist $X = V \oplus W$ für abgeschlossene Unterräume V, W, so sind die Projektionen P_V, P_W stetig.

Proof. Wir beginnen mit (a) im Fall $\dim V = n < \infty$. Sei $v_1, \cdots, v_n$ eine Basis von V, und $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ die duale Basis von V' , also $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Nach Hahn-Banach, haben die φ_i eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_i \in X'$. Definiere die stetige lineare Abbildung

$$P \in L(X, V), \quad Px = \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i(x) v_i.$$

Es folgt $Pv_j = v_j$, $P^2 = P$ und $P_{|V} = Id_{|V}$. Für $x \in X$ folgt $x = Px + (x - Px) \in V \oplus \ker P$. Der Raum $\ker P$ ist ein Komplement wie verlangt. Für $\dim X/V = n < \infty$ wähle eine Basis $[x_1], \cdots, [x_n]$ von X/V. Dann ist $\operatorname{Span}\{x_1, \cdots, x_n\}$ ein endlichdimensionales, also abgeschlossenes, Komplement.

In (b) ist $V \times W$ mit der Produktnorm ein Banachraum, und die Abbildung $V \times W \to X, (v, w) \mapsto v + w$, ist bijektiv und stetig. Nach Satz der inversen Abbildung ist auch die Inverse stetig, und damit die Projektionen P_V, P_W, auf die Komponenten.

□

Lemma 11.2.14 (Additivität des Fredholmindex)**.** *Seien $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$ Fredholm. Dann ist $TS : X \to Z$ Fredholm und es gilt*

$$\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T).$$

Proof. Es ist $S : \ker TS \to \operatorname{Bild} S \cap \ker T$ surjektiv mit Kern $\ker S$, also gilt

$$\dim \ker TS = \dim \ker S + \dim(\operatorname{Bild} S \cap \ker T) < \infty.$$

Wähle nun Komplemente $\ker T = (\operatorname{Bild} S \cap \ker T) \oplus Y_0$, und dann $Y = \operatorname{Bild} S \oplus Y_0 \oplus Y_1$. Es folgt die direkte Summe $\operatorname{Bild} T = \operatorname{Bild} TS \oplus TY_1$, also

$$\dim \operatorname{coker} TS = \dim \operatorname{coker} T + \dim Y_1 < \infty.$$

Schließlich haben wir

$$\begin{aligned} \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} S &= \dim(\operatorname{Bild} S \cap \ker T) + \dim Y_0 - (\dim Y_0 + \dim Y_1) \\ &= \dim(\operatorname{Bild} S \cap \ker T) - \dim Y_1. \end{aligned}$$

Durch Kombination der drei Gleichungen ergibt sich die Behauptung.

□

Lemma 11.2.15 (Neumannsche Reihe)**.** *Sei X ein Banachraum. Sei $T \in L(X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist* $\operatorname{id} - T \equiv \mathbb{1} - T$ *invertierbar, es gelten* $(\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n \in L(X)$ *und* $\|(\mathbb{1} - T)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|T\|}$.

Beweis. Aufgrund der geometrischen Reihe konvergiert die Reihe absolut:

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} T^n \right\| \le \sum_{n=0}^{N} \|T^n\| \le \sum_{n=0}^{N} \|T\|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Die angegebene Reihe ist invers zu $\mathbb{1} - T$, denn es gilt

$$\sum_{n=0}^{N} T^n \cdot (\mathbb{1} - T) = \mathbb{1} - T^{N+1} = (\mathbb{1} - T) \cdot \sum_{n=0}^{N} T^n.$$

Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung, da $\left\|T^{N+1}\right\| \le \|T\|^{N+1} \to 0$. □

Theorem 11.2.16. *Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, X)$ und gelte $ST = \mathbb{1}_X$ sowie $TS = \mathbb{1}_Y$. S heißt dann Inverse zu T. Dann gibt es eine Umgebung U von T in $L(X, Y)$, so dass alle $\tilde{T} \in U$ eine Inverse in $L(Y, X)$ besitzen.*

Der Beweis funktioniert auch für einseitige Inverse.

Beweis. Sei

$$U := \left\{ \tilde{T} \in L(X, Y) \colon \|S\| \cdot \left\|\tilde{T} - T\right\| < 1 \right\}.$$

Sei $\tilde{T} \in U$ beliebig. Es gilt $S\tilde{T} = ST + S\big(\tilde{T} - T\big) = \mathbb{1} + S\big(\tilde{T} - T\big)$. Dann ist $S\tilde{T} \in L(X)$ mit $\left\|\mathbb{1} - S\tilde{T}\right\| = \left\|S\big(\tilde{T} - T\big)\right\| \le \|S\| \cdot \left\|\tilde{T} - T\right\| < 1$. Somit ist $S\tilde{T} = \mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - S\tilde{T}\right)$ mit Hilfe der Neumannschen Reihe invertierbar. Sei $A \in L(X)$ die Inverse zu $S\tilde{T}$. Es folgt $\mathbb{1} = (AS)\tilde{T}$.

Analog bekommen wir eine rechtsseitige Inverse.

Rechtsseitige und linksseitige Inverse stimmen überein. □

Theorem 11.2.17. *Sei$L : X \to Y$Fredholmoperator. Dann hat L in $L(X, Y)$ eine Umgebung, die aus Fredholmperatoren mit demselben Index besteht.*

Proof. Beweis: Wähle abgeschlossene Komplemente $X = X_0 \oplus \ker L$ und $Y = \operatorname{Bild} L \oplus Y_1$, insbesondere $\dim Y_1 < \infty$. Die Projektionen auf die Komponenten sind dann stetig. Für $S \in L(X, Y)$ setze $S_0 : X_0 \to \operatorname{Bild} L$, $S_0 = P_{\operatorname{Bild} L} S i_{X_0}$, wobei i_{X_0} die Inklusionsabbildung ist. Es gilt

$$\|S_0 - L_0\| = \|P_{\operatorname{Bild} L}(S - L) i_{X_0}\| \le C \|S - L\|.$$

Hierbei ist $L_0 : X_0 \to \operatorname{Bild} L$, $L_0 = P_{\operatorname{Bild} L} L i_{X_0}$. Es ist offensichtlich, dass L_0 ein Isomorphismus ist, also auch S_0 für $\|S - L\| < \varepsilon$, nach dem obigen Satz. Dann ist S Fredholmoperator:

(1) Die Projektion $\ker S \to X/X_0$ ist injektiv: aus $Sx = 0$ für $x \in X_0$ folgt $S_0 x = P_{\operatorname{Bild} L} S i_{X_0} x = 0$ und somit $x = 0$.

(2) Die Projektion $Y_1 \to Y/\operatorname{Bild} S$ ist surjektiv: zu $y \in Y$ wähle $x \in X_0$ mit $S_0 x = P_{\operatorname{Bild} L} y$, also $P_{\operatorname{Bild} L}(y - Sx) = 0$ bzw. $ySx = y_1 \in Y_1$.

In $S_0 = P_{\operatorname{Bild} L} S i_{X_0}$ sind also alle Operatoren Fredholm. Es folgt aus Lemma 11.2.14

$$0 = \operatorname{ind} S_0 = \dim \operatorname{coker} L + \operatorname{ind} S - \dim \ker L = \operatorname{ind} S - \operatorname{ind} L.$$

□

11.3. **Anwendung auf elliptischee Randwertptrobleme.**

Lemma 11.3.1. *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator*

$$\begin{array}{rcl} K : W_0^{1,2}(\Omega) & \to & W_0^{12}(\Omega)' \\ (Ku)(v) & = & \int_\Omega(\langle b, Dv\rangle u + \langle c, Du\rangle v + quv) \end{array}$$

für $b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $q \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist K kompakt.

Proof. Nach Theorem 11.1.6 (Einbettungssatz von Rellich) ist die Einbettung $E : W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ kompakt. Da die Rieszabbildung $I : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)'$, $I^{-1}u(v) = \int_\Omega uv$, stetig ist (siehe Theorem 5.2.5), folgt mit Theorem 11.1.10 (i) auch die Kompaktheit von

$$E'I^{-1} : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)', \quad (E'If)(v) = I^{-1}f(Ev) = \int_\Omega fv.$$

wobei E' der adjungierte Operator von E ist. Daraus folgt die Kompaktheit der drei Abbildungen, mit Theorem 11.1.10 (ii)

$$\begin{array}{ccccc} W_0^{1,2}(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & W_0^{1,2}(\Omega)' \\ u & \xmapsto{E} & u & \xmapsto{-\partial_j b^j} & -\partial_j(b^j u) \\ u & \xmapsto{c^j\partial_j} & c^j\partial_j u & \xmapsto{E'I^{-1}} & c^j\partial_j u \\ u & \xmapsto{E} & u & \xmapsto{q} & qu \end{array}$$

□

Theorem 11.3.2. *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator $L = L_0 + K$ mit*

$$\begin{array}{rcl} L_0 u & = & -\mathrm{div}\,(aDu) \\ Ku & = & -\mathrm{div}\,(bu) + \langle c, Du\rangle + qu \end{array}$$

und den Voraussetzungen:

(B) beschränkte Koeffizienten:

$$a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R})), \quad b, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad q \in L^\infty.$$

(E) Elliptizität: $\langle \xi, a(x)\xi\rangle \geq \mu|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ und einem $\mu > 0$.

Dann ist $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ ein Fredholmoperator vom Index null. Insbesondere gilt die Alternativ

$$L \text{ injektiv} \Longleftrightarrow L \text{ surjektiv.}$$

Proof. Unter der Bedingungen (B) und (E) können wir Satz von lax-Milgram anwenden und zeigen, dass L_0 Isomorphismus ist. Da K kompakt ist, ist L nach Riesz-Schauder, Theorem 11.2.9, Fredholm mit Index Null. Insbesondere gilt die Alternativ: L injektiv $\Longleftrightarrow$ L surjektiv.

□

Theorem 11.3.3 (Lösbarkeitskriterium für Dirichletproblem)**.** *Sei $\Omega \subset R^n$ offen und beschränkt. Betrachte den Operator $L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ wie in Satz 11.3.2. Für $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ sind äquivalent:*

(1) $Lv = \varphi$ besitzt eine Lösung $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$,
(2) $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in \ker(L^*)$, wobei L^* bezeichnet als den (formal) adjungierten Operator von L, es gilt $L^*v = -\mathrm{div}\,(a^*Dv) - \mathrm{div}\,(cv) + \langle b, Dv\rangle + qv$.

Hier ist L der *formal* adjungierte Operator zu L, definiert durch

$$L^* : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)', \quad L^*u(v) = Lv(u). \tag{11.5}$$

Wir berechnen explizit

$$\begin{aligned} Lv(u) &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a^{ij}\partial_i v \partial_j u + \sum_{j=1}^n b^j v(\partial_j u) + \sum_{j=1}^n c^j(\partial_j v)u + qvu \right) \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a^{ji}\partial_i u \partial_j v + \sum_{j=1}^n c^j u(\partial_j v) + \sum_{j=1}^n b^j(\partial_j u)v + quv \right) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die (schwache) Darstellung

$$L^*u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_j a^{ji}\partial_i u - \sum_{j=1}^n \partial_j(c^j u) + \sum_{j=1}^n b^j \partial_j u + qu. \tag{11.6}$$

Die Koeffizienten von ergeben sich also durch formale partielle Integration. Sind Lu und Lv als L^2-Funktionen darstellbar, so gilt in der Tat

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = Lu(v) = Lv(u) = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Der Operator L^* ist adjungierter Operator von L bezüglich des L^2-Skalarprodukts. Er ist nicht die Hilbertraumadjungierte von $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ im Sinne der folgenden Definition der Hilbertraumadjungierte

Lemma 11.3.4 (Hilbertraumadjungierte)**.** *Seien X, Y Hilberträume über $\mathbb{R}$. Dann gibt es zu jedem $T \in L(X,Y)$ genau ein $T \in L(Y,X)$ mit*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall, x \in X, y \in Y$$

Es gilt $\|T\| = \|T\|$. T^* heißt die Hilbertraumadjungierte von T.

Proof. Sei T' die Adjungierte Abbildung von T, gemäß Proposition 11.1.9, d.h., $T' : Y' \to X'$ mit $\langle Tx, \varphi\rangle = \langle x, T'\varphi\rangle$ für alle $x \in X$ und $\varphi \in Y'$. Seien $I_X : X' \to X$ und $I_Y : Y' \to Y$ sind die in Thereom 5.2.5 definierte Abbildungen Setze $T^* = I_X T' I_Y^{-1}$. T^* ist die gesuchte:

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle x, I_X T' I_Y^{-1} y\rangle = T' I_Y^{-1} y(x) = I_Y^{-1} y(Tx) = \langle Tx, y\rangle$$

□