7. Schwache Konvergenz und Reflexivität

7.1. Schwache Konvergenz.

Definition 7.1.1. Sei E ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E *konvergiert schwach* gegen $x \in E$, $x_n \rightharpoonup x$, falls für alle $\varphi \in E^*$

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x)$$

für $n \to \infty$ gilt.

Bemerkung 7.1.2.

(i) In topologischen Räumen sagt man, dass x_n gegen x konvergiert, $x_n \to x$, falls jede Umgebung von x fast alle Elemente x_n enthält.

(ii) Die stetigen Funktionale $f \in L(X, \mathbb{K})$ erzeugen nach Definition 7.1.3 eine Topologie auf X, die schwache Topologie. Konvergenz $x_n \to x$ bezüglich der schwachen Topologie ist äquivalent zu $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Auf X^* können wir ebenfalls eine schwache Topologie einführen. Dann gilt $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ in X^*, falls $f(\varphi_n) \to f(\varphi)$ für alle $f \in X^{**}$ gilt.

(iv) Auf X^* gibt es auch die schwach*-Topologie: Es gilt $\varphi_n \to \varphi$ schwach*, falls $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

(v) Um Missverständnissen vorzubeugen, werden wir die übliche Konvergenz, d. h. $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$, auch als *starke Konvergenz* oder *Normkonvergenz bezeichnen.*

(vi) Wie bei starker Konvergenz definiert man *schwache* und *schwach* Cauchyfolgen* sowie *schwache* und *schwach* Folgenkompaktheit.*

(vii) In endlichdimensionalen Vektorräumen sind schwache und starke Konvergenz äquivalent.

(viii) In $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ konvergiert $e_n \rightharpoonup 0$, aber $e_n \not\to 0$ für $n \to \infty$.

Definition 7.1.3. Sei $F = \{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ eine Familie von Abbildungen von X in topologische Räume $(Y_i, \mathcal{O}_i)$. Dann heißt die gröbste Topologie auf X, so dass alle Abbildungen f_i, $i \in I$, stetig sind, die F-schwache Topologie auf X.

Beispiel: Die Produkttopologie auf dem kartesischen Produkt $X := \prod_{i\in I} X_i$ von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{O}_i)$ ist die gröbste Topologie auf X, so dass alle Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ stetig sind. Mengen der Form $\prod_{i\in I} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{O}_i$ für alle $i \in I$ und $A_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ bilden eine Basis der Topologie von X. *$B \subset \mathcal{P}X$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, falls sich jedes $O \in \mathcal{O}$ als Vereinigung von Elementen von B schreiben lässt.*

Lemma 7.1.4. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Die durch

$$\langle \varphi, Jx\rangle := \langle x, \varphi\rangle$$

für alle $x \in X$ und alle $\varphi \in X^*$ definierte Abbildung $J : X \to X^{**}$ ist eine Isometrie. Wir sagen, dass J den Raum X in seinen Bidualraum einbettet.

(ii) Seien $x_n, x \in X$. Dann sind $x_n \rightharpoonup x$ in X und $Jx_n \to Jx$ schwach in X^{**} für $n \to \infty$ äquivalent.*

Beweis.

(i) Es gilt

$$\|Jx\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle \varphi, Jx\rangle| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\langle x, \varphi\rangle| = \|x\|$$

nach Korollar 4.1.5.

(ii) Dies folgt direkt nach Definition, da die Konvergenz in

$$\langle x_n, \varphi\rangle = \langle \varphi, Jx_n\rangle \to \langle x, \varphi\rangle = \langle \varphi, Jx\rangle$$

für die Ausdrücke mit oder ohne J äquivalent ist. □

Theorem 7.1.5. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Der schwache und der schwach Grenzwert einer Folge sind eindeutig bestimmt.*

(ii) Starke Konvergenz impliziert schwache und schwach Konvergenz.*

(iii) *Gelte $\varphi_n \to \varphi$ schwach* in X^* für $n \to \infty$. Dann folgt*
$$\|\varphi\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|.$$
(iv) *Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \to \infty$. Dann folgt*
$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$
(v) *Schwach konvergente und schwach* konvergente Folgen sind beschränkt.*

(vi) *Gilt $x_n \to x$ in X und $\varphi_n \to \varphi$ schwach* in X^* für $n \to \infty$ oder $x_n \rightharpoonup x$ und $\varphi_n \to \varphi$ (stark) in X^*, so folgt*
$$\langle x_n, \varphi_n\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$$
für $n \to \infty$.

Beweis.

(i) Für die schwach Konvergenz Benutze den Satz von Hahn-Banach für die schwache Konvergenz. Sei $x_n \rightharpoonup x$ und $x_n \rightharpoonup y$. Für alle $\varphi \in X^*$ gilt
$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle (x_n - x_n), \varphi\rangle = \langle x - y, \varphi\rangle.$$
Nach Korollar 4.1.5 (ii) gilt $x = y$.

Für die schwach* Konvergenz ist dies klar, da der Grenzwert eine Funktion φ ist, die wegen $\langle x, \varphi_n\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$ eindeutig bestimmt ist.

(ii) Klar.

(iii) Sei $x \in X$. Für $n \to \infty$ folgt
$$|\langle x, \varphi\rangle| \leftarrow |\langle x, \varphi_n\rangle| \le \|\varphi_n\| \cdot \|x\|,$$
also
$$|\langle x, \varphi\rangle| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\| \cdot \|x\|$$
und damit nach Definition der Operatornorm
$$\|\varphi\| \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|.$$
(iv) Analog zu oben erhalten wir $|\langle x, \varphi\rangle| \le \|\varphi\| \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$. Benutze nun wieder Korollar 4.1.5. Wähle also φ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\langle x, \varphi\rangle = \|x\|$.

(v) Aus $\varphi_n \to \varphi$ schwach* in X^* erhalten wir insbesondere $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, \varphi_n\rangle| < \infty$ punktweise für alle $x \in X$. Daher folgt nach Banach-Steinhaus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| < \infty$.

Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt $Jx_n \to Jx$ schwach* in X^{**} mit J aus Lemma 7.1.4 nach diesem Lemma. Somit ist Jx_n in X^{**} beschränkt, also auch x_n in X.

(vi) Es gilt
$$\begin{aligned}|\langle x, \varphi\rangle - \langle x_n, \varphi_n\rangle| &\le |\langle x, \varphi - \varphi_n\rangle| + |\langle x_n - x, \varphi_n\rangle|\\ &\le \underbrace{|\langle x, \varphi - \varphi_n\rangle|}_{\to 0} + \underbrace{\|x - x_n\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|\varphi_n\|}_{\le c}\end{aligned}$$
für $n \to \infty$.

Die zweite Aussage folgt durch eine analoge Argumentation mit „vertauschten Rollen“. ☐

Theorem 7.1.6. *Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X^*$ schwach* folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^* mit $\|\varphi_k\| \le 1$. Dann sind die Folgen $(\langle x_n, \varphi_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ für festes $n \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$ beschränkt. Daher finden wir mit einem Diagonalfolgenargument eine (nicht umbenannte) Teilfolge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_n, \varphi_k\rangle \in \mathbb{K}$$

existiert. Setze $Y := \langle \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$. Sei $y \in Y$. Dann existiert der folgende Grenzwert

$$\varphi(y) := \lim_{k\to\infty} \langle y, \varphi_k\rangle$$

und die damit definierte Funktion $\varphi\colon Y \to \mathbb{K}$ ist linear. Wegen

$$|\varphi(y)| = \lim_{k\to\infty} |\langle y, \varphi_k\rangle| \le \|y\|$$

ist φ auf Y gleichmäßig stetig und läßt sich daher nach Theorem 2.2.9, dem Fortsetzungssatz, eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung Φ auf $\overline{Y} = X$ mit $\|\Phi\| \le 1$ fortsetzen. Wir behaupten, dass $\varphi_n \to \Phi$ schwach* konvergiert.

Sei dazu $x \in X$ und $y \in Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\langle x, \Phi - \varphi_n\rangle| &\le |\langle x - y, \Phi - \varphi_n\rangle| + |\langle y, \Phi - \varphi_n\rangle| \\ &\le 2\|x - y\| + |\langle y, \Phi - \varphi_n\rangle|. \end{aligned}$$

Wir haben gesehen, dass der zweite Term für $n \to \infty$ verschwindet. Der erste Term kann wegen $\overline{Y} = X$ zuvor beliebig klein gewählt werden. Die Behauptung folgt. ☐

Mit den Methoden aus Theorem 7.1.6 zeigt man auch

Proposition 7.1.7. *Sei X ein normierter Raum.*

(i) Dann gilt $x_n \rightharpoonup x$ in X genau dann, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ mit $\langle x_n, \varphi\rangle \to \langle x, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in D$ gibt.

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist genau dann eine schwache Cauchyfolge, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ gibt, so dass $(\langle x_n, \varphi\rangle)$ für alle $\varphi \in D$ eine Cauchyfolge ist.

Beweis. Übung. ☐

Lemma 7.1.8. *Sei X ein Hilbertraum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $x_n \to x$ für $n \to \infty$,

(ii) $\|x_n\| \to \|x\|$ und $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$.

Beweis. Übung. Betrachte $\|x_n - x\|^2$. ☐

7.2. **Reflexivität.**

Definition 7.2.1. Sei X ein Banachraum und J die Isometrie aus Lemma 7.1.4. Dann heißt X *reflexiv*, falls $J\colon X \to X^{**}$ surjektiv (und damit eine bijektive Isometrie) ist.

Ein reflexiver Raum ist immer vollständig, da X^{**} vollständig ist.

Lemma 7.2.2. *Sei X ein Banachraum.*

(i) Ist X reflexiv, so stimmen schwache und schwach Folgenkonvergenz in X^* überein.*

(ii) Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.

(iii) Ist $T\colon X \to Y$ ein Isomorphismus, so ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.

(iv) X ist genau dann reflexiv, wenn X^* reflexiv ist.

Beweis.

(i) Klar.

(ii) Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $y'' \in Y^{**}$. Wir definieren x'' durch
$$\langle x', x'' \rangle := \langle x'|_Y, y'' \rangle$$
für alle $x' \in X^*$. Dann ist $x'' \in X^{**}$. Definiere $x := J_X^{-1} x''$. Sei $x' \in X^*$ mit $x' = 0$ auf Y. Für solche x' folgt
$$\langle x, x' \rangle = \langle x', x'' \rangle = \langle x'|_Y, y'' \rangle = 0.$$
Y ist abgeschlossen. Nach Korollar 4.1.4 folgt also $x \in Y$. Sei $y' \in Y^*$ beliebig. Sei $x' \in X^*$ eine Fortsetzung von y' wie im Satz von Hahn-Banach. Wir erhalten wegen $x \in Y$
$$\langle x, y' \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x'|_Y, y'' \rangle = \langle y', y'' \rangle.$$
Somit ist $y'' = J_Y x$. Damit ist J_Y surjektiv.

(iii) Sei X reflexiv. Wir wollen zeigen, dass Y ebenfalls reflexiv ist: Sei $y'' \in Y^{**}$. Wir definieren $x'' \in X^{**}$ durch
$$\langle x', x'' \rangle = \langle x' \circ T^{-1}, y'' \rangle \quad \text{für alle } x' \in X^*.$$
Für $y' \in Y^*$ mit $x' := y' \circ T$ gilt nach Definition von x''
$$\langle y', y'' \rangle = \langle y' \circ T, x'' \rangle = \left\langle J_X^{-1} x'', y' \circ T \right\rangle = \left\langle T J_X^{-1} x'', y' \right\rangle.$$
Also gilt $y'' = J_Y T J_X^{-1} x''$ und damit ist J_Y surjektiv, Y also ebenfalls reflexiv.

(iv) „$\Longrightarrow$“: Sei X reflexiv. Sei $x''' \in X^{***}$, so ist $x''' \circ J_X \in X^*$. Für $x'' \in X^{**}$ gilt
$$\langle x'', x''' \rangle = \left\langle J_X^{-1} x'', x''' \circ J_X \right\rangle = \langle x''' \circ J_X, x'' \rangle = \langle x'', J_{X^*} \circ x''' \circ J_X \rangle.$$
Somit folgt $x''' = J_{X^*}(x''' \circ J_X)$. Also ist J_{X^*} surjektiv und somit ist auch X^* reflexiv.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun X^* reflexiv. Aufgrund des ersten Teils ist auch X^{**} reflexiv. J_X ist eine Isometrie. Somit ist $J_X(X) \subset X^{**}$ abgeschlossen. Nach (ii) ist $J_X(X)$ daher reflexiv. Nach (iii) ist also X selbst reflexiv. □

Lemma 7.2.3. *Sei X ein Banachraum. Dann ist X separabel, falls X^* separabel ist.*

Die Umkehrung ist falsch, da L^1 separabel ist, L^∞, der Dualraum von L^1 aber nicht.

Beweis. (Das ist Korollar 4.1.7.)

Sei $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X^*. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X so dass $|\langle x_n, \varphi_n \rangle| \ge \frac{1}{2}\|\varphi_n\|$ und $\|x_n\| = 1$. Setze $Y := \overline{\langle \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \rangle}$. Sei $\varphi \in X^*$ mit $\varphi = 0$ auf Y, so folgt für alle n
$$\|\varphi - \varphi_n\| \ge |\langle x_n, \varphi - \varphi_n \rangle| = |\langle x_n, \varphi_n \rangle| \ge \tfrac{1}{2}\|\varphi_n\| \ge \tfrac{1}{2}(\|\varphi\| - \|\varphi_n - \varphi\|),$$
also
$$\|\varphi\| \le 3 \inf_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi - \varphi_n\| = 0,$$
da $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X^* liegt. Nach Korollar 4.1.4 erhalten wir $Y = X$. Da Y nach Konstruktion separabel ist, ist auch X separabel. □

Theorem 7.2.4. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{B_1(0)} \subset X$. Definiere $Y := \overline{\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle}$. Dann ist Y nach Lemma 7.2.2 selbst reflexiv. Y ist nach Definition separabel. Somit ist auch das Bild $Y^{**} = J_Y Y$ separabel. Nach Lemma 7.2.3 ist daher auch Y^* separabel. Somit ist nach Theorem 7.1.6 die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset Y^{**}$ schwach* folgenkompakt. Wir wenden dies auf die Folge $(J_Y x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y^{**} an, deren Folgeglieder in $\overline{B_1(0)} \subset Y^{**}$ enthalten sind. Es gibt also ein $y'' \in Y^{**}$ und eine nicht umbenannte Teilfolge, so dass

$$\langle y', J_Y x_n\rangle \to \langle y', y''\rangle$$

für alle $y' \in Y^*$ für $n \to \infty$ konvergiert. Definiere $x := J_Y^{-1} y'' \in Y$. Es folgt für alle $y' \in Y^*$ und $n \to \infty$

$$\langle x_n, y'\rangle = \langle y', J_Y x_n\rangle \to \langle y', y''\rangle = \langle x, y'\rangle.$$

Sei $x' \in X^*$. Dann gilt $x'|_Y \in Y^*$. Auf Elemente in $Y \subset X$ angewandt stimmen x' und $x'|_Y$ überein. Wir erhalten also

$$\underline{\langle x_n, x'\rangle} = \langle x_n, x'|_Y\rangle \to \langle x, x'|_Y\rangle = \underline{\langle x, x'\rangle} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wir erhalten $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$. □

Theorem 7.2.5. *Sei X ein normierter Raum und $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d. h. sind $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und gilt $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$, so folgt $x \in M$.*

Beweis. Folgt direkt aus dem Trennungssatz, Theorem 4.1.9, durch einen Widerspruchsbeweis. □

Lemma 7.2.6 (Lemma von Mazur)**.** *Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in einem normierten Raum. Dann liegt x im Abschluss der konvexen Hülle von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis. Der Abschluss der konvexen Hülle ist konvex. Also folgt die Behauptung aus Theorem 7.2.5. □

Vergleiche das folgende Resultat mit Theorem 5.2.2 für den Hilbertraum.

Theorem 7.2.7. *Sei X ein reflexiver Banachraum, $M \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu $x_0 \in X$ ein $x \in M$ mit*

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Minimalfolge, gelte also $\|x_n - x_0\| \to \operatorname{dist}(x_0, M)$ für $n \to \infty$. Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Somit gibt es nach eine schwach konvergente Teilfolge $x_n \rightharpoonup x$ für ein $x \in X$. Nach Theorem 7.2.5 erhalten wir $x \in M$. Aus der schwachen Konvergenz erhalten wir auch $x_n - x_0 \rightharpoonup x - x_0$. Da die Norm unter schwacher Konvergenz nach Theorem 7.1.5 unterhalbstetig ist, folgt die mittlere Ungleichung in

$$\operatorname{dist}(x_0, M) \le \|x - x_0\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, M).$$

Die erste Ungleichung gilt nach Definition des Abstandes und die letzte, da x_n als Minimalfolge gewählt war. Die Behauptung folgt. □