5. Hilberträume

5.1. Hilberträume.

Definition 5.1.1. Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf H ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H\times H\to\mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle u,u\rangle\ge 0$ für alle $u\in H$; $\langle u,u\rangle=0$ gilt genau dann, wenn $u=0$ ist,
(ii) $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$ sowie $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$ für alle $u,v,w\in H$,
(iii) $\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$ für alle $u,v\in H$ und alle $\lambda\in\mathbb{C}$,
(iv) $\overline{\langle u,v\rangle}=\langle v,u\rangle$.

Einen $\mathbb{K}$-Vektorraum H mit einem Skalarprodukt nennen wir Skalarproduktraum oder Prähilbertraum.

Beispiele 5.1.2.

(i) Auf $H=\mathbb{K}^n$ mit $x=\left(x^i\right)_{1\le i\le n}, y\in H$ ist
$$\langle x,y\rangle:=\sum_{i=1}^n x^i\overline{y^i}$$
ein Skalarprodukt.

(ii) Auf $H=L^2(\Omega)$ ist
$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega f\overline{g}$$
ein Skalarprodukt.

Beachte, dass das Integral aufgrund der Hölderschen Ungleichung wohldefiniert ist, es gilt nämlich
$$\left|\int_\Omega f\overline{g}\right|\le\left(\int|f|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int|g|^2\right)^{1/2}.$$

(iii) Analog sieht man, dass $l^2(\mathbb{N})$ mit $\left\langle\left(x^i\right),\left(y^i\right)\right\rangle:=\sum\limits_{i=1}^\infty x^i\overline{y^i}$ ein Prähilbertraum ist.

Theorem 5.1.3. *Sei H ein Skalarproduktraum. Dann definiert $\|u\|:=\sqrt{\langle u,u\rangle}$ eine Norm auf H.*

Auf Skalarprodukträumen wollen wir stets diese Norm verwenden.

Beweis. Lineare Algebra. □

Theorem 5.1.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.**
Sei H ein Skalarproduktraum. Dann gilt $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$ für alle $u,v\in H$.

Beweis. Lineare Algebra. □

Definition 5.1.5. Ist ein Skalarproduktraum H mit der induzierten Norm/Metrik vollständig, so nennen wir H einen Hilbertraum.

Bemerkung 5.1.6. Sei H ein Skalarproduktraum und $\hat{H}$ die Vervollständigung als normierter Raum. Seien $H\ni u_n\to u\in\hat{H}$ sowie $H\ni v_n\to v\in\hat{H}$. Dann lässt sich das Skarprodukt auf genau eine Art und Weise stetig nach $\hat{H}$ fortsetzen, sodass $\hat{H}$ ein Hilbertraum wird, nämlich durch
$$\langle u,v\rangle_{\hat{V}}:=\lim_{n\to\infty}\langle u_n,v_n\rangle_V.$$

Lemma 5.1.7 (Parallelogrammgleichung)**.** *Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

für alle $u, v \in H$.

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Lemma 5.1.8 (Polarisationsformel)**.** *Sei H ein Prähilbertraum. Dann gilt*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\|x+y\|^2 - \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2$$

für $\mathbb{R}$-Vektorräume und

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \equiv \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|x+i^k y\right\|^2$$

für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum und alle $x, y \in H$.

Mit der Polarisationsformel kann man aus der Norm eines Skalarproduktraumes das Skalarprodukt rekonstruieren.

Weiterhin folgt aufgrund der Stetigkeit der Norm, dass die Abbildung $H \times H \ni (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Beweis. Direktes Nachrechnen. Im komplexen Fall ergeben die Terme mit i gerade den Imaginärteil. □

Definition 5.1.9. Sei H ein Prähilbertraum.

(i) Zwei Vektoren $u, v \in H$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v\rangle = 0$ gilt. Wir schreiben $u \perp v$.
(ii) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Vektoren heißt orthonormal, falls $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$ gilt.
(iii) Zwei Unterräume $U_1, U_2 \subset H$ stehen orthogonal aufeinander, $U_1 \perp U_2$, falls $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$ gilt.
(iv) Sei $U \subset H$ beliebig. Dann ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ durch

$$U^\perp := \{v \in H \colon \langle u, v\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

definiert.

Lemma 5.1.10. *Sei H ein Hilbertraum, $M \subset H$ beliebig.*

(i) Dann ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H.
(ii) Es gilt $M^\perp = (\overline{M})^\perp = \langle M\rangle^\perp$. Auch mehrfaches Bilden der linaren Hülle oder Abschließen verändert das Ergebnis nicht mehr.
(iii) Es gilt $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Beweis.

(i) Sei $y \in H$. Definiere f durch $x \mapsto \langle x, y\rangle$. Da f stetig ist, ist $\{y\}^\perp = f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. Wegen $M^\perp := \bigcap\limits_{y\in M} \{y\}^\perp$ ist auch $M^\perp$ abgeschlossen.

Der Nachweis, dass $M^\perp$ ein Unterraum ist, ist einfach.

(ii) Aus $A \subset B$ folgt stets $A^\perp \supset B^\perp$. Also ist nur $M^\perp \subset \left(\overline{M}\right)^\perp$ und $M^\perp \subset \langle M\rangle^\perp$ zu zeigen.

(a) $M^\perp \subset \left(\overline{M}\right)^\perp$: Seien $x \in M^\perp$ und $y \in \overline{M}$. Dann ist $\langle x, y\rangle = 0$ zu zeigen. Zu y gibt es $y_n \in M$ mit $y_n \to y$. Da das Skalarprodukt stetig ist, folgt aus $0 = \langle x, y_n\rangle$ auch $0 = \langle x, y\rangle$.

(b) $M^\perp \subset \langle M\rangle^\perp$: Seien $x \in M^\perp$ und $y \in \langle M\rangle$. Dann gibt es endlich viele $m_i \in M$ und $\lambda^i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le N$, mit $y = \sum\limits_{i=1}^N \lambda^i m_i$. Es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^N \lambda_i \langle m_i, x\rangle = \langle y, x\rangle.$$

Die Inklusion folgt.

(iii) Sei $x \in M \cap M^\perp$. Dann folgt $0 = \langle x, x\rangle$, also $x = 0$. Offensichtlicherweise ist $0 \in M \cap M^\perp$. □

Proposition 5.1.11 (Pythagoras)**.** *Sei H ein Skalarproduktraum. Sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine orthonormale Familie in H. Sei $x \in H$. Dann gilt*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2.$$

Beweis. Schreibe

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i}_{=:u_1} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i}_{=:u_2}.$$

Dann gilt $u_1 \perp u_2$. Also folgt $\|x\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$ durch direktes Ausmultiplizieren. Aufgrund der Orthogonalität der $(x_i)_i$ erhalten wir weiterhin

$$\|u_1\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2.$$

Somit folgt die behauptete Gleichheit. □

Korollar 5.1.12 (Besselsche Ungleichung)**.**
Sei H ein Prähilbertraum und sei $(x_i)_{1\le i\le n}$ eine orthonormale Familie in H. Dann folgt

$$\|x\|^2 \ge \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i\rangle|^2$$

für alle $x \in H$.

Aufgrund der Monotonie der Summe und der gleichmäßigen oberen Schranke $\|x\|^2$ gilt die Ungleichung auch für beliebige, d. h. nicht notwendigerweise endliche, orthonormale Familien in H.

Definition 5.1.13.

(i) Seien H_1, H_2 Prähilberträume. Dann heißt $U \in L(H_1, H_2)$ Isometrie, falls

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in H_1$ gilt.

(ii) Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann heißt eine surjektive Isometrie Hilbertraumisomorphismus oder unitär. Gibt es einen Hilbertraumisomorphismus $U \in L(H_1, H_2)$, so heißen H_1 und H_2 isomorph.

Definition 5.1.14 (Direkte Summe)**.**

(i) Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann definieren wir die direkte Summe als den Vektorraum $H_1 \oplus H_2 := \left\{(x^1, x^2) : x^1 \in H_1,\, x^2 \in H_2\right\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle (x^1, x^2), (u^1, u^2)\right\rangle := \left\langle x^1, u^1\right\rangle + \left\langle x^2, u^2\right\rangle.$$

(ii) Seien $(H_i)_{i\in I}$ Hilberträume. Dann definieren wir

$$\bigoplus_{i\in I} H_i := \left\{ \left(x^i\right)_{i\in I} : \sum_{i\in I} \left\|x^i\right\|_{H_i}^2 < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \left(x^i\right), \left(y^i\right) \right\rangle := \sum_{i\in I} \left\langle x^i, y^i \right\rangle .$$

Bemerkung 5.1.15.

(i) Die direkte Summe von Hilberträumen ist wieder ein Hilbertraum. Bei der unendlichen direkten Summe geht man dabei analog zum Beweis für $l^2(\mathbb{N})$ vor um die Vollständigkeit nachzuweisen.

(ii) In der (Linearen) Algebra fordert man, dass nur in endlich vielen Komponenten ein von Null verschiedener Eintrag stehen darf. Hier bekommt man mit einer solchen Forderung i. a. keinen vollständigen Raum. Nach Definition können aber höchstens abzählbar viele Einträge von Null verschieden sein; sonst konvergiert die Summe nicht.

(iii) Den Nachweis, dass die unendliche Summe, mit der wir das Skalarprodukt definieren, existiert, führt man wie bei l^2 oder L^2.

(iv) Versieht man die l^2-Norm mit Gewichten, betrachtet also $\sum\limits_{i\in I} a_i\langle x_i, y_i\rangle$ für $a_i > 0$, so bekommt man i. a. nicht isomorphe Hilberträume.

5.2. **Projektion auf konvexe Teilmengen.**

Definition 5.2.1 (Konvexität)**.** Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt $K \subset V$ konvex, falls für alle $x, y \in K$ und alle $t \in [0,1]$ auch

$$tx + (1-t)y \in K$$

gilt.

Theorem 5.2.2 (Projektion auf konvexe Teilmengen)**.**
Sei H ein Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $y_0 \in H$. Dann gibt es ein nächstes Element $x_0 \in K$, d. h. ein $x_0 \in K$ mit $\|y_0 - x_0\| \le \|y_0 - x\|$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wir benutzen die sogenannte direkte Methode der Variationsrechnung. Ohne Einschränkung Sei $y_0 = 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge in K für die Funktion $K \ni x \mapsto \|x\|$, gelte also $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \inf\limits_{x\in K} \|x\| =: d$. Zunächst wollen wir nachweisen, dass x_n eine Cauchyfolge ist. Aufgrund der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\Bigg\| \underbrace{\frac{x_n + x_m}{2}}_{\in K} \Bigg\|^2 \\ &\le 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2 \to 0 \end{aligned}$$

für $\min\{m, n\} \to \infty$. Da K als abgeschlossene Teilmenge von H vollständig ist, existiert $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ in K. Da die Norm auf H stetig ist, folgt $\|x_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = d$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $\hat{x}_0 \in K$ ein weiteres nächstes Element. Da wir gezeigt haben, dass jede Minimalfolge eine Cauchyfolge ist, gilt dies auch für die Folge

$$z_n := \begin{cases} x_0 & \text{für gerades n,} \\ \hat{x}_0 & \text{für ungerades n.} \end{cases}$$

Somit folgt $x_0 = \hat{x}_0$. □

Lemma 5.2.3. *Sei H ein Hilbertraum und sei $K \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $\pi\colon H \to K$ die Abbildung, die $x \in H$ den Punkt $p \in K$ mit $\|x-p\| = \inf\limits_{q\in K} \|x-q\|$ zuordnet. Dann ist π stetig.*

Beweis. Sei $x \in H$. Setze $d(x) := d(x,K) = \inf\limits_{y\in K} \|x-y\| = \|x-\pi(x)\|$. Dann ist d stetig: Es gilt nämlich für $x,y \in H$ zunächst $d(y) = \|y-\pi(y)\| \le \|y-\pi(x)\|$ und damit folgt

$$d(y)-d(x) \le \|y-\pi(x)\| - \|x-\pi(x)\| \le \|(y-\pi(x))-(x-\pi(x))\| = \|x-y\|.$$

Aus Symmetriegründen folgt die Stetigkeit.

Angenommen, π ist nicht stetig. Dann gibt es zu K einen Punkt, ohne Einschränkung nach Verschiebung der Situation den Nullpunkt, ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $x_n \to 0$ mit $\|\pi(x_n)-\pi(0)\| > \varepsilon$. Nehme an, dass $\|0-\pi(0)\| = r > 0$ ist; sonst folgt $0 \in K$, $\pi(0) = 0$, $d(0) = 0$ und damit $d(x_n) \to 0$ für $x_n \to 0$, also auch $\pi(x_n) \to 0$.

Die Idee ist nun, auszunutzen, dass $\pi(0)$ und $\pi(x_n)$ beinahe auf einer Sphäre mit Radius r liegen, aber ihr Mittelpunkt, der aufgrund der Konvexität ebenfalls in K liegt, näher liegt, woraus wir einen Widerspruch erhalten.

Da $x \mapsto \|x-\pi(x)\|$ stetig ist, folgt $\|x_n - \pi(x_n)\| \to r$ für $n \to \infty$. Wir erhalten also mit der Parallelogrammgleichung

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2.$$

Wir wenden dies mit $x = \pi(0)$ und $y = \pi(x_n)$ an und erhalten wegen $\frac{\pi(0)+\pi(x_n)}{2} \in K$

$$\begin{aligned}
r^2 = d(0)^2 &\le \left\|0 - \frac{\pi(0)+\pi(x_n)}{2}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\pi(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|\pi(x_n)\|^2 - \frac{1}{4}\|\pi(0)-\pi(x_n)\|^2 \\
&\le \frac{1}{2}d(0)^2 + \frac{1}{2}\left(\|\pi(x_n)-x_n\| + \|x_n\|\right)^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \\
&= \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\|\pi(x_n)-x_n\|^2}_{=d(x_n)^2\to r^2} + \underbrace{\|x_n\|}_{\to 0}\cdot\underbrace{\|\pi(x_n)-x_n\|}_{\to r} + \frac{1}{2}\underbrace{\|x_n\|^2}_{\to 0} - \frac{1}{4}\varepsilon^2 \\
&\to r^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Widerspruch. □

Zu Theorem 5.2.2 erhalten wir

Korollar 5.2.4. *Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann können wir jeden Vektor $z \in H$ eindeutig als $z = x + y$ mit $x \in M$ und $y \in M^\perp$ schreiben, d. h. es gilt $H = M \oplus M^\perp$.*

Aus der Konstruktion und Lemma 5.2.3 erhalten wir, dass (x,y) stetig von z abhängt.

Im nachfolgenden Beweis und gegebenenfalls später notieren wir manchmal nur den Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn sich der Fall für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ leicht aus dem Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ablesen lässt.

Beweis. Sei $z \in H$. Sei $x \in M$ der Punkt in M mit minimalem Abstand zu z. Solch ein x existiert nach Theorem 5.2.2. Setze $y := z - x$.

Wir behaupten, dass $y \in M^\perp$ ist. Nach Definition von x folgt

$$\|z-x\|^2 \le \|z-x+\lambda u\|^2 = \|z-x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle u, z-x\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $u \in M$. Aus $0 \le \operatorname{Re}(\lambda\langle u, z-x\rangle) + |\lambda|^2\|u\|^2$ folgt für reelle λ, dass $0 = \operatorname{Re}(\langle u, z-x\rangle)$ und für $\lambda = -it$, $t \in \mathbb{R}$, dass $0 = \operatorname{Im}(\langle u, z-x\rangle)$ gilt. Also ist $y \in M^\perp$.

Zur Eindeutigkeit: Gelte $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ mit $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in M^\perp$. Dann folgt $M \ni x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in M^\perp$. Wegen $M \cap M^\perp = \{0\}$ erhalten wir hieraus $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. □

Theorem 5.2.5 (Riesz)**.** *Sei X ein Hilbertraum und $T \in X^*$. Dann existiert genau ein $x_T \in X$ mit*

$$Tx = \langle x, x_T\rangle \quad \text{für alle } x \in X.$$

Es gilt $\|T\| = \|x_T\|$. Die Abbildung $I\colon X^* \to X$ mit $T \mapsto x_T$ ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d. h. bis auf komplexes Konjugieren von Skalaren linear).

Beweis.

(i) Konstruktion von x_T: $M := N(T) = T^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen. Also ist $X = M \oplus M^\perp$ nach Theorem 5.2.4. Im Falle $M = X$ setzen wir $x_T := 0$. Gelte daher ab jetzt $M \neq X$. Wähle $y \in M^\perp \setminus \{0\}$. Dann folgt $Ty \neq 0$. Definiere $x_T := \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot y$. Wir erhalten $\|x_T\| = \frac{|Ty|}{\|y\|} \neq 0$ und damit $Tx_T = \frac{\overline{Ty}}{\|y\|^2} \cdot Ty = \|x_T\|^2 \neq 0$.

Behauptung: Es gilt $Tx = \langle x, x_T\rangle$ für alle $x \in X$. Wir schreiben

$$x = \frac{Tx}{Tx_T} x_T + \left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T\right) =: x_\perp + x_M.$$

Die Notation legt nahe, dass $x_\perp \in M^\perp$ und $x_M \in M$ gelten. Die erste Behauptung ist klar, die zweite folgt aus

$$Tx_M = T\left(x - \frac{Tx}{Tx_T} x_T\right) = Tx - \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = 0$$

nach Definition von M. Wir erhalten aus den obigen Rechnungen

$$\langle x, x_T\rangle = \langle x_\perp + x_M, x_T\rangle = \frac{Tx}{Tx_T}\|x_T\|^2 + 0 = \frac{Tx}{Tx_T} Tx_T = Tx.$$

(ii) $I\colon T \mapsto x_T$ ist eine Isometrie: Es gilt $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |Tx| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} |\langle x, x_T\rangle| \le \|x_T\|$ sowie $\|T\| \ge \left|T\left(\frac{x_T}{\|x_T\|}\right)\right| = \|x_T\|$ aufgrund der obigen Rechnungen.

(iii) x_T ist eindeutig bestimmt: Für ein weiteres $\tilde{x}_T$ mit $Tx = \langle x, x_T\rangle = \langle x, \tilde{x}_T\rangle$ für alle x folgt $0 = \langle x, x_T - \tilde{x}_T\rangle$ für alle x; wir wählen $x = x_T - \tilde{x}_T$ und erhalten $x_T = \tilde{x}_T$.

(iv) I ist konjugiert linear: Für $T = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ erhalten wir

$$Tx = \lambda_1 T_1 x + \lambda_2 T_2 x = \lambda_1\langle x, x_{T_1}\rangle + \lambda_2\langle x, x_{T_2}\rangle = \left\langle x, \overline{\lambda_1} x_{T_1} + \overline{\lambda_2} x_{T_2}\right\rangle$$

und daher $IT = x_T = \overline{\lambda_1} x_{T_1} + \overline{\lambda_2} x_{T_2} = \overline{\lambda_1} IT_1 + \overline{\lambda_2} IT_2$.

(v) I ist surjektiv: Zu $y \in X$ ist durch $Tx := \langle x, y\rangle$ ein lineares Funktional mit $IT = y$ definiert.

(vi) I ist injektiv, da $\|T\| = \|x_T\|$ gilt. □

6. Der Bairesche Kategoriesatz

6.1. **Der Bairesche Kategoriesatz und Anwendungen.**

Definition 6.1.1. Sei E ein metrischer Raum.

(i) Eine Menge $A \subset E$ heißt nirgends dicht, falls $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ gilt.

(ii) Eine Menge $A \subset E$, die sich als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen schreiben läßt, heißt von erster Kategorie oder mager.

(iii) Eine Menge $A \subset E$, die nicht von erster Kategorie ist, heißt von zweiter Kategorie oder fett.

Beispiele 6.1.2.
(i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist von erster Kategorie.
(ii) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ ist aufgrund des (nachfolgend bewiesenen) Baireschen Kategoriesatzes von zweiter Kategorie, denn sonst wäre $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ als abzählbare Vereinigung von mageren Mengen darstellbar.

Theorem 6.1.3 (Bairescher Kategoriesatz)**.** *Sei E ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset E$ mager. Dann ist $E \setminus A$ dicht in E. Insbesondere ist E eine Menge zweiter Kategorie.*

Beweis.
(i) Da A eine Menge erster Kategorie ist, gibt es Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ mit
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{mit} \quad \mathring{\overline{A}}_n = \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass alle Mengen A_n abgeschlossen sind, sonst ersetzen wir sie durch $\overline{A_n}$. Definiere $G_n := E \setminus A_n \equiv \complement A_n$. Dann sind die Mengen G_n offen. Setze
$$G := \complement A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \complement A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n.$$
Sei nun $\emptyset \neq \Omega \subset E$ offen. Wir behaupten, dass $G \cap \Omega \neq \emptyset$ gilt.
(ii) Wir konstruieren eine Folge von offenen Kugeln B_n mit $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \subset \overline{B_n} \subset \Omega \cap G_n$ für alle n mit $\operatorname{diam} B_n \to 0$. Aus der Vollständigkeit von E folgt dann
$$\emptyset \neq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_k} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega \cap G_n \subset \Omega \cap G.$$
Hieraus erhalten wir den Baireschen Kategoriesatz.
(iii) Konstruktion der Kugeln B_n: Da jede der Mengen A_n abgeschlossen und nirgends dicht ist, ist der Schnitt einer beliebigen offenen Menge mit G_n offen und nicht leer.

Somit gibt es zur offenen Menge Ω eine Kugel B_0 mit $\operatorname{diam} B_0 < 1/0 = \infty$ und $\overline{B_0} \subset \Omega \cap G_0$. Zu B_0 gibt es eine Kugel B_1 mit $\operatorname{diam}(B_1) < 1/1$ und $\overline{B_1} \subset B_0 \cap G_1$. … Zu B_i gibt es eine Kugel B_{i+1} mit $\operatorname{diam}(B_{i+1}) < \frac{1}{i+1}$ und $\overline{B_{i+1}} \subset B_i \cap G_{i+1}$. … Somit sind die oben verwendeten Kugeln konstruiert. □

Korollar 6.1.4. *Sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der Durchschnitt einer abzählbaren Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von dichten offenen Teilmengen von E wieder dicht in E.*

Beweis. Falls nicht, so gibt es $r > 0$ und $x \in E$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \complement \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Die Mengen $C_n := \complement A_n \cap \overline{B_r(x)}$ sind abgeschlossen und erfüllen $\mathring{C}_n = \emptyset$. Aus $\overline{B_r(x)} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$ erhalten wir einen Widerspruch zum Baireschen Kategoriesatz. □

Die Bezeichnungen „Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit" und „Satz von Banach-Steinhaus" sind in der Literatur nicht klar getrennt.

Theorem 6.1.5 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie in $L(E, F)$, die punktweise beschränkt ist, d. h. es gibt für alle $x \in E$ ein $c(x) > 0$ mit*
$$\sup_{i \in I} \|A_i x\| \leq c(x).$$