Mit der Hölderschen Ungleichung und $p+q=pq$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p}^p &= \int |f+g|^p = \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\
&\le \|f\|_{L^p} \cdot \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \|g\|_{L^p} \cdot \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \cdot \left(\int |f+g|^p \right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \cdot \|f+g\|_{L^p}^{p/q}.
\end{aligned}$$

Umordnen liefert die Behauptung. □

Korollar 3.1.2. *$\mathbb{R}^n$ mit der p-Norm $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ ein Banachraum.*

Beweis. Die Dreiecksungleichung ist gerade die Minkowskische Ungleichung für Funktionen, die auf den Intervallen $[0,1)$, $[1,2)$, ..., $[n-1,n)$ konstant sind. Die übrigen Eigenschaften einer Norm sind elementar.

Sei $x_i = (x_{i,k})_{1\le k\le n}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$. Wegen $|x_{i,k} - x_{j,k}| \le \|x_i - x_j\|_p$ für alle $1 \le k \le n$ bilden auch die k-ten Komponenten eine Cauchyfolge. Setze $x := (x_k)_{1\le k\le n}$ mit $x_k := \lim\limits_{i\to\infty} x_{i,k}$. Dann folgt $\|x_i - x\|_p \to 0$ für $p \to \infty$, da sämtliche Komponenten konvergieren. □

Definition 3.1.3. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann heißen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, wenn es eine Konstante $c>0$ mit

$$\tfrac{1}{c}\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le c \cdot \|u\|_1$$

für alle $u \in X$ gibt.

Theorem 3.1.4. *Auf $\mathbb{R}^n$ sind je zwei Normen äquivalent.*

Dieser Satz gilt auch für beliebige endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Die nachfolgend definierten Normen $l^p(\mathbb{N})$ sind für verschiedene Werte von p keine äquivalenten Normen auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Wir folgen [**?**].

Beweis. Sei $x = \sum\limits_{i=1}^n x^i e_i$ mit der Standardbasis $\{e_i\}_i$ des $\mathbb{R}^n$. Bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\|\cdot\|$ eine fixierte andere Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen nur die Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$. Für beliebige Normen folgt die Aussage dann aufgrund der Transitivität in der Definition der Äquivalenz von Normen.

(i) Es gilt

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^n \left|x^i\right| \cdot \|e_i\| \le c\|x\|_\infty \quad \text{mit} \quad c := \sum_{i=1}^n \|e_i\|.$$

(ii) Falls es kein $c>0$ mit $c \cdot \|x\|_{L^\infty} \le \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, finden wir eine Folge $(x_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\|x_k\|_\infty > k$. Definiere die Folge $(y_k)_k$ durch $y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$. Diese Folge ist bezüglich der Supremumsnorm beschränkt. Somit sind die Komponenten y_k^i, $1 \le i \le n$, $k \in \mathbb{N}$, gleichmäßig beschränkt. Ohne Einschränkung dürfen wir also nach Auswahl einer Teilfolge annehmen, dass $y_k^i \to y^i$ für $k \to \infty$ konvergiert. Wir erhalten $\|y_k - y\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Somit gilt nach (i) auch $\|y_k - y\| \to 0$ für $k \to \infty$. Nun gilt $\|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{\|x_k\|_\infty} = \frac{1}{\|x_k\|_\infty} \to 0$ für $k \to \infty$. Wir erhalten $y = 0$. Weiterhin folgt $1 = \|y_k\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Widerspruch. □

Theorem 3.1.5. *Sei $p \in [1, \infty)$. Dann ist der Raum*

$$l^p(\mathbb{N}) := \left\{ (x^n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_{l^p(\mathbb{N})} := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^n|^p \right)^{1/p}$$

ein Banachraum.

Allgemeiner definiert man Räume $l^p(A)$ für Funktionen $f \colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_{l^p(A)} := \left(\sum_{x\in A} |f(x)|^p \right)^{1/p} .$$

Beweis. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung und die Vollständigkeit:

Dreiecksungleichung: Seien $x, y \in l^p(\mathbb{N})$ Es gilt aufgrund der Dreiecksungleichung auf $\mathbb{R}^k$ mit der entsprechenden Norm $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} |x^n|^p \right)^{1/p}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{N} |x^n + y^n|^p \right)^{1/p} &\le \left(\sum_{n=1}^{N} |x^n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y^n|^p \right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y^n|^p \right)^{1/p} = \|x\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|y\|_{l^p(\mathbb{N})}. \end{aligned}$$

Somit ist $x + y$ mit komponentenweiser Addition wieder in $l^p(\mathbb{N})$ und mit $N \to \infty$ erhalten wir die Dreiecksungleichung.

Vollständigkeit: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $l^p(\mathbb{N})$. Dann folgt für $k \le N$ aus

$$\left| x_i^k - x_j^k \right| \le \left(\sum_{l=1}^{N} \left| x_i^l - x_j^l \right|^p \right)^{1/p} \le \|x_i - x_j\|_{l^p(\mathbb{N})} ,$$

dass auch $\left(x_i^k\right)_{i\in\mathbb{N}}$ für festes $k \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge ist. Definiere $x = (x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $x^k := \lim\limits_{i\to\infty} x_i^k$. Wir lassen $j \to \infty$ und erhalten

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left| x_i^k - x^k \right|^p \right)^{1/p} \le f(i)$$

mit $f(i) \to 0$ für $i \to \infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $i \gg 1$ mit $f(i) \le \varepsilon$. Lasse nun $N \to \infty$ und erhalte $\|x_i - x\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \varepsilon$. Es folgt $\|x\|_{l^p(\mathbb{N})} \le \|x_i\|_{l^p(\mathbb{N})} + \|x - x_i\|_{l^p(\mathbb{N})} < \infty$. Somit ist $x \in l^p(\mathbb{N})$ und $l^p(\mathbb{N})$ ist vollständig. $\square$

3.2. **Vollständigkeit** $\star$.

Bemerkung 3.2.1. Um den Raum der messbaren Funktionen zu einem normierten Raum zu machen, betrachten wir Äquivalenzklassen von Funktionen und identifizieren Funktionen (ohne dies später explizit hervorzuheben), die fast überall übereinstimmen.

Sei $1 \le p < \infty$. Für alle messbaren Funktionen f auf Ω setzen wir

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

und definieren $L^p(\Omega,\mu)$ als den Raum aller messbaren Funktionen f mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\mu)} < \infty.$$

Im Fall $p=\infty$ verfahren wir genauso, benutzen aber $\|f\|_\infty := \sup\limits_\Omega |f|$, das wesentliche Supremum von f.

Theorem 3.2.2. *Sei $1 \le p \le \infty$. Sei μ ein positives Maß auf Ω. Dann ist $L^p(\Omega,\mu)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei zunächst $1 \le p < \infty$. Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega,\mu)$. Gelte (nach Auswahl einer Teilfolge ohne Einschränkung) $\|f_{i+1}-f_i\|_{L^p} < 2^{-i}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$g_k := \sum_{i=0}^k |f_{i+1}-f_i| \quad \text{und} \quad g := \sum_{i=0}^\infty |f_{i+1}-f_i|.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt $\|g_k\|_{L^p} < 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Fatou ($\int \underline{\lim} f_n \le \underline{\lim} \int f_n$ für $f_n \ge 0$), angewandt auf g_k^p, folgt $\|g\|_{L^p} \le 2$. Somit gilt fast überall $g(x) < \infty$. Also konvergiert

$$f_1(x) + \sum_{i=1}^\infty (f_{i+1}(x) - f_i(x))$$

für fast alle $x \in \Omega$. Wir definieren $f(x)$ als diesen Grenzwert für diese x und sonst $f(x) := 0$. Somit gilt fast überall

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x).$$

Nach [**?**, Theorem 1.14] sind das Supremum und der Limes superior messbarer Funktionen selbst wieder messbar. Somit ist auch f messbar. Wir wollen nun zeigen, dass f_i auch in L^p gegen f konvergiert: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_{L^p} < \varepsilon$ für $m,n \ge N$. Sei $m > N$. Dann folgt mit Fatou

$$\int\limits_\Omega |f-f_m|^p \, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int\limits_\Omega |f_i - f_m|^p \, d\mu \le \varepsilon^p.$$

Hieraus folgt $f - f_m \in L^p(\Omega,\mu)$, also auch $f \in L^p(\Omega,\mu)$. Weiterhin folgt hieraus $\|f-f_m\|_{L^p} \to 0$ für $m \to \infty$.

Sei nun $p=\infty$. Definiere

$$A_k := \{x \in \Omega \colon |f_k(x)| > \|f_k\|_{L^\infty}\}$$

und

$$B_{m,n} := \{x \in \Omega \colon |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_n - f_m\|_{L^\infty}\}.$$

Setze $E := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \cup \bigcup\limits_{m,n\in\mathbb{N}} B_{m,n}$. Dann ist E als abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst wieder eine Nullmenge. In $\Omega \setminus E$ konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Funktion, die wir f nennen, auf E setzen wir $f(x) := 0$. Es folgt $f \in L^\infty$ sowie $\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0$ für $n \to \infty$. □

Im Verlauf des Beweises haben wir auch das folgende Resultat mitbewiesen:

Theorem 3.2.3. *Sei Ω ein Raum mit positivem Maß μ. Sei $1 \le p \le \infty$. Sei f_n eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega,\mu)$ mit Grenzwert f. Dann besitzt f_n eine Teilfolge, so dass $f_n(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ konvergiert.*

3.3. Räume der Hölderstetigen Funktionen.

Definition 3.3.1. Die Oszillation von $f : (X, d) \to (Y, d)$ ist die Funktion

$$\omega_f : (0, \infty) \to [0, \infty], \quad \omega_f(\delta) = \sup_{d(x_1,x_2)<\delta} d(f(x_1), f(x_2)).$$

Man kann leicht zeigen: Gilt $\omega_f(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$, so ist f gleichmäßig stetig. Weiter gilt: eine Familie $\mathcal{F}$ von Abbildungen $f : X \to Y$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig, falls $\sup_{f\in\mathcal{F}} \omega_f(\delta) \to 0$ mit $\delta \to 0$.

Beispiel 3.3.2. Sei $0 < \alpha \leq 1$. Die α-HÏderkonstante von $f : (X, d) \to (Y, d)$ ist definiert durch

$$[f]_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha}.$$

f heiß t α-Hölderstetig wenn $[f]_\alpha < \infty$. Offenbar gilt

$$d(f(x), f(y)) = \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha} d(x, y)^\alpha \leq [f]_\alpha \delta^\alpha, \quad \text{falls} d(x, y) \leq \delta.$$

Die Oszillation erfüllt also die Abschätzung

$$\omega_f(\delta) \leq [f]_\alpha \delta^\alpha. \tag{3.1}$$

Eine HÖlderstetige Funktion ist also gleichmäßig stetig, und für jedes $\Lambda < \infty$ ist die Familie

$$\mathcal{F} = \{f : X \to Y : [f]_\alpha \leq \Lambda\}$$

gleichgradig stetig.

Für $u : X \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} = \|u\|_{C^0} + [u]_{\alpha,X} = \sup_{x\in X} |u(x)| + \sup_{x\neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)^\alpha}.$$

Theorem 3.3.3. $C^{0,\alpha}(X) = \{u \in C^0(X) : \|u\|_{C^{0,\alpha}(X)} < \infty\}$ *ist ein Banachraum.*

Beweis. □

4. Der Satz von Hahn-Banach

4.1. Der Satz von Hahn-Banach. Der Satz von Hahn-Banach besagt, dass sich ein lineares Funktional normerhaltend fortsetzen lässt. Der Beweis benutzt das Zornsche Lemma.

Lemma 4.1.1 (Zornsches Lemma, Erinnerung $\star$)**.** *Sei M eine nichtleere Menge mit einer Teilordnung $\leq$. Nehme an dass jede total geordnete Teilmenge $\Lambda \subset M$ (= Kette) eine obere Schranke $b \in M$ besitzt, d. h. dass $x \leq b$ für alle $x \in \Lambda$ gilt. Dann enthält M ein maximales Element x_0, d. h. ein Element $x_0 \in M$, so dass aus $x_0 \leq x$ bereits $x = x_0$ folgt. (Beachte, dass x_0 i. a. nicht eindeutig bestimmt ist.)*

Bemerkung. Eine Menge M mit einer Relation $\leq$ heißt teilweise geordnet, wenn für alle $a, b, c \in M$ Folgendes gilt:

$$a \leq a,$$
$$a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$$
$$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

(1) $A \subset M$ heißt total geordnet, wenn für $a, b \in A$ gilt stets $a \leq b$ oder $b \leq a$.
(2) $b \in M$ heißt obere Schranke von A, wenn es $a \leq b$ für alle $a \in A$ gilt.
(3) $m_0 \in M$ heißt maximales Element von M $\Leftrightarrow$ aus $m_0 \leq m \in M$ folgt $m_0 = m$.

Für einen Beweis aus dem Auswahlaxiom verweisen wir auf Literatur oder Veranstaltungen zur Logik. Das Zornsche Lemma wurde bereits beim Beweis, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt, benutzt.

Wir zeigen zwei Varianten des Satzes von Hahn-Banach. Zunächst behandeln wir die etwas allgemeinere Version mit einer konvexen Funktion.

Theorem 4.1.2 (Satz von Hahn-Banach (mit einer konvexen Funktion))**.** *Sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $W \subset E$ ein Unterraum und $\varphi\colon W \to \mathbb{R}$ linear. Sei $p\colon E \to \mathbb{R}$ konvex und gelte $\varphi \le p$ auf W. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $\tilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}$ von φ mit $\tilde{\varphi} \le p$, d. h. eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\varphi}|_W = \varphi$ und $\tilde{\varphi} \le p$.*

Beweis.

(i) Sei $x_0 \notin W$. Wir wollen φ zunächst auf $W \oplus \langle x_0\rangle$ fortsetzen. Jedes Element $x \in W \oplus \langle x_0\rangle$ läßt sich in der Form $x = w + \lambda x_0$ mit $w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ darstellen. Sei ψ eine lineare Fortsetzung von φ. Dann folgt

$$\psi(x) = \psi(w) + \lambda\psi(x_0) = \varphi(w) + \lambda\psi(x_0).$$

Können wir $\psi(x_0)$ so wählen, dass $\psi(x) \le p(x)$ für alle $x \in W \oplus \langle x_0\rangle$ gilt, so ist ψ die gesuchte Fortsetzung auf $W \oplus \langle x_0\rangle$.

Somit ist zu zeigen, dass $\psi(x_0)$ so gewählt werden kann, dass $\varphi(w) + \lambda\psi(x_0) \le p(w + \lambda x_0)$ für alle $\lambda \ne 0$ und alle $w \in W$ gilt. Dies ist (nach Unterscheidung für $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$) äquivalent zu

$$\sup_{\substack{w\in W\\ \mu>0}} \frac{\varphi(w) - p(w - \mu x_0)}{\mu} \le \psi(x_0) \le \inf_{\substack{z\in W\\ \lambda>0}} \frac{p(z + \lambda x_0) - \varphi(z)}{\lambda}.$$

Dazu wollen wir nachweisen, dass für alle $w, z \in W$ und alle $\lambda, \mu > 0$

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{p(z+\lambda x_0)}{\lambda} + \frac{p(w-\mu x_0)}{\mu}\right) \ge \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\varphi(w)}{\mu} + \frac{\varphi(z)}{\lambda}\right)$$

gilt. Der zusätzliche Vorfaktor erleichtert nun die Rechnungen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{\lambda+\mu}p(z+\lambda x_0) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}p(w-\mu x_0)\\
&\ge p\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}x_0 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w - \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}x_0\right)\\
&= p\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w\right) \ge \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}z + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}w\right)\\
&= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi(z) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi(w).
\end{aligned}$$

Somit läßt sich φ wie gewünscht auf $W \oplus \langle x_0\rangle$ fortsetzen.

(ii) Die Fortsetzung auf ganz E erhalten wir mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Betrachte dazu die Menge $\mathcal{M}$ aller Fortsetzungen von φ mit $\varphi \le p$, d. h. die Menge aller Tupel (ψ, U), wobei $U \subset E$ ein Unterraum mit $W \subset U$ ist, $\psi|_W = \varphi$ und $\psi \le p$ in U gelten. (φ, W) ist selber eine Fortsetzung von φ, also ist $\mathcal{M} \ne \emptyset$. Auf $\mathcal{M}$ definieren wir eine Halbordnung durch $(\psi, U) \le \big(\tilde{\psi}, V\big)$, falls $U \subset V$ und $\tilde{\psi}|_U = \psi$ gelten. Sei also $\Lambda \subset \mathcal{M}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$, $\Lambda = \{(\psi_i, U_i)\colon i \in I\}$ für eine geeignete Indexmenge. Dann ist durch (ψ, U) mit $U := \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ und $\psi(x) := \psi_i(x)$ für $x \in U_i$ eine obere Schranke gegeben: $U \subset E$ ist ein Unterraum, ψ ist wohldefiniert, linear, stimmt auf W mit φ überein und erfüllt $\psi(x) \le p(x)$ für alle $x \in U$. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also ein maximales Element. Dieses muss auf ganz E definiert sein, denn sonst könnte man es nach den obigen Überlegungen auf $U \oplus \langle x_0\rangle$ für ein $x_0 \in E\backslash U$ fortsetzen. Dies widerspräche der Maximalität. $\square$

Theorem 4.1.3 (Satz von Hahn-Banach für lineare Funktionale)**.** *Sei E ein normierter Raum, $W \subset E$ ein Unterraum und $\varphi \in W^*$. Dann gibt es eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in E^*$ von φ, d. h. eine Abbildung $\tilde{\varphi} \in E^*$ mit $\tilde{\varphi}|_W = \varphi$ und $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Beweis.

(i) Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt dies gerade aus dem Satz von Hahn-Banach mit einer konvexen Funktion: Die Norm ist wegen

$$\|tx + (1-t)y\| \le \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\|$$

für alle $x, y \in E$ und $t \in [0,1]$ konvex. Sei ohne Einschränkung $\|\varphi\| = 1$. Setze $p(x) := \|x\|$. Dann gilt $\varphi(x) \le \|x\|$. Für die Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ erhalten wir

$$\pm\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(\pm x) \le p(\pm x) = \|x\|,$$

also $\|\tilde{\varphi}\| \le 1$ und

$$\|\tilde{\varphi}\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|\tilde{\varphi}(x)\| \ge \sup_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} \|\tilde{\varphi}(x)\| = \sup_{\substack{x \in W \\ \|x\|=1}} \|\varphi(x)\| = 1.$$

Somit ist $\|\tilde{\varphi}\| = 1$.

(ii) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Wir fassen E als reellen Vektorraum auf und bezeichnen diesen mit $E_{\mathbb{R}}$. Sei $\varphi \in E^*$. Es gilt $\varphi = \operatorname{Re}\varphi + i \operatorname{Im}\varphi$. Wegen

$$\operatorname{Re}\varphi(ix) + i \operatorname{Im}\varphi(ix) = \varphi(ix) = i\varphi(x) = i \operatorname{Re}\varphi(x) - \operatorname{Im}\varphi(x)$$

gilt $\operatorname{Re}\varphi(ix) = -\operatorname{Im}\varphi(x)$. $\operatorname{Re}\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ sind reelle Formen auf $E_{\mathbb{R}}$. Daher können wir jede komplexe Form φ als

$$\varphi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x) - i \operatorname{Re}\varphi(ix) \tag{4.1}$$

für $x \in E$ schreiben. Umgekehrt sei ψ eine reellwertige Form auf $E_{\mathbb{R}}$. Dann wird durch

$$\varphi(x) := \psi(x) - i\psi(ix)$$

eine komplexe Form auf E definiert, es gilt nämlich insbesondere $\varphi(ix) = \psi(ix) - i\psi(-x) = i\psi(x) - i^2\psi(ix) = i\varphi(x)$. Für die Norm gilt $\|\varphi\| = \|\psi\|$, denn es gilt einmal $|\varphi(x)| = \sqrt{|\psi(x)|^2 + |\psi(ix)|^2} \ge |\psi(x)|$. Andererseits gibt es zu $x \in E$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $|\varphi(x)| = e^{it}\varphi(x) = \varphi\left(e^{it}x\right)$. Da ψ reellwertig ist und $|\varphi(x)| \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir

$$|\varphi(x)| = \psi\left(e^{it}x\right) \le \|\psi\| \cdot \|x\|$$

für alle $x \in E$.

Sei also $\varphi \in W^*$. Setze $\psi := \operatorname{Re}\varphi \in (W_{\mathbb{R}})^*$. Dann besitzt ψ eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{\psi}$ nach $E_{\mathbb{R}}$. Somit ist

$$\tilde{\varphi}(x) := \tilde{\psi}(x) - i\tilde{\psi}(ix)$$

für $x \in E$ eine normerhaltende Fortsetzung von φ auf E. Wegen (4.1) handelt es sich um eine Fortsetzung. □

Korollar 4.1.4. *Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein linearer Teilraum, d. h. Unterraum, und $x_0 \in X$. Setze $d := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\|$. Sei $d > 0$. Dann gibt es $\varphi \in X^*$ mit $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x_0) = d$ und $\varphi|_M = 0$.*

Beweis. Definiere λ auf $M \oplus \langle x_0 \rangle$ durch $\lambda(y + \alpha x_0) := \alpha d$ für $y \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda\| &= \sup_{\substack{y+\alpha x_0 \neq 0 \\ y \in M,\, \alpha \in \mathbb{K}}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \\ y \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|y + \alpha x_0\|} = \sup_{\substack{0 \neq \alpha \in \mathbb{K} \\ z \in M}} \frac{|\alpha d|}{\|-\alpha z + \alpha x_0\|} \\ &= \sup_{z \in M} \frac{d}{\|x_0 - z\|} = \frac{d}{\inf\limits_{z \in M} \|x_0 - z\|} = \frac{d}{d} = 1.\end{aligned}$$

Eine normtreue Fortsetzung φ aus dem Satz von Hahn-Banach liefert die Behauptung. □

Korollar 4.1.5. *Sei X ein normierter Raum und X' sein Dualraum.*
1) Sei $x \in X$. Dann gilt

$$\|x\| = \sup_{\substack{\varphi \in X', \\ \|\varphi\| = 1}} |\langle x, \varphi \rangle|.$$

Das Supremum wird angenommen, d. h. es gibt ein $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\|x\| = \langle x, \varphi \rangle$.
2) Punkte in X lassen sich durch X' trennen. D.h., ist $\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in X'$, so gilt $x = 0$.

Beweis. 1). Wähle in Korollar 4.1.4 $M = \{0\}$., also $d = \|x\|$. 2) folgt aus 1). □

Korollar 4.1.6. *Sei X ein normierter Raum und X' sein Dualraum. Sei $X'' := (X')'$ der Dualraum von X'. Dann ise die Abbildung*

$$J : X \to X'', \quad (Jx)(\varphi) := \varphi(x)$$

eine isometrische (normtreue) Einbettung.

Proof. Übung. □

Bemerkung. Ein Banachraum X heißt *reflexiv*, wenn die kanonische Einbettung J surjektiv ist. Aus Abschnitt 3 wissen wir, dass l^p, $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv sind, aber nicht $L1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, l^1, l^∞. Die Hilberträume sind reflexiv.

Korollar 4.1.7. *Sei X normierter Vektorraum. Ist X^* separabel, so auch X.*

Proof. Da X^* separabel ist, können wir eine dichte Folge φ_k in der Menge $\{\varphi \in X^* : \|\varphi\| = 1\}$ wählen. Wähle $x_k \in X$ mit $\|x_k\| = 1$ und $\varphi_k(x_k) \geq \frac{1}{2}$. Angenommen es ist

$$V := \overline{\operatorname{Span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} \neq X.$$

Nach Korollar 4.1.6 gibt es dann ein $\varphi \in X^*$ mit $\varphi_{|V} = 0$ und $\|\varphi\| = 1$. Nach Auswahl einer Teilfolge gilt $\varphi \to \varphi$ in X^*. Es folgt

$$0 = \varphi(x_k) = \varphi_k(x_k) + (\varphi - \varphi_k)(x_k) \geq \frac{1}{2} - \|\varphi - \varphi_k\| > 0,$$

für k groß, ein Widerspruch. □

Lemma 4.1.8. *Sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ offen und konvex, sowie $0 \in K$. Dann ist das Minkowski-Funktional*

$$p(x) = \inf\left\{r > 0 : \frac{x}{r} \in K\right\}$$

convex (sublinear) und $K = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

Beweis. Wegen $0 \in K = \mathring{K}$ existiert ein $\rho > 0$ mit $B_{2\rho}(0) \subset K$. Es folgt $\rho\frac{x}{\|x\|} \in K$ für alle x. Somit $p(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\| < \infty$.

Es ist leicht zu zeigen, dass gilt es für $t > 0$:

$$\frac{x}{t} \in K \Leftrightarrow t > p(x).$$

Insbesondere $K = \{x : p(x) < 1\}$ und $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für $\lambda \geq 0$. Sind $\frac{x}{r}, \frac{y}{s} \in K$, so folgt aufgrund der Konvexität auch $\frac{x+y}{r+s} = \frac{r}{r+s}\frac{x}{r} + \frac{s}{r+s}\frac{y}{s} \in K$. Somit erhalten wir $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. □

Theorem 4.1.9 (Trennungssatz)**.** *Sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ offen und konvex. Sei $x_0 \in \complement K$. Dann zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varphi \in X^*$ mit*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \alpha \quad \textit{für } x \in K \quad \textit{und} \quad \operatorname{Re}\varphi(x_0) \geq \alpha.$$

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. oBdA $\alpha = 1$ und $0 \in K$ nach Translation. Sei p wie in Lemma 4.1.8. Definiere $f\colon \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ durch $f(\lambda x_0) := \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt $f(\lambda x_0) = \lambda \leq p(\lambda x_0)$ für $\lambda > 0$ (denn $\frac{\lambda x_0}{\lambda} = x_0 \notin K$) und $f(\lambda x_0) \leq 0 \leq p(\lambda x_0)$ für $\lambda \leq 0$. Somit gibt es nach Hahn-Banach eine lineare Fortsetzung $F\colon X \to \mathbb{R}$ von f mit $F \leq p$. Es gilt $F \leq p < 1$ in K. Daher ist F stetig. Weiterhin gilt $F(x_0) = f(x_0) = 1$.

Da es ein $\rho > 0$ mit $\overline{B_\rho(0)} \subset K$ gibt, erhalten wir $\frac{x}{\frac{1}{\rho}\|x\|} \in K$ für beliebiges $x \in X$, also $p(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$ und damit $F(x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$. Ebenso folgt $-F(x) = F(-x) \leq \frac{1}{\rho}\|x\|$. Somit ist F stetig und wir erhalten die Behauptung mit $\alpha = 1$ und $\varphi = F$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so fassen wir X als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf und erhalten ein $F_{\mathbb{R}} \in X_{\mathbb{R}}^*$ mit den gewünschten Eigenschaften. Wie beim Beweis des Satzes von Hahn-Banach erhält man die Aussage für $\varphi(x) = F(x) := F_{\mathbb{R}}(x) - iF_{\mathbb{R}}(ix)$. □

Theorem 4.1.10 (Trennungssatz für konvexe Mengen)**.** *Sei X ein normierter Raum, A und B konvex, A offen und $A \cap B = \emptyset$. Dann können A, B durch ein $\varphi \in X'$ getrennt werden, d.h.,*

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \operatorname{Re}\varphi(y), \quad \forall x \in A, y \in B.$$

Beweis. Setze

$$\begin{aligned} K &= \{x - y : x \in A, y \in B\} \\ &= \cup_{y \in B}\{x - y : x \in A\}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass K offen, konvex ist mit $0 \notin K$, da $A \cap B = \emptyset$. Dann wenden wir den obigem Satz 4.1.9 an und erhalten ein $\varphi \in X'$ mit $\operatorname{Re}\varphi(z) < 0$, für alle $z \in K$. Daraus folgt

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \operatorname{Re}\varphi(y), \quad \forall x \in A, y \in B.$$

□

5. Hilberträume

5.1. **Hilberträume.**

Definition 5.1.1. Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf H ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H\times H\to\mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle u,u\rangle\ge 0$ für alle $u\in H$; $\langle u,u\rangle=0$ gilt genau dann, wenn $u=0$ ist,
(ii) $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$ sowie $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$ für alle $u,v,w\in H$,
(iii) $\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$ für alle $u,v\in H$ und alle $\lambda\in\mathbb{C}$,
(iv) $\overline{\langle u,v\rangle}=\langle v,u\rangle$.

Einen $\mathbb{K}$-Vektorraum H mit einem Skalarprodukt nennen wir Skalarproduktraum oder Prähilbertraum.

Beispiele 5.1.2.

(i) Auf $H=\mathbb{K}^n$ mit $x=\left(x^i\right)_{1\le i\le n},y\in H$ ist
$$\langle x,y\rangle:=\sum_{i=1}^n x^i\overline{y^i}$$
ein Skalarprodukt.

(ii) Auf $H=L^2(\Omega)$ ist
$$\langle f,g\rangle=\int\limits_\Omega f\overline{g}$$
ein Skalarprodukt.

Beachte, dass das Integral aufgrund der Hölderschen Ungleichung wohldefiniert ist, es gilt nämlich
$$\left|\int\limits_\Omega f\overline{g}\right|\le\left(\int|f|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int|g|^2\right)^{1/2}.$$

(iii) Analog sieht man, dass $l^2(\mathbb{N})$ mit $\left\langle\left(x^i\right),\left(y^i\right)\right\rangle:=\sum\limits_{i=1}^\infty x^i\overline{y^i}$ ein Prähilbertraum ist.

Theorem 5.1.3. *Sei H ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|u\|:=\sqrt{\langle u,u\rangle}$ eine Norm auf H.*

Auf Skalarprodukträumen wollen wir stets diese Norm verwenden.

Beweis. Lineare Algebra. □

Theorem 5.1.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.**
Sei H ein Skalarproduktraum. Dann gilt $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$ für alle $u,v\in H$.

Beweis. Lineare Algebra. □

Definition 5.1.5. Ist ein Skalarproduktraum H mit der induzierten Norm/Metrik vollständig, so nennen wir H einen Hilbertraum.

Bemerkung 5.1.6. Sei H ein Skalarproduktraum und $\hat{H}$ die Vervollständigung als normierter Raum. Seien $H\ni u_n\to u\in\hat{H}$ sowie $H\ni v_n\to v\in\hat{H}$. Dann lässt sich das Skarprodukt auf genau eine Art und Weise stetig nach $\hat{H}$ fortsetzen, sodass $\hat{H}$ ein Hilbertraum wird, nämlich durch
$$\langle u,v\rangle_{\hat{V}}:=\lim_{n\to\infty}\langle u_n,v_n\rangle_V.$$