6. Der Bairesche Kategoriesatz

6.1. Der Bairesche Kategoriesatz und Anwendungen.

Definition 6.1.1. Sei E ein metrischer Raum.

(i) Eine Menge $A \subset E$ heißt *nirgends dicht*, falls $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ gilt.
(ii) Eine Menge $A \subset E$, die sich als abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen schreiben läßt, heißt von *erster Kategorie* oder *mager*.
(iii) Eine Menge $A \subset E$, die nicht von erster Kategorie ist, heißt von *zweiter Kategorie* oder *fett*.

Beispiele 6.1.2.
(i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist von erster Kategorie.
(ii) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ ist aufgrund des (nachfolgend bewiesenen) Baireschen Kategoriesatzes von zweiter Kategorie, denn sonst wäre $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ als abzählbare Vereinigung von mageren Mengen darstellbar.

Theorem 6.1.3 (Bairescher Kategoriesatz)**.** *Sei E ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset E$ mager. Dann ist $E \setminus A$ dicht in E. Insbesondere ist E eine Menge zweiter Kategorie.*

Beweis.
(i) Da A eine Menge erster Kategorie ist, gibt es Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$ mit
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{mit} \quad \overset{\circ}{\overline{A}}_n = \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass alle Mengen A_n abgeschlossen sind, sonst ersetzen wir sie durch $\overline{A_n}$. Definiere $G_n := E \setminus A_n \equiv \complement A_n$. Dann sind die Mengen G_n offen. Setze
$$G := \complement A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \complement A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$
Sei nun $\emptyset \neq \Omega \subset E$ offen. Wir behaupten, dass $G \cap \Omega \neq \emptyset$ gilt.
(ii) Wir konstruieren eine Folge von offenen Kugeln B_n mit $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \subset \overline{B_n} \subset \Omega \cap G_n$ für alle n mit $\operatorname{diam} B_n \to 0$. Aus der Vollständigkeit von E folgt dann
$$\emptyset \neq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B_k} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega \cap G_n \subset \Omega \cap G.$$
Hieraus erhalten wir den Baireschen Kategoriesatz.
(iii) Konstruktion der Kugeln B_n: Da jede der Mengen A_n abgeschlossen und nirgends dicht ist, ist der Schnitt einer beliebigen offenen Menge mit G_n offen und nicht leer.

Somit gibt es zur offenen Menge Ω eine Kugel B_0 mit $\operatorname{diam} B_0 < 1/0 = \infty$ und $\overline{B_0} \subset \Omega \cap G_0$. Zu B_0 gibt es eine Kugel B_1 mit $\operatorname{diam}(B_1) < 1/1$ und $\overline{B_1} \subset B_0 \cap G_1$. … Zu B_i gibt es eine Kugel B_{i+1} mit $\operatorname{diam}(B_{i+1}) < \frac{1}{i+1}$ und $\overline{B_{i+1}} \subset B_i \cap G_{i+1}$. … Somit sind die oben verwendeten Kugeln konstruiert. □

Der Beweis impliziert

Korollar 6.1.4. *Sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist der Durchschnitt einer abzählbaren Familie $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von dichten offenen Teilmengen von E wieder dicht in E.*

Beweis. Das Korollar folgt natürlich auch aus dem Satz: Falls nicht, so gibt es $r > 0$ und $x \in E$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \complement \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Die Mengen $C_n := \complement G_n \cap \overline{B_r(x)}$ sind abgeschlossen und erfüllen $\mathring{C}_n = \emptyset$. Aus $\overline{B_r(x)} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ erhalten wir einen Widerspruch zum Baireschen Kategoriesatz. □

Die Bezeichnungen „Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit" und „Satz von Banach-Steinhaus" sind in der Literatur nicht klar getrennt.

Theorem 6.1.5 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie in $L(E,F)$, die punktweise beschränkt ist, d. h. es gibt für alle $x \in E$ ein $c(x) > 0$ mit*

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\| \le c(x).$$

Dann ist die Familie gleichmäßig beschränkt, d. h. es gibt ein $C > 0$ mit

$$\sup_{i\in I} \|A_i\| \le C.$$

Beweis. Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$W_n := \left\{x \in E\colon \sup_{i\in I} \|A_i x\| \le n\right\} = \bigcap_{i\in I} \underbrace{\{x \in E\colon \|A_i x\| \le n\}}_{=\text{ abgeschlossen}}.$$

W_n ist als Schnitt von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen. Nach Voraussetzung gilt $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Nach dem Baireschen Kategoriesatz gibt es somit ein W_n mit $\mathring{W}_n \ne \emptyset$. Also gibt es $x_0 \in E$ und $\rho > 0$ mit $B_\rho(x_0) \subset W_n$ und

$$\sup_{i\in I} \sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|A_i x\| \le n.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $i \in I$

$$n \ge \sup_{x\in B_\rho(x_0)} \|A_i x\| = \sup_{y\in B_\rho(0)} \|A_i(y + x_0)\| \ge \underbrace{\sup_{y\in B_\rho(0)} \|A_i y\|}_{=\rho\|A_i\|} - \underbrace{\|A_i x_0\|}_{\le c(x_0)}.$$

Umordnen liefert die behauptete in $i \in I$ gleichmäßige Schranke für $\|A_i\|$. □

Als direkte Folgerung erhalten wir

Theorem 6.1.6 (Banach-Steinhaus)**.** *Sei E ein Banachraum und F ein normierter Raum. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen $A_i \in L(E,F)$, die punktweise beschränkt ist. Dann ist $(A_i)_{i\in I}$ gleichmäßig stetig (d. h. δ in der üblichen Definition von Stetigkeit hängt nur von ε und x_0 ab). (Aufgrund der Linearität ist die Familie sogar gleichmäßig gleichgradig stetig, d. h. δ hängt auch nicht mehr von x_0 ab.)*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $i \in I$ und alle $x, y \in E$ mit $\|x - y\| < \delta$ auch $\|A_i x - A_i y\| < \varepsilon$ gilt. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es ein $c > 0$ mit $\|A_i\| \le c$ für alle i. Aus $\|A_i x - A_i y\| = \|A_i(x - y)\| \le \|A_i\| \cdot \|x - y\| \le c \cdot \|x - y\|$ sehen wir, dass die Behauptung folgt, wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$ wählen. □

Eine weitere Folgerung ist

Proposition 6.1.7. *Sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(E,F)$. Sei $A\colon E \to F$ eine Abbildung. Nehme an, dass $A_n x \to Ax$ für $n \to \infty$ gilt. (Die A_n's konvergieren also punktweise gegen A.) Dann ist $A \in L(E,F)$ und es gilt*

$$\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| < \infty.$$

Beweis. Es ist einfach zu sehen, dass A wieder eine lineare Abbildung ist. Wir benutzen die punktweise Konvergenz, die punktweise Beschränktheit impliziert und den Satz über die gleichmäßige Beschränktheit und erhalten

$$\liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty.$$

Weiterhin gilt

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| = \liminf_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|x\|.$$

Hieraus folgt $\|A\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$. ☐

Theorem 6.1.8 (Satz von der offenen Abbildung). *Seien E, F Banachräume. Dann ist jede surjektive Abbildung $A \in L(E,F)$ offen.*

Elementar einzusehen ist, dass jede offene Abbildung $A \in L(E,F)$ auch surjektiv ist.

Beweis.

(i) Wir bezeichnen Kugeln in E mit $B_r^E(x)$, Kugeln in F mit $B_r^F(y)$. Zunächst wollen wir zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r > 0$ mit $B_r^F(0) \subset \overline{A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)}$ gibt: Fixiere $\varepsilon > 0$. Dann gilt $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} nB_\varepsilon^E(0)$. Da A surjektiv ist, gilt

$$F = A(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA\left(B_\varepsilon^E(0)\right).$$

Da F ein Banachraum ist, ist F ein Raum zweiter Kategorie. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\overset{\circ}{\overline{n_0 A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} = n_0 \overset{\circ}{\overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} \neq \emptyset$. Also gilt auch $\overset{\circ}{\overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}} \neq \emptyset$. Es gibt also $x_0 \in B_\varepsilon^E(0)$ und $r > 0$ mit $B_r^F(0) + Ax_0 \equiv B_r^F(Ax_0) \subset \overline{A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)}$. Es folgt aufgrund der Dreiecksungleichung

$$B_r^F(0) = B_r^F(Ax_0) - \underbrace{Ax_0}_{\in A(B_\varepsilon^E(0))} \subset \overline{A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)}.$$

Bis auf die Tatsache, dass auf der rechten Seite der Abschluss von $A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)$ und nicht $A\left(B_{2\varepsilon}^E(0)\right)$ selbst steht, zeigt dies die Behauptung.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon_i := \frac{\varepsilon}{2^i}$ für $i \in \mathbb{N}^+$. Dann gibt es nach Teil (i) eine Folge $r_i > 0$ mit $B_{r_i}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_i}^E(0)\right)}$. Ohne Einschränkung können wir r_i als (monotone) Nullfolge wählen. Wir behaupten, dass $B_{r_1}^F(0) \subset A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)$ gilt:

Sei $y \in B_{r_1}^F(0)$. Wegen $y \in B_{r_1}^F(0)$ und $B_{r_1}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_1}^E(0)\right)}$ gibt es ein $x_1 \in B_{\varepsilon_1}^E(0)$ mit $\|y - Ax_1\| < r_2$ (statt r_2 könnte man dies auch mit jeder anderen positiven Zahl erreichen). Nun ist $y - Ax_1 \in B_{r_2}^F(0)$ und $B_{r_2}^F(0) \subset \overline{A\left(B_{\varepsilon_2}^E(0)\right)}$. Somit gibt es $x_2 \in B_{\varepsilon_2}^E(0)$ mit $\|y - Ax_1 - Ax_2\| < r_3$. Iterativ finden wir x_i's mit

$$\left\| y - A\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\right\| < r_{n+1}$$

für $n \ge 1$. Wegen $\|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$ ist die Reihe $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} x_i =: x$ absolut konvergent und es gilt $\|x\| < \varepsilon$. Außerdem gilt $y = Ax$. Die Behauptung folgt.

(iii) Sei $\emptyset \neq \Omega \subset E$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon^E(x_0) \subset \Omega$ gilt. Wir haben gezeigt, dass es $r > 0$ mit $B_r^F(0) \subset A\left(B_\varepsilon^E(0)\right)$ gibt. Somit erhalten wir

$$B_r^F(Ax_0) = Ax_0 + B_r^F(0) \subset Ax_0 + A\left(B_\varepsilon^E(0)\right) = A\left(B_\varepsilon^E(x_0)\right) \subset A(\Omega).$$

Die Behauptung folgt, da Ax_0 ein beliebiger Punkt in $A(\Omega)$ ist. ☐

Korollar 6.1.9 (Satz von der inversen Abbildung)**.** *Seien E, F Banachräume. Sei $A \in L(E, F)$ bijektiv. Dann ist A ein Homöomorphismus.*

Zu Korollar 6.1.9 erhalten wir

Korollar 6.1.10. *Seien $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ und $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume mit*

$$\|x\|_1 \le c\|x\|_2$$

für alle $x \in X$ und ein $c > 0$. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent, d. h. es gibt $C > 0$ mit $\frac{1}{C}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C\|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $X_2 \ni x \mapsto x \in X_1$ stetig. Die Behauptung folgt also aus Korollar 6.1.9. □

Lemma 6.1.11. *Sei X ein Banachraum, sei Y ein normierter Raum und sei $T\colon X \to Y$ ein Isomorphismus normierter Räume, d. h. T ist linear, bijektiv und die Operatoren T und T^{-1} sind stetig. Dann ist auch Y ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Dann ist aufgrund der Stetigkeit auch $(T^{-1}y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Also gibt es $x \in X$ mit $T^{-1}y_n \to x$. Nochmals aufgrund der Stetigkeit folgt $y_n \to Tx \in Y$. Somit ist Y ein Banachraum. □

Theorem 6.1.12 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien E, F Banachräume. Sei $A\colon E \to F$ linear. Dann ist A genau dann stetig, wenn* $\operatorname{graph} A := \{(x, Ax) \mid x \in E\} \subset E \times F$ *abgeschlossen ist.*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\operatorname{graph} A$. Es gilt $y_n = Ax_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine Cauchyfolge. Da E ein Banachraum ist, gibt es ein $x \in E$ mit $x_n \to x$. Da A stetig ist, folgt $y_n = Ax_n \to Ax$. Somit folgt $(x_n, y_n) \to (x, Ax) \in \operatorname{graph} A$ und $\operatorname{graph} A$ ist abgeschlossen.

„$\Longleftarrow$“: $G := \operatorname{graph} A \equiv G(A) \subset E \oplus F$ ist ein linearer Teilraum. Da G abgeschlossen ist, ist G mit der von $E \oplus F$ induzierten Norm ein Banachraum. Seien $\pi_E\colon E \times F \to E$ und $\pi_F\colon E \times F \to F$ die (stetigen) Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. Die Einschränkung $\pi_E|_G\colon G \to E$ ist linear und stetig. $\pi_E|_G$ ist die Abbildung $(x, Ax) \mapsto x$. Daher ist $\pi_E|_G$ bijektiv und somit nach Korollar 6.1.9 ein Homöomorphismus. Daher ist $A = \pi_F \circ (\pi_E|_G)^{-1}$ stetig. □

Theorem 6.1.13 (Satz von Hellinger-Toeplitz)**.** *Sei X ein Hilbertraum und*

$$T\colon X \to X$$

ein linearer Operator. Gelte

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

für alle $x, y \in X$. Dann ist T stetig.

Derselbe Beweis funktioniert auch, wenn auf der rechten Seite ein Operator $S\colon X \to X$ steht.

Beweis. Wir weisen nach dass $G(T) \subset X \oplus X$ abgeschlossen ist. Dann folgt die Stetigkeit aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Gelte $G(T) \ni (x_n, Tx_n) \to (x, y)$. Zeige, dass $(x, y) \in G(T)$ ist. Sei $z \in X$ beliebig. Dann folgt, da das Skalarprodukt stetig ist,

$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, z\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, z\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, Tz\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tz\right\rangle \\ &= \langle x, Tz\rangle = \langle Tx, z\rangle.\end{aligned}$$

Aus $\langle Tx - y, z\rangle = 0$ für alle $z \in X$ folgt mit $z = Tx - y$ dass $Tx = y$ gilt. □

6.2. **Dicht definierte Operatoren.** Dieser Abschnitte werde nicht in der Vorlesung diskutiert.

Bemerkung 6.2.1. Sei $X := C^0([0, 2\pi])$. Definiere auf $C^1([0, 2\pi]) \equiv D(\partial) \subset X$ den Ableitungsoperator $\partial \colon D(\partial) \to X$. Wegen $\|\partial(x \mapsto 1/n \sin(nx))\|_{C^0} = 1$ ist $\partial \colon D(\partial) \to X$ nicht stetig. Daher betrachtet man in der Funktionalanalysis auch Operatoren, die nicht auf dem gesamten Banachraum, sondern lediglich auf einer dichten Teilmenge definiert sind.

Wir schreiben $D(T)$ für den Unterraum, auf dem ein linearer Operator T definiert ist.

Definition 6.2.2. Seien X, Y normierte Räume, $D(T) \subset X$ ein linearer Teilraum und $T \colon D(T) \to Y$ linear.

(i) Dann heißt $G(T) := \{(x, Tx) \colon x \in D(T)\}$ der Graph von T.
(ii) T heißt abgeschlossen, falls $G(T) \subset X \oplus Y$ abgeschlossen ist.

Lemma 6.2.3. *Seien X, Y Banachräume.*

(i) Sei $T \colon D(T) \to Y$ ein (auf einem linearen Teilraum $D(T)$ definierter) linearer Operator. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn für alle Folgen $x_n \in D(T)$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ für ein $y \in Y$ folgt, dass $x \in D(T)$ und $Tx = y$ gelten.
(ii) Sei $T \in L(X, Y)$. Dann ist T abgeschlossen.

Beweis.
(i) Klar.
(ii) Sei $x_n \to x$ eine Folge mit $Tx_n \to y$. Dann gilt $Tx_n \to Tx$ aufgrund der Stetigkeit, also $Tx = y$. Somit ist T nach (i) abgeschlossen. □

Lemma 6.2.4. *Seien X, Y Banachräume und $T \colon D(T) \to Y$ ein auf einem linearen Teilraum $D(T) \subset X$ definierter linearer Operator. Dann definiert*

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

auf $D(T)$ eine Norm, die Graphennorm. Der Raum $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn der Operator T abgeschlossen ist.

Beweis.
„$\Longleftarrow$“: Sei T abgeschlossen. Sei $x_n \in D(T)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_T$. Dann sind x_n und Tx_n Cauchyfolgen in X bzw. Y, es gibt also – da X und Y Banachräume sind – $x \in X$ und $y \in Y$ mit $x_n \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_X$ und $Tx_n \to y$ bezüglich $\|\cdot\|_Y$. Nach Lemma 6.2.3 erhalten wir $x \in D(T)$ und $Tx = y$. Somit folgt $x_n \to x$ bezüglich $\|\cdot\|_T$, $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ist also ein Banachraum.

„$\Longrightarrow$“: Sei $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum. Sei (x_n, Tx_n) eine konvergent Folge in $X \times Y$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$. Wir sollen zeigen, dass $y = Tx$.

Aus der Voraussetzung ist (x_n, Tx_n) eine Cauchyfolge in $G(T)$. Wegen $\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_X + \|Tx_n - Tx_m\|_Y$ ist x_n eine Cauchyfolge in $(D(T), \|\cdot\|_T)$, besitzt also einen Grenzwert $x \in D(T)$ mit $\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - Tx\|_Y \to 0$ für $n \to \infty$. Somit gilt $y = Tx$, $G(T)$ ist also abgeschlossen. □

Lemma 6.2.5. *Seien X, Y Banachräume, $D(T) \subset X$ ein Unterraum und der lineare Operator $T \colon D(T) \to Y$ sei abgeschlossen. Dann sind die Aussagen*

(i) es gibt ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \ge c\|x\|$ für alle $x \in D(T)$ und
(ii) T ist injektiv und $R(T) = \operatorname{im}(T)$ ist abgeschlossen

äquivalent.

Beweis.
„(i)$\Longrightarrow$(ii)“: Wir benutzen die Graphennorm $\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ für $x \in X$.

Der Operator $\tilde{T}\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ mit $\tilde{T}x := Tx$ ist nach Definition surjektiv und nach (i) injektiv. Es gilt $\|Tx\|_Y \le \|x\|_X + \|Tx\|_Y \equiv \|x\|_T$ für alle $x \in D(T)$. Somit ist $\tilde{T}$ stetig mit Operatornorm $\left\|\tilde{T}\right\| \le 1$. $\tilde{T}^{-1}$ existiert und ist nach (i) wegen $2\|Tx\|_Y \ge c\|x\|_X + \|Tx\|_Y \ge \min\{c, 1\}\cdot\|x\|_T$ stetig. Somit ist $\tilde{T}\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (R(T), \|\cdot\|_Y)$ ein Isomorphismus normierter Räume. Nach Lemma 6.2.4 ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum, da T nach Voraussetzung abgeschlossen ist. Nach Lemma 6.1.11 ist also auch $(R(T), \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum und damit insbesondere als Teilmenge von Y abgeschlossen.

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Folgt direkt aus Theorem 6.2.6 (ii), angewandt auf $\hat{T}\colon D(T) \to R(T)$ mit $\hat{T}x := Tx$. ☐

Theorem 6.2.6 (Stetigkeit der Inversen)**.** *Seien X, Y Banachräume, $D(T) \subset X$ ein linearer Teilraum. Sei $T\colon D(T) \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator.*

(i) Sei T surjektiv. Dann ist T eine offene Abbildung.
(ii) Ist T bijektiv, so ist $T^{-1}\colon Y \to D(T)$ stetig.

Beweis.

(i) Da T abgeschlossen ist, ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ nach Lemma 6.2.4 ein Banachraum. Wegen $\|Tx\|_Y \le \|Tx\|_Y + \|x\|_X \equiv \|x\|_T$ ist $\tilde{T}\colon (D(T), \|\cdot\|_T) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $\tilde{T}x := Tx$ stetig mit Operatornorm ≤ 1.

Sei nun $U \subset D(T)$ bezüglich $\|\cdot\|_X$ offen. Da $\|\cdot\|_T$ auf $D(T)$ eine feinere Topologie als $\|\cdot\|_X$ erzeugt, ist $U \subset D(T)$ auch bezüglich $\|\cdot\|_T$ offen. Somit ist $\tilde{T}U = TU \subset Y$ nach dem Satz von der offenen Abbildung, Theorem 6.1.8, offen.

(ii) Die Offenheit impliziert gerade, dass T^{-1} stetig ist. ☐

Theorem 6.2.7 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien E, F Banachräume. Sei $A\colon E \to F$ linear. Dann ist A genau dann stetig, wenn* $\operatorname{graph} A \subset E \times F$ *abgeschlossen ist.*

Theorem 6.2.8 (Satz von Hellinger-Toeplitz)**.** *Sei X ein Hilbertraum und*

$$T\colon X \to X$$

ein linearer Operator. Gelte

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

für alle $x, y \in X$. Dann ist T stetig.