8. Sobolevräume

8.1. **Definition und grundlegende Eigenschaften.** Wir folgen [**?**]. Weitere gute Übersichten zu Sobolevräumen und deren Umfeld vermitteln die Bücher von William Ziemer [**?**] und Robert Adams [**?**].

Bemerkung 8.1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ heißt Testfunktion. Sei $u \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega u\varphi_i = -\int_\Omega u_i\varphi,$$

da $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$. Sei $u \in C^k(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\varphi$$

für alle Multiindices $|\alpha| \le k$.

Definition 8.1.2 (Schwache Ableitung)**.** Sei nun $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $v \in L^1_{\text{loc}}$ heißt α-te schwache Ableitung von u, falls

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi$$

für alle Testfunktionen φ gilt. Wir schreiben $D^\alpha u = v$.

Lemma 8.1.3 (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung)**.**
Seien v, $\tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitungen von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt $v = \tilde{v}$.

Zum Beweis benötigen wir das Lemma von Du Bois-Reymond. Wir folgen der Darstellung in [**?**].

Lemma 8.1.4 (Du Bois-Reymond)**.** *Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gilt*

$$\int_\Omega f\varphi = 0$$

für alle Testfunktionen φ, so gilt $f = 0$ fast überall, $f = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Beweis. Es genügt, $f \in L^1(\Omega)$ zu betrachten, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Definiere

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0, \\ 0, & f(x) = 0. \end{cases}$$

Es gelten $|g| \le 1$ und $f \cdot g = |f|$. Da $g \in L^\infty(\Omega)$ ist, folgt auch $g \in L^2(\Omega)$. Somit existiert eine Folge $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $\eta_\varepsilon \to g$ in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Nach Theorem 3.2.3, siehe auch [**?**, Theorem 3.12], konvergiert nun eine (nicht umbenannte) Teilfolge der η_ε dann fast überall gegen g. Wir dürfen annehmen, dass die Folge η_ε durch Glättung entstanden ist. Somit gilt

$$\|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^\infty} \le 1.$$

Aufgrund des Satzes über dominerende Konvergenz folgt nun

$$0 = \int_\Omega f \cdot \eta_\varepsilon \to \int_\Omega f \cdot g = \int_\Omega |f|.$$

Wir schließen also, dass fast überall $f = 0$ gilt und erhalten $f = 0$ in $L^1(\Omega)$. $\square$

Beweis von Lemma 8.1.3. Es gilt

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v}\varphi$$

für alle Testfunktionen φ. Wir erhalten also

$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\varphi = 0$$

und somit aufgrund des Lemma von Du Bois-Reymond auch $v = \tilde{v}$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

Beispiel 8.1.5. Sei $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

Dann ist v die schwache Ableitung von u.

Beweis. Sei φ eine Testfunktion

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi' + \int_1^2 \varphi' = -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + \varphi(2) - \varphi(1) \\ &= -\int_0^1 \varphi = -\int_0^2 v\varphi. \end{aligned}$$

□

Beispiel 8.1.6. Sei $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Dann besitzt u keine Ableitung im schwachen Sinne.

Beweis. Nehme an, $v \in L^1_{\mathrm{loc}}$ wäre eine schwache Ableitung. Dann folgt für alle Testfunktionen φ

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v\varphi = \int_0^2 u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi' + 2\int_1^2 \varphi' \\ &= -\int_0^1 \varphi + x\varphi|_{x=1} - x\varphi|_{x=0} + 2\varphi(2) - 2\varphi(1) = -\int_0^1 \varphi - \varphi(1). \end{aligned}$$

Sei φ_m eine Folge von Testfunktionen mit $0 \leq \varphi_m \leq 1$, $\varphi_m(1) = 1$, $\varphi_m(x) \to 0$ für $x \neq 1$. Dann gilt für $m \to \infty$

$$\begin{tikzcd} -\int_0^2 v\varphi_m \arrow[r, equal] \arrow[d] & -\int_0^1 \varphi_m - \varphi_m(1) \arrow[d] \\ 0 & 0 - 1 = -1. \end{tikzcd}$$

Daher kann es keine solche Funktion v geben. □

Definition 8.1.7.

(i) Seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren
$W^{k,p}(\Omega) := \left\{u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ im schwachen Sinn für alle } |\alpha| \le k\right\}.$

(ii) Die Räume $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ sind, wie wir später sehen werden, Hilberträume.

(iii) Für u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$ schreiben wir $u = v$, falls $u = v$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, d. h., falls $u = v$ fast überall gilt.

(iv) Wir definieren die folgende Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \infty, & u \notin W^{k,p}(\Omega), \\ \left(\sum\limits_{|\alpha|\le k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha|\le k} \sup\limits_\Omega |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Hier benutzen wir das wesentliche Supremum. Mit dieser Norm wird der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ zu einem Banachraum. Dies beweisen wir später.

(v) $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls $u \in W^{k,p}(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt.

(vi) Wir schreiben $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, falls

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$$

und $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0$$

für alle $\Omega' \Subset \Omega$.

(vii) Wir definieren

$$W^{k,p}_0(\Omega) := \overline{C^\infty_c(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C^\infty_c(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt. Unter geeigneten Voraussetzungen gilt für $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ auch $D^\alpha u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $|\alpha| \le k - 1$. Diese Aussage ist nicht trivial, da $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist.

(viii) $H^k_0(\Omega) = W^{k,2}_0(\Omega)$.

Beispiel 8.1.8. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{für } x \ne 0.$$

Für welche Werte von $\alpha > 0$, n und p gilt $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Für $x \ne 0$ gilt

$$u_i(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}},$$
$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Sei $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ eine Testfunktion und $\varepsilon > 0$. Es folgt

$$\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u\varphi_i = -\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u_i\varphi + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi \cdot \left(-\frac{x_i}{|x|}\right).$$

Wir erhalten

$$\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi \cdot \left(-\frac{x_i}{|x|}\right)\right| \le \|\varphi\|_{L^\infty} \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\alpha} \le c \cdot \varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0$$

für $\varepsilon \searrow 0$, falls $n - 1 - \alpha > 0$ gilt.

Es gelten die folgenden Integralabschätzungen

$$\int\limits_{B_1(0)} |Du| \le c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha-1+n-1} dr \le c,$$

falls $-\alpha - 1 + n > 0$ und

$$\int\limits_{B_1(0)} u \le c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha+n-1} dr \le c,$$

falls $-\alpha + n > 0$ ist. Die entsprechenden Integrale werden klein, wenn wir nur über eine Umgebung des Ursprungs integrieren. Somit erhalten wir für $\varepsilon \searrow 0$

$$\int\limits_\Omega u\varphi_i = -\int\limits_\Omega u_i \varphi$$

für alle Testfunktionen φ. $u_i(0)$ ist frei wählbar. Aufgrund der Eindeutigkeit der Ableitung ist die schwache Ableitung außerhalb des Ursprungs gleich der klassischen Ableitung. Die obigen Rechnungen zeigen, dass u in ganz Ω schwach differenzierbar ist.

Wann sind u und $Du \in L^p$? Es gilt

$$\int\limits_{B_1(0)} |u|^p = c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha p+n-1} < \infty \iff -\alpha p + n > 0$$

und

$$\int\limits_{B_1(0)} |Du|^p = c \cdot \int\limits_0^1 r^{-\alpha p-p+n-1} < \infty \iff -\alpha p - p + n > 0.$$

Die letzte Bedingung ist am einschränkendsten. Somit gilt

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \iff \alpha < \frac{n-p}{p}$$

und für $p \ge n$ ist $u(x)$ in keinem $W^{1,p}(\Omega)$-Raum.

Bemerkung 8.1.9. Sei y_k eine dichte Folge in $B_1(0)$. Dann ist

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x - y_k|^{-\alpha} \in W^{1,p}(B_1(0)),$$

falls $\alpha < \frac{n-p}{p}$. (Um einfach nachzuweisen, dass nicht nur die endlichen Summen in $W^{1,p}(B_1(0))$ sind, benutzt man am besten die Vollständigkeit von $W^{1,p}(B_1(0))$, die wir in Theorem 8.1.11 zeigen werden.) Es ist also möglich, dass eine Funktion $u \in W^{1,p}$ auf einer dichten Teilmenge unbeschränkt wird (selbst wenn man u auf einer Nullmenge abändert).

Theorem 8.1.10 (Eigenschaften schwacher Ableitungen)**.** *Seien u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gelten*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ *und* $D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u$ *für* $|\alpha| + |\beta| \le k$.
(ii) λ, $\mu \in \mathbb{R} \implies \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ *und* $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
(iii) Ist $\Omega' \subset \Omega$ *offen, so folgt* $u \in W^{k,p}(\Omega')$.
(iv) Ist $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, *so folgt* $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ *und es gilt die Leibnizregel*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

ist und $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.

Beweis.

(i) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann ist auch $D^\beta \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega D^\alpha u D^\beta \varphi &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u D^{\alpha+\beta} \varphi \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|} \int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta} u \varphi \\ &= (-1)^{|\beta|} \int\limits_\Omega D^{\alpha+\beta} u \varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt $D^\beta (D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ im schwachen Sinne.

(ii) Ist klar.

(iii) Ist klar.

(iv) Seien $|\alpha| = 1$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \zeta u D^\alpha \varphi &= \int\limits_\Omega u D^\alpha (\zeta\varphi) - \int\limits_\Omega u \left(D^\alpha \zeta\right) \varphi \\ &= -\int\limits_\Omega D^\alpha u \zeta \varphi - \int\limits_\Omega u \left(D^\alpha \zeta\right) \varphi \\ &= -\int\limits_\Omega \left(\zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta\right) \varphi.\end{aligned}$$

Somit gilt nun

$$D^\alpha(\zeta u) = \zeta D^\alpha u + u D^\alpha \zeta.$$

Der Rest folgt nun per Induktion wie für klassisch differenzierbare Funktionen.

□

Theorem 8.1.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum.*

Bemerkung 8.1.12. Dies ist für $k = 0$ bekannt. Dann gilt nämlich $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Beweis von Theorem 8.1.11.

(i) Wir wollen zunächst zeigen, dass $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ eine Norm ist: Es ist nur die Dreiecksungleichung im Falle $p < \infty$ nachzuweisen. Seien also $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{|\alpha|\le k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p} + \|D^\alpha v\|_{L^p}\right)^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

da die Dreiecksungleichung in L^p gilt,

$$\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p}^p\right)^{1/p},$$

da $\left(\mathbb{R}^l, \|\cdot\|_{l^p}\right)$ ein Banachraum ist.

$$= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

(ii) Zur Vollständigkeit: Sei u_m eine Cauchyfolge in $W^{k,p}(\Omega)$. Dann ist auch $D^\alpha u_m$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq k$. Somit existiert für alle α mit $|\alpha| \leq k$ ein Grenzwert,

$$D^\alpha u_m \to u_\alpha,$$
$$u_m \to u.$$

Es fehlt nun noch der Nachweis, dass die Grenzwertbildung mit dem Ableiten vertauscht, also dass $u_\alpha = D^\alpha u$ gilt. Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\begin{tikzcd}
\int\limits_\Omega u_m D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] \arrow[d] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D^\alpha u_m \varphi \arrow[d] \\
\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi \arrow[r, equal] & (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_\alpha \varphi.
\end{tikzcd}$$

Die Konvergenz folgt hier, da φ in jedem L^q-Raum ist. Somit ist $D^\alpha u = u_\alpha$ und es gilt $u_m \to u \in W^{k,p}(\Omega)$. ☐

8.2. **Approximierbarkeit.** In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}$-Funktionen durch glatte Funktionen in der $W^{k,p}$-Norm approximieren.

Theorem 8.2.1 (Lokale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.**
Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, η_ε die zugehörige Diracfolge. Sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Dann ist

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

und es gilt

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Beweis. Die Regularitätsaussage ist bekannt. Sei also $|\alpha| \leq k$. Wir behaupten, dass

$$D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u \text{ in } \Omega_\varepsilon$$

gilt, dass also Glätten und schwaches Ableiten kommutieren. Für $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int\limits_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int\limits_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy, \end{aligned}$$

da $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ für festes $x \in \Omega_\varepsilon$ eine Testfunktion ist. Somit folgt

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x).$$

Sei nun $\Omega' \Subset \Omega$. Da die Mollifizierungen in L^p konvergieren, erhalten wir

$$D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u \text{ in } L^p(\Omega').$$

Also konvergiert jeder Bestandteil der Norm und es gilt auch

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega'). \qquad \square$$

Bemerkung 8.2.2. Dies funktioniert im Falle $p = \infty$ nicht, da sich L^∞-Funktionen i. a. aufgrund ihrer Sprungstellen nicht durch glatte Funktionen in L^∞ approximieren lassen.

Theorem 8.2.3 (Globale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Proof.
Zerlege mit Hilfe von Abschneidefunktionen u in Anteile auf „Zwiebelschalen". Betrachte also $u\eta_i$ statt u, wobei (η_i) eine Zerlegung der Eins ist, wobei die Träger dieser Funktionen jeweils in einer festen Anzahl benachbarter Zwiebelschalen enthalten sind. Solche Zerlegung können wir so wählen: Definiere

$$U_i := \{x \in \Omega : \frac{1}{2} \cdot 2^{-i}\delta < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < 2 \cdot 2^{-i}\delta\},$$

wobei $\delta := \operatorname{diam}(\Omega)$. Wähle $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Teiling der Eins. Weiter sei $c_i > 0$ (werden später bestimmt) und $\varepsilon > 0$. Nach Theorem 8.2.1 gibt es $u_{i,\varepsilon} \in C^\infty(U_{i+1})$ mit

$$\|u - u_{i,\varepsilon}\|_{W^{k,p}(U_i)} \le c_i\varepsilon.$$

Definiere

$$u_\varepsilon = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i u_{i,\varepsilon}.$$

Also gilt

$$u - u_\varepsilon = \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i (f - f_{i,\varepsilon}).$$

Sie achten darauf, dass auf jede $\Omega' \subset\subset \Omega$ nur endlich η_i nicht verschwindet sind. Damit gilt

$$D^\alpha(u - u_\varepsilon) = \sum_{i\in\mathbb{N}} D^\alpha(\eta_i u_{i,\varepsilon}).$$

Mit Hilfe der Leibnizregel, Theorem 8.1.10 (iv), erhalten wir

$$D^\alpha(\eta_i u_{i,\varepsilon}) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \eta_i D^{\alpha-\beta}(u - u_e),$$

Nun können schätzen wir ab und erhalten

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} &\le C \sum_i \|\eta_i\|_{C^k(\Omega)} \|u - u_\varepsilon\|_{W^{k,p}(U_i)} \\ &\le C\varepsilon \sum_i \|\eta_i\|_{C^k(\Omega)} \le C\varepsilon, \end{aligned}$$

falls wir am Anfang c_i etwa mit $c_i \le 2^{-i}(\|\eta_i\|_{C^k(\Omega)} + 1)^{-1}$ wählen.

$\square$

Bemerkung 8.2.4. Wir benötigen keine Randregularität von Ω und bekommen dafür nur $u_m \in C^\infty(\Omega)$ und nicht $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Theorem 8.2.5 (Globale Approximierbarkeit in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Seien $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass*

$$u_m \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert (nach Umbenennen der Koordinatenachsen) eine Funktion $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^1, so dass

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : x^n > \gamma(x^1, \ldots, x^{n-1})\}$$

gilt. Definiere $V := \Omega \cap B_{r/2}(x_0)$.

(ii) Definiere für $x \in V$ und $\varepsilon > 0$ den Punkt $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n$. Da $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 ist, existiert ein $\lambda = \lambda(|D\gamma|) \gg 1$, so dass $B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subset \Omega \cap B_r(x_0)$ für $x \in V$ gilt, falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist. Definiere $u_\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$ für alle x mit $x^\varepsilon \in \Omega$, die um $\lambda\varepsilon$ in Richtung e_n verschobene Funktion. Mollifiziere und definiere $v^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$. Dies ist für $\lambda \gg 1$ in der Menge V wohldefiniert. Wir erhalten insbesondere $v^\varepsilon \in C^\infty\left(\overline{V}\right)$.

(iii) Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

Wie in Theorem 8.2.1 sehen wir, dass $D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon \to 0$ in L^p gilt. Weiterhin gilt $D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u \to 0$ in L^p, da Translationen in L^p stetig sind. Hieraus folgt dann $v^\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}(V)$.

Wir wollen noch genauer begründen, warum Translationen in L^p für $1 \le p < \infty$ stetige Abbildungen sind. Seien also $\delta > 0$ und $u \in L^p$ vorgegeben. Wir wollen nachweisen, dass $u(\cdot) - u(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p gilt. Approximiere dazu zunächst die Funktion u bis auf $\delta/3$ in L^p durch eine glatte Funktion. Das Ergebnis, $\tilde{u}$, hat einen beschränkten Gradienten, wobei die Schranke von der Approximation abhängt. Dies funktioniert so nur auf beschränkten Gebieten. Auf unbeschränkten Gebieten sind aber die Beiträge zum L^p-Integral außerhalb einer großen Kugel ohnehin klein und können direkt abgeschätzt werden. Da Translationen für Funktionen mit beschränktem Gradienten in L^p stetig sind, erhalten wir $\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h) \to 0$ für $|h| \to 0$ in L^p. Wir wählen nun $|h|$ so klein, dass auch diese Differenz durch $\delta/3$ beschränkt ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\|u(\cdot) - u(\cdot - h)\|_{L^p} &\le \|u(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|_{L^p} + \|\tilde{u}(\cdot) - \tilde{u}(\cdot - h)\|_{L^p} \\ &\quad + \|\tilde{u}(\cdot - h) - u(\cdot - h)\|_{L^p} \\ &\le \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta.\end{aligned}$$

(iv) Sei nun $\delta > 0$. Da Ω beschränkt ist, existieren endlich viele Punkte $x_i^0 \in \partial\Omega$ und Radien $r_i > 0$, so dass $V_i = \Omega \cap B_{r_i/2}(x_i^0)$ wie in (i) ist und $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{r_i/2}(x_i^0)$ gilt. Wie oben gezeigt, gibt es also $v_i \in C^\infty\left(\overline{V}_i\right)$ mit $\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \le \delta$. Wähle noch $V_0 \Subset \Omega$, so dass $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=0}^{N} V_i$ gilt. Nach Theorem 8.2.1 gibt es $v_0 \in C^\infty\left(\overline{V}_0\right)$ mit $\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \le \delta$.

(v) Sei nun ζ_i eine den Mengen V_i untergeordnete glatte Zerlegung der Eins. Definiere $v := \sum\limits_{i=0}^{N} \zeta_i v_i$. Es gilt $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei $|\alpha| \le k$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &= \left\|\sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i v_i) - \sum_{i=0}^{N} D^\alpha(\zeta_i u)\right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\zeta_i v_i) - D^\alpha(\zeta_i u)\|_{L^p(V_i)} \\ &\le c \cdot \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)}\end{aligned}$$

$$\leq c \cdot (N+1)\delta,$$

wobei wir im vorletzten Schritt benutzt haben, dass die Ableitungen der Funktionen ζ_i gleichmäßig beschränkt sind. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 8.2.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $1 \leq p < \infty$ ist $(W^{1,p} \cap C^\infty)(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ (Satz 8.2.3). Dagegen ist i.a. $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.

Wir wiederholen die Definitionen von $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$ (Definition 8.1.7).

Definition 8.2.7.

(i) Wir definieren
$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$
Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt.

(ii) $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

$W_0^{1,p}(\Omega)$ is separabel für $1 \leq p < \infty$ und reflexiv für $1 < p < \infty$.