2. Normierte Räume und Hilberträume

2.1. Normierte Räume.

Bemerkung 2.1.1. Wir sagen, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sei, wenn V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$ ist.

Definition 2.1.2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ Norm, wenn $\|\cdot\|$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.
(ii) $\|v\| = 0$ gilt genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$.
(iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ für alle $u, v \in V$. (Dreiecksungleichung)

Lemma 2.1.3. *Sei V ein normierter Raum. Dann ist $V \ni x \mapsto \|x\|$ stetig.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| :$$

Gelte $x_n \to x$. Dann konvergiert die rechts Seite gegen Null, somit folgt auch $\|x_n\| \to \|x\|$. □

Bemerkung 2.1.4.

(i) Jeder normierte Raum ist ein metrischer Raum vermöge $d(x, y) := \|x - y\|$. Wenn nicht anders angegeben, wollen wir auf normierten Räumen stets diese induzierte Metrik betrachten. (Details: Analysisvorlesung.)
(ii) Einen vollständigen normierten Raum nennen wir Banachraum.
(iii) Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Dann wird auf

$$V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2)\colon v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$$

durch $\|(v_1, v_2)\|_{V_1 \oplus V_2} := \|v_1\|_{V_1} + \|v_2\|_{V_2}$ eine Norm definiert. Wie beim Nachweis, dass die „Taxinorm“ eine Norm ist, rechnet man auch hier nach, dass man eine Norm erhält.
(iv) Seien $(V_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I$, normierte Räume. Dann ist

$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{(v_i)_{i \in I}\colon v_i \in V_i,\ \|(v_i)_{i \in I}\| < \infty\} \quad \text{mit} \quad \|(v_i)_{i \in I}\| := \sum_{i \in I} \|v_i\|_{V_i}$$

ein normierter Raum.
(v) Auf den direkten Summen gibt es auch weitere Normen, z. B. l^p-Normen, vergleiche den nächsten Abschnitt.
(vi) Sind die normierten Räume sogar Banachräume, so sind die oben definierten direkten Summen ebenfalls Banachräume.
(vii) Ist I unendlich, so gilt automatisch für höchstens abzählbar viele $i \in I$ die Ungleichung $v_i \neq 0$.

Bei Quotientenräumen muss man sich im Gegensatz zur linearen Algebra auf abgeschlossene Teilmengen beschränken um wieder einen Banachraum zu erhalten. Das folgende Theorem ist falsch, wenn wir aus den stetigen Funktionen mit C^0-Norm auf $[0, 1]$ den (nach Stone-Weierstraß dichten) Unterraum der Polynome herausdividieren, der Quotientenraum ist nicht einmal normiert, da die positive Definitheit verloren geht.

Theorem 2.1.5 (Quotientenräume von Banachräumen)**.** *Sei X ein Banachraum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist der Quotientenraum X/M mit*

$$\|[x]\| := \operatorname{dist}(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

ein Banachraum.

Beweis. Wir beschränken uns auf die nichttrivialen Nachweise.

(i) $\|[x]\|$ ist unabhängig vom Vertreter aus $x + M$ wohldefiniert.

(ii) Da M abgeschlossen ist, ist $\|[x]\| \neq 0$ für $[x] \neq M$.

(iii) Dreiecksungleichung: Sei $\varepsilon > 0$. Seien $x, y \in X$ und $a, b \in M$ mit $\|x - a\| \leq \operatorname{dist}(x, M) + \varepsilon$ sowie $\|y - b\| \leq \operatorname{dist}(y, M) + \varepsilon$. Dann folgt

$$\inf_{z\in M} \|x+y-z\| \leq \|x+y-a-b\| \leq \|x-a\| + \|y-b\| \leq \operatorname{dist}(x, M) + \operatorname{dist}(y, M) + 2\varepsilon.$$

Die Dreiecksungleichung folgt.

(iv) X/M ist ein Banachraum: Sei $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\|[x_n] - [x_{n+1}]\| < 2^{-n}$ gilt. Wir wollen nun Vertreter wählen, die in X eine Cauchyfolge bilden. Wähle $z_0 \in [x_0]$ beliebig. Dann finden wir induktiv $z_{n+1} \in [x_{n+1}]$ mit

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq \|[x_{n+1} - x_n]\| + 2^{-n} = \|[x_{n+1}] - [x_n]\| + 2^{-n}.$$

Die z_n bilden eine Cauchyfolge in X, da

$$\begin{aligned} \|z_{n+m} - z_n\| &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \|z_{i+1} - z_i\| \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \left(\|[x_{i+1}] - [x_i]\| + 2^{-i}\right) \\ &\leq \sum_{i=n}^{n+m-1} 2 \cdot 2^{-i} \leq 2^{-n+1}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots\right) = 2^{-n+2}. \end{aligned}$$

Setze $z := \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Wir erhalten

$$\|[x_n] - [z]\|_{X/M} = \|[z_n] - [z]\|_{X/M} \leq \|z_n - z\| \to 0$$

für $n \to \infty$. Also gilt $[x_n] \to [z]$ in X/M. □

2.2. **Lineare Abbildungen.** Ist T eine lineare Abbildung so schreiben wir wie in der Linearen Algebra auch Tu statt $T(u)$.

Definition 2.2.1. Wir schreiben $R(T) = \operatorname{im}(T)$ für das Bild von T und $N(T)$ für den Kern von T.

Definition 2.2.2. Sei $T \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann heißt T beschränkt, falls es ein $c \geq 0$ mit

$$\|Tv\|_W \leq c \cdot \|v\|_V$$

für alle $v \in V$ gibt.

Wir definieren die Operatornorm von T, $\|T\|$, durch

$$\|T\| := \sup_{\|v\|\leq 1} \|Tv\|.$$

Bemerkung 2.2.3. Äquivalent zur Beschränktheit für lineare Abbildungen sind:

(i) T bildet beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab.

(ii) $\sup\limits_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \leq c$.

Es gilt

$$\|T\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|.$$

Theorem 2.2.4. *Sei $T \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) T ist beschränkt,

(ii) T ist in allen Punkten stetig,

(iii) T ist im Ursprung stetig.

Beweis.
„(i) $\Longrightarrow$ (ii)“: Gelte $u_n \to u$ für $n \to \infty$. Dann folgt

$$\|Tu - Tu_n\| = \|T(u - u_n)\| \le \|T\| \cdot \|u - u_n\| \to 0$$

für $n \to \infty$.

„(ii) $\Longrightarrow$ (iii)“: Klar.

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Falls T unbeschränkt ist, gibt es Vektoren $v_n \in V$, ohne Einschränkung mit $\|v_n\| = 1$, und $\|Tv_n\| =: r_n \to \infty$, ohne Einschränkung $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $u_n := \frac{v_n}{r_n}$. Dann folgt $u_n \to 0$ und es gilt

$$\|Tu_n\| = \frac{\|Tv_n\|}{r_n} = 1$$

im Widerspruch zur Stetigkeit von T.

Man kann „(iii) $\Longrightarrow$ (i)“ auch direkt zeigen: Nach der Stetigkeit von T im Ursprung, für $\varepsilon = 1$ existiert es ein $\delta > 0$ mit: $\|Tv\| < 1$ für alle $\|v\| \le \delta$.. Daraus folgt

$$Tv = \frac{\|v\|}{\delta} T(\delta \frac{v}{\|v\|}) \le \frac{\|v\|}{\delta}, \quad \forall v \in V.$$

□

Definition 2.2.5.

(i) Seien V, W normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Definiere $L(V, W)$ als den Raum der stetigen linearen Abbildungen T von V nach W. $L(V, W)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird mit der Operatornorm $\|T\|$ zu einem normierten Raum (einfache Rechnung).

(ii) Seien V, W normierte Räume. Dann heißen V und W isomorph, falls es eine stetige, bijektive lineare Abbildung $T\colon V \to W$ mit stetiger Inverser gibt. T heißt dann Isomorphismus (zwischen normierten Räumen). Gilt zusätzlich noch $\|T(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so heißt T normtreuer Isomorphismus.

Lemma 2.2.6. *Ist W ein Banachraum, so auch $L(V, W)$.*

Beweis.

(i) Sei $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L(V, W)$ und $u \in V$. Wir definieren T durch $Tu := \lim_{n\to\infty} T_n u$. Der Grenzwert existiert, da $(T_n u)_n$ eine Cauchyfolge ist; es gilt nämlich $\|T_n u - T_m u\| \le \|T_n - T_m\| \cdot \|u\|$. Da W vollständig ist, ist T wohldefiniert. Die Linearität von T ist klar.

(ii) T ist stetig: Wir benutzen, dass aus $u_n \to u$ auch $\|u_n\| \to \|u\|$ folgt. Da $A \mapsto \|A\|$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichun Lipschitzstetig (mit Lipschitzkonstante eins) ist und $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge ist, ist auch $\|T_n\|$ eine Cauchyfolge und konvergiert daher in $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\|Tu\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n u\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n u\| \le \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|u\|,$$

wobei wir rechts den Limes superior nachträglich wieder als Limes schreiben dürfen. Es folgt $\|T\| \le \lim_{n\to\infty} \|T_n\|$.

(iii) $T_n \to T$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n \ge N$ gilt. Sei nun $u \in V$ beliebig. Es gilt

$$\|Tu - T_n u\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m u - T_n u\| \le \limsup_{m\to\infty} \|T_m - T_n\| \cdot \|u\| \le \varepsilon \cdot \|u\|$$

für alle $n \ge N$. Somit erhalten wir $\|T - T_n\| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$. □

Definition 2.2.7. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir setzen $V^* := L(V, \mathbb{K})$, den Raum der stetigen linearen Funktionale auf V. ($V' = V^*$ ist eine weitere verbreitete Bezeichnung.) Sei $\varphi \in V^*$, $u \in V$. Statt $\varphi(u)$ schreiben wir auch $\langle u, \varphi \rangle$. Mit der Operatornorm oder dualen Norm auf V^* gilt

$$|\langle u, \varphi \rangle| \le \|\varphi\|_{V^*} \cdot \|u\|_V.$$

Theorem 2.2.8. *Sei V ein normierter Raum, $\hat{V}$ seine Vervollständigung als metrischer Raum. Dann kann man $\hat{V}$ auf genau eine Art zu einem Banachraum machen, so dass die Einbettung $\iota \colon V \to \hat{V}$ linear und normtreu ist.*

Beweis. Wir identifizieren V mit $\iota(V)$.

(i) $u + v$: Seien $u, v \in \hat{V}$. Gelte $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$ sowie $V \ni v_n \to v \in \hat{V}$. Dann ist $u_n + v_n$ eine Cauchyfolge in V. Wir definieren $v + u := \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n)$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Auswahl der Cauchyfolgen.

(ii) λu: Für $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist λu_n eine Cauchyfolge in V. Wir definieren $\lambda u := \lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n$. Auch diese Definition ist von der Wahl der Cauchyfolge unabhängig.

(iii) $\|\cdot\|$: Sei $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$. Dann ist auch $\|u_n\|_V$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Cauchyfolge. Wir definieren $\|u\|_{\hat{V}} := \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_V$. Man rechnet leicht nach, dass dies eine Norm ist.

(iv) Vollständigkeit: $\|\cdot\|_{\hat{V}}$ induziert eine Metrik $\tilde{d}$ auf $\hat{V}$. Wir müssen nachweisen, dass $\tilde{d} = \hat{d}$ gilt. Nach Definition ist mit Bezeichnungen wie oben

$$\tilde{d}(u, v) = \|u - v\|_{\hat{V}} = \lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_V = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = \hat{d}(u, v).$$

Die Behauptung folgt. □

Theorem 2.2.9 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei V ein normierter Raum, W ein Banachraum und $T \in L(V, W)$. Dann besitzt T genau eine Fortsetzung $\hat{T} \in L(\hat{V}, W)$ und es gilt $\|\hat{T}\| = \|T\|$.*

Dies folgt auch direkt aus Lemma 1.4.3.

Beweis.

(i) Existenz: Sei $V \ni u_n \to u \in \hat{V}$. Dann ist Tu_n eine Cauchyfolge, da $\|Tu_n - Tu_m\| \le \|T\| \cdot \|u_n - u_m\|$ gilt. Wir setzen $\hat{T}u := \lim\limits_{n\to\infty} Tu_n$. Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Cauchyfolge. $\hat{T}$ ist linear und eine Fortsetzung von T.

(ii) Stetigkeit: Es gilt

$$\|\hat{T}u\| = \lim_{n\to\infty} \|Tu_n\| \le \|T\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|T\| \cdot \|u\|.$$

Somit ist $\|\hat{T}\| \le \|T\|$.

(iii) Gleichheit der Normen: Für $u \in V \subset \hat{V}$ gilt $\|Tu\| = \|\hat{T}u\| \le \|\hat{T}\| \cdot \|u\|$. Wir bilden nun das Supremum über alle u mit $\|u\| = 1$ und erhalten $\|T\| \le \|\hat{T}\|$. Zusammen mit der Stetigkeit folgt also $\|T\| = \|\hat{T}\|$.

(iv) Eindeutigkeit: Seien $\hat{T}$ und $\tilde{T}$ zwei solche Fortsetzungen. Sei $u \in \hat{V}$ und sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $u_n \in V$ und $u_n \to u$. Dann erhalten wir aufgrund der Stetigkeit

$$\hat{T}u = \lim_{n\to\infty} \hat{T}u_n = \lim_{n\to\infty} Tu_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}u_n = \tilde{T}u.$$ □

Für multilineare Abbildungen gibt es eine ähnliche Charakterisierung der Stetigkeit wie bei linearen Abbildungen.

Proposition 2.2.10. *Seien E_i, $1 \le i \le n$, und F normierte Räume. Setze $E := \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Sei $A\colon E \to F$ multilinear. Dann ist A genau dann stetig, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass*

$$\left\|A\left(x^1,\ldots,x^n\right)\right\| \le c \cdot \left\|x^1\right\| \cdot \ldots \cdot \left\|x^n\right\|$$

für alle $\left(x^1,\ldots,x^n\right) \in E$ gilt.

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Widerspruchsbeweis. Nehme an, dass A stetig ist, die Abschätzung aber nicht gilt. Dann gibt es Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_k^i\right)_{\substack{1\le i\le n\\ k\in\mathbb{N}}}$ in E mit

$$\|A(x_k)\| > k \cdot \left\|x_k^1\right\| \cdot \ldots \cdot \left\|x_k^n\right\|.$$

Setze $y_k^i := \frac{1}{k^{1/n}} \frac{x_k^i}{\left\|x_k^i\right\|}$. Dann gilt $y_k \to 0$ für $k \to \infty$ aber $\|A(y_k)\| > 1$. Widerspruch zur Stetigkeit von A.

„$\Longleftarrow$“: Nehme die Abschätzung an. Gelte $x_k \to y$. Dann gibt es ein $C > 0$ so dass $\left\|x_k^i\right\| \le C$ für alle $1 \le i \le n$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^n\right) - A\left(y^1,\ldots,y^n\right)\right\| \\
\le{}& \left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^n\right) - A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-1},y^n\right)\right\| \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-2},x_k^{n-1},y^n\right) - A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-2},y^{n-1},y^n\right)\right\| + \ldots \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1,y^2,\ldots,y^n\right) - A\left(y^1,y^2,\ldots,y^n\right)\right\| \\
\le{}& \left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-1},x_k^n-y^n\right)\right\| + \left\|A\left(x_k^1,\ldots,x_k^{n-2},x_k^{n-1}-y^{n-1},y^n\right)\right\| + \ldots \\
&\quad + \left\|A\left(x_k^1-y^1,y^2,\ldots,y^n\right)\right\| \\
\le{}& c \cdot C^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left\|x_k^i - y^i\right\| \to 0
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Somit ist A stetig. □

Definition 2.2.11. Seien E_i, $1 \le i \le n$, und F normierte Räume. Setze $E := \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Sei $A\colon E \to F$ multilinear und stetig. Dann heißt

$$\|A\| := \sup_{\|x^1\|,\ldots,\|x^n\|=1} \left\|A\left(x^1,\ldots,x^n\right)\right\|$$

die Norm der multilinearen Abbildung.

Bemerkung 2.2.12.

(i) Die Menge aller stetigen multilinearen Abbildungen $E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ zwischen normierten Räumen, die wir mit $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ bezeichnen, ist mit der in Definition 2.2.11 eingeführten Norm ein normierter Raum.

(ii) Ist F zusätzlich vollständig, so ist $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ ein Banachraum.

(iii) Seien E, F, G normierte Räume. Dann ist die Abbildung

$$A \in L(E,F;G) \to L(E,L(F,G)) \ni \tilde{A}$$

mit $A(x,y) = \big(\tilde{A}(x)\big)(y)$ eine normtreuer Isomorphismus.

Analog erhält man einen normtreuen Isomorphismus

$$L(E_1,\ldots,E_n;F) \to L(E_1,L(E_2,\ldots,L(E_n,F)\ldots)).$$

Details: Übung.