8.3. **Fortsetzbarkeitssätze.**

In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}(\Omega)$-Funktionen nach $\mathbb{R}^n$ als $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger fortsetzen, so dass deren Norm durch die ursprüngliche Norm abgeschätzt bleibt.

Theorem 8.3.1 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega \Subset V$. Dann gibt es eine beschränkte lineare Abbildung*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty,$$

so dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgendes gilt

- *$Eu = u$ fast überall in Ω,*
- $\operatorname{supp}(Eu) \subset V$,
- $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c(p, \Omega, V) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Die Funktion Eu heißt Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Nehme zunächst an, dass lokal $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Dann gibt es $r > 0$, so dass ohne Einschränkung

$$B^+ := B_r(x_0) \cap \{x^n \ge 0\} \subset \overline{\Omega},$$
$$B^- := B_r(x_0) \cap \{x^n \le 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

(ii) Nehme zunächst an, dass $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ gilt. Definiere eine Spiegelung von höherer Ordnung durch

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ -3u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) + 4u\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\frac{1}{2}x^n\right), & x \in B^-. \end{cases}$$

(iii) Wir behaupten zunächst, dass $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$ ist. Definiere dazu $u^- := \overline{u}|_{B^-}$ und $u^+ := \overline{u}|_{B^+}$. Für die Normalableitungen erhalten wir

$$\frac{\partial u^-}{\partial x^n} = 3\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n\right) - 2\frac{\partial u}{\partial x^n}\left(x^1, \ldots, x^{n-1}, -\tfrac{1}{2}x^n\right).$$

Somit gilt auf $\{x^n = 0\} \cap B_r(x_0)$ für die Normalenableitungen $u^-_{x^n} = u^+_{x^n}$. Auf der Menge $\{x^n = 0\} \cap B_r(x_0)$ stimmen die Funktionswerte von u^+ und u^- und damit auch die Tangentialableitungen überein. Somit ist $\overline{u} \in C^1(B_r(x_0))$.

(iv) Es gilt

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(B_r(x_0))} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$

da in der Definition der Spiegelung höherer Ordnung nie weiter als bisher von $\{x^n = 0\}$ entfernt ausgewertet wird. Da die Spiegelung eine Linearkombination von $W^{1,p}$-Funktionen ist und da das neue Argument die Norm höchstens um eine Konstante vergrößert, folgt die Behauptung.

(v) Ist der Rand nicht eben/flach, so biegt man den Rand zunächst flach, setzt dann fort und transformiert anschließend zurück.

(vi) Da sich der Rand nicht mit einer solchen Umgebung überdecken läßt, zerlegt man die Funktion zunächst mit einer geeigneten Zerlegung der Eins und baut das Resultat anschließend wieder zusammen.

(vii) Durch Multiplikation mit einer Abschneidefunktion, die Null wird bevor man Stellen erreicht, an denen u nicht mehr von der Klasse C^1 ist, stellt man sicher, dass der Träger der fortgesetzten Funktion nicht zu groß wird.

(viii) Wir erhalten also die Abschätzung

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Die Details zu den letzten Schritten sind eine Übung.

(ix) Seien nun $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wir approximieren u durch Funktionen $u_m \in C^\infty(\overline{u})$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir $u_m \to u$ fast überall in Ω annehmen. Damit folgt später $Eu = u$ in Ω. Die Abbildung $v \mapsto Ev := \overline{v}$ ist ein linearer Operator. Die Stetigkeit folgt dabei aus der obigen Abschätzung für glatte Funktionen. Diese Abschätzung liefert aber auch

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Daher ist Eu_m eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren nun $\overline{u} = Eu$ als den Grenzwert dieser Folge. Eu ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig und die gesuchte Fortsetzung.

(x) Der Fall $p = \infty$ ist ebenfalls eine Übung. □

Bemerkung 8.3.2. Für $\partial\Omega \in C^2$ funktioniert die obige Konstruktion auch noch für $W^{2,p}(\Omega)$-Funktionen. Dabei bleibt eine C^2-Funktion jedoch nicht in dieser Klasse.

Mit Hilfe von Spiegelungen höherer Ordnung kann man analog aber auch Fortsetzungsoperatoren für die Räume $W^{k,p}$ konstruieren. Dies bleibt als Übung.

8.4. **Spuren von Sobolevfunktionen.** Wir wollen Randwerte von $W^{1,p}$-Funktionen definieren. Diese Funktionen sind i. a. nicht stetig und $\partial\Omega$ ist eine Nullmenge.

Sei Ω beschränkt. Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leq p < \infty$, so besitzt u Randwerte als L^p-Funktion.

Theorem 8.4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

so dass $Tu = u|_{\partial\Omega}$, falls $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ ist und

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c(p,\Omega) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt.

Beweis.

(i) Nehme zunächst an, dass $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist, dass $\partial\Omega$ in der Nähe eines Randpunktes $x_0 \in \partial\Omega$ flach ist, lokal also $\partial\Omega \subset \{x^n = 0\}$ gilt. Wähle nun $r > 0$ so, dass $B_r(x_0) \cap \Omega = B_r(x_0) \cap \{x^n > 0\}$ gilt. Definiere $\hat{B} := B_{r/2}(x_0)$ und $B := B_r(x_0)$. Setze weiterhin $\Gamma := \partial\Omega \cap \{x^n = 0\} \cap \hat{B}$ und $(x^1, \ldots, x^{n-1}) = \hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x^n = 0\}$, wobei das letzte Gleichheitszeichen die Identifikation der beiden Mengen andeutet.

Sei $\zeta \in C_c^\infty(B)$, $\zeta \geq 0$ und $\zeta = 1$ in $\hat{B}$. Setze $B^+ := B \cap \Omega$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma |u|^p d\hat{x} &\leq \int\limits_{\{x^n=0\}} \zeta \cdot |u|^p d\hat{x} \\
&= -\int\limits_{B^+} \left(\zeta|u|^p\right)_{x^n} dx \quad \text{(Hauptsatz)} \\
&\leq \int\limits_{B^+} |D\zeta| \cdot |u|^p + p|u|^{p-1}|Du|\zeta
\end{aligned}$$

(für $p = 1$ erhält man dieselbe obere Aschätzung mit $\pm\zeta u$ punktweise und integriert dann in $\hat{x}$)

$$\le c \cdot \int\limits_{B^+} |u|^p + |Du|^p \quad \left(\text{Young, } \tfrac{p-1}{p} + \tfrac{1}{p} = 1\right).$$

(ii) Für ein allgemeines C^1-Gebiet Ω, eine kleine Umgebung Γ von $x_0 \in \partial\Omega$ in $\partial\Omega$ erhält man durch Aufbiegen ebenfalls

$$\int\limits_{\Gamma} |u|^p \le c \cdot \int\limits_{\Omega} |u|^p + |Du|^p.$$

(iii) Überdecke nun $\partial\Omega$ mit solchen Randstücken Γ, zerlege mit Hilfe einer Zerlegung der Eins und erhalte

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Definiere $Tu := u|_{\partial\Omega}$ für $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Es folgt

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

falls $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ ist. Wir bemerken, dass T ein linearer Operator ist.

(iv) Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ beliebig. Sei $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ eine approximierende Folge, also $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir erhalten

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c \cdot \|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Daher ist Tu_m eine Cauchyfolge in $L^p(\partial\Omega)$. Wir definieren also

$$Tu := \lim_{m\to\infty} Tu_m \text{ in } L^p(\partial\Omega).$$

Diese Definition ist unabhängig von der approximierenden Folge u_m.

(v) Sei schließlich $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Die in Theorem 8.2.5 konstruierte Folge ist so definiert, dass sie in diesem Falle auf ganz $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen u konvergiert. Daher folgt hier $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Da der Grenzwert aber von der approximierenden Folge unabhängig ist, gilt dies auch, wenn man andere approximierende Folgen verwendet. □

Theorem 8.4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad Tu = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei zunächst $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gibt es nach Definition der $W_0^{1,p}(\Omega)$-Funktionen eine Folge von Funktionen $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für alle Folgenglieder gilt $Tu_m = 0$ auf $\partial\Omega$. Da $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ein stetiger linearer Operator ist, folgt auch $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$.

„$\Longleftarrow$“: Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und gelte $Tu = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir benutzen eine Zerlegung der Eins und biegen den Rand $\partial\Omega$ lokal auf. Daher dürfen wir annehmen, dass $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right) \equiv W^{1,p}(\{x^n > 0\})$, $\operatorname{supp} u \Subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$ und $Tu = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ gelten. Wir wollen nachweisen, dass sich u in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ durch $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$-Funktionen approximieren läßt. Es gilt $Tu = 0$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$. Daher gibt es $u_m \in C^1\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$, so dass

$$u_m \to u \text{ in } W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right),$$
$$Tu_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0 \text{ in } L^p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right).$$

Sei nun $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x^n \ge 0$. Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$|u_m(\hat{x}, x^n)| \le |u_m(\hat{x}, 0)| + \int\limits_0^{x^n} |u_{m,x^n}(\hat{x}, t)|dt.$$

Wir betrachten die p-te Potenz dieser Ungleichung und schätzen mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung mit den Exponenten p und $\frac{p}{p-1}$ ab

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, x^n)|^p d\hat{x} \le c(p) \cdot & \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\
&+ c(p) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_0^{x^n} 1 \cdot |Du(\hat{x}, t)| dt \right)^p d\hat{x} \\
\le c(p) \cdot & \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\hat{x}, 0)|^p d\hat{x} \\
&+ c(p) \cdot (x^n)^{p-1} \cdot \int\limits_0^{x^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(\hat{x}, t)|^p d\hat{x}\, dt.
\end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ gilt $u_m \to 0$ in $L^p\left(\partial\mathbb{R}^n_+\right)$ und $u_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$. Daher folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x}, t)|^p \, d\hat{x} \le c(p) t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, \tau)|^p d\hat{x}\, d\tau.$$

Wir integrieren dies bezüglich t und erhalten

$$\int\limits_0^{x^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\hat{x}, t)|^p \, d\hat{x}\, dt \le c(p) \int\limits_0^{x^n} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, \tau)|^p d\hat{x}\, d\tau\, dt. \tag{8.1}$$

Definiere nun die approximierenden Funktionen mit Randwerten Null. Sei $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $0 \le \zeta \le 1$ und

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{in } [0, 1], \\ \zeta \equiv 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \setminus [0, 2]. \end{cases}$$

Definiere für $x \in \mathbb{R}^n_+$ Funktionen

$$\zeta_m(x) := \zeta(m x^n)$$

und

$$w_m(x) := u(x)(1 - \zeta_m).$$

Es folgt

$$w_{m,x^n} = u_{x^n}(1 - \zeta_m) - m u \zeta'$$

und

$$D_{\hat{x}} w_m = D_{\hat{x}} u (1 - \zeta_m).$$

Zeige nun, dass $w_m \to u$ in $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ konvergiert. Es gilt $w_m \to u$ in L^p aufgrund der Stetigkeit des Integrals bezüglich des Integrationsgebietes. Wir schätzen wie folgt ab

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p \le c(p) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\zeta_m|^p |Du|^p + c(p, \zeta) m^p \int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|^p \equiv A + B.$$

Wir benutzen nochmals die Stetigkeit bezüglich des Integrationsgebietes (oder den Satz von der dominierenden Konvergenz mit entsprechend "abgeschnittenen" Funktionen) und erhalten $A \to 0$ für $m \to \infty$. Das zweite Integral schätzen wir mit Hilfe von (8.1) ab

$$\begin{aligned}
B &\le c \cdot m^p \int\limits_0^{2/m} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, \tau)|^p d\hat{x} d\tau dt \\
&\le c \cdot m^p \left(\int\limits_0^{2/m} t^{p-1} dt \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2/m} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x}, t)|^p d\hat{x} dt \right)
\end{aligned}$$

$$\leq c \cdot \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\hat{x},t)|^p d\hat{x}dt$$
$$\to 0$$

für $m \to \infty$. Wir erhalten also $w_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Andererseits gilt $w_m = 0$ für $0 < x^n < 1/m$. Daher erhält man durch Mollifizierung der w_m eine Folge $u_m \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n_+)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ und es gilt (wie behauptet) $u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+)$. □

9. Anwendungen

9.1. **Die Direkte Methode.**

Zunächst brauchen wir die Poincaré-Ungleichung

Lemma 9.1.1 (Poincaré-Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es gibt eine Konstante $c_0 = c_0(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega |u|^2 \leq c_0^2 \int_\Omega |\nabla u|^2, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

Proof. Mit Approximationsargument brauchen wir die Ungleichung nur für $u \in C^\infty_c(\Omega)$ zu zeigen. OBdA nehmen wir an, dass $\Omega \subset [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Da $u \in C^\infty_c(\Omega)$ ist, setzen wir u trivialerweise auf ganzem $\mathbb{R}^n$ fort. Für $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$ setze $x_a = (a, x_2, \cdots, x_n)$. Nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= |u(x) - u(x_a)|^2 = \left| \int_a^{x_1} \partial_{x_1} u(s, x_2, \cdots, x_n) \right|^2 \\ &\leq (b-a) \int_a^b |\partial_{x_1} u(s, x_2, \cdots, x_n)|^2 \\ &\leq (b-a) \int_a^b |\nabla u(s, x_2, \cdots, x_n)|^2. \end{aligned}$$

Integriere erste über x_1 und dann über die Reste

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \leq (b-a)^2 \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

□

Die Konstante c_0 kann man $c_0 = d = \operatorname{diam}(\Omega)$ wählen, da in den Beweis kann mann $b - a = \operatorname{diam} + \varepsilon$ für jede $\varepsilon > 0$ wählen.

Die Poincaré-Ungleichung gilt auch für L^p, d.h., $\|u\|_{L^p(\Omega} \leq c(p,\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$, $\forall u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Korollar 9.1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Der Raum $H^1_0(\Omega) = W^{1,2}_0(\Omega)$ mit der Norm*

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} := (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist äquivalent zu $(H^1_0(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)})$.

Proof. Nach Lemma 9.1.1 gilt

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1_0(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega),$$

womit folgt, dass $\|u\|_{H^1_0(\Omega)}$ eine Norm ist, die zu $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ äquivalent ist. □

Für den Raum $H_0^1(\Omega)$ benutzt man normalerweise die Norm $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. Das zugehörige Skalarprodukt ist

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle.$$

$(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot\rangle_{H_0^1})$ ist ein Hilbertraum.

Als Anwendung zeigen wir (vergleichen Sie Theorem 7.2.7)

Theorem 9.1.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Weiter ist $f \in L^2(\Omega)$. Dann besitzt dads Funktional*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu$$

einen Minimum.

Proof. Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge von J, d.h., $u_k \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$J(u_k) \to \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} J(u) =: \alpha.$$

OBdA kdironnen wir annehmen, dass $J(_k) \leq \alpha+1$ für alle u_k. Mit Cauchy-Schwarz und Poincaré haben wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega fu &\leq \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\
&\leq c_0\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2} \\
&\leq c_0\left\{c_0\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{c_0}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right\} \\
&\leq c_0^2\|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|\nabla u\|_{L^2}^2, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\alpha + 1 \geq J(u_k) \geq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nu|^2 - c_0^2\|f\|_{L^2}^2.$$

Damit ist $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $H_0^1(\Omega)$ beschränkt. Nach Theorem 7.2.4 gibt es eine Teilfolge $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ konvergiert. da die Norm $\|\cdot\|_{H_0^1}$ unterhalbstetig bzlg. der schachen Konvergenz, gilt

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^2 \leq \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 = \alpha.$$

Andererseits gilt

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega fu_k = \int_\Omega fu_0,$$

denn u_k ist schwach konvergent in $H_0^1(\Omega)$, und dann in $L^2(\Omega)$. Insgesammt gilt

$$J(u) \leq \liminf J(u_k) = \alpha,$$

also $J(u) = \alpha = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} J(u)$. □

Da u_0 ein Minimum von J in $H_0^1(\Omega)$ ist, erfüllt die Funktion u_0

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi + uf = 0, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{9.1}$$

Der Beweis folgt direkt von die Berechung

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=0} J(u + t\varphi).$$

Falls zusätzlich $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ und $f \in C^0(\Omega)$ sind, gilt nach Gauss und dem Fundamentallemma von Variationsrechnung

$$-\Delta u + f = 0 \tag{9.2}$$

mit dem Dirichletrandwert

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

D.h., u ist eine (klassische) Lösung von (9.2) mit dem Dirichletrandwert. Allgemeiner heißt eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$, die (9.1) erfüllt, eine schwache Lösung von (9.2). (9.1) ist eine schwache Formulierung von der Gleichung (9.2).

Also, wir haben

Korollar 9.1.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Weiter ist $f \in L^2(\Omega)$. Dann besitzt* (9.2) *eine schwache Lösung.*

Unter geeigneter Regularitätsbedingung von $\partial\Omega$ und f kann man zeigen, dass u auch regular ist und somit ist eine klassische Lösung von (9.2). Die Regularitätstheorie ist die haupte Aufgabe von der Vorlesung "partielle Differentialgleichungen".

9.2. **Satz von Lax-Milgram.**

Als eine Folgerung von Darstellungssatz von Riesz (Satz 5.2.5) haben wir

Theorem 9.2.1 (Darstellung von Bilinearformen)**.** *Sei $B : X \times X \to \mathbb{K}$ beschränkte Sesquilinearform auf dem Hilbertraum X, d.h., für alle $x, y, z \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*

(i) $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z)$

(ii) $B(z, \alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} B(z, x) + \bar{\beta} B(z, x)$

mit $\|B\| = \sup_{\|x\|, \|y\|=1} |B(x, y)| < \infty$. Dann gibt es genau ein $T = T_B \in L(X, X)$ mit

$$B(y, x) = \langle y, Tx \rangle \qquad \textit{für alle } x, y \in X.$$

Außerdem gilt $\|T\| = \|B\|$.

Proof. Definiere

$$\mathcal{R}_B : X \to X^*, \quad (\mathcal{R}_B x)(y) = B(x, y).$$

Nach Voraussetzung (i) ist $B : X \times X \to \mathbb{K}$ stetig. Also ist $\mathcal{R}_B : X \to X^*$ auch stetig nach Proposition 2.2.10. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Satz 5.2.5) existiert für jede $\mathcal{R}_B x \in X^*$ ein $Tx \in X$ mit

$$\mathcal{R}_B x(y) = \langle y, Tx \rangle, \quad \forall x \in X$$

und

$$\|\mathcal{R}_B x\| = \|Tx\|.$$

Nach der Bezeichung von Theorem 5.2.5 gilt $Tx = I(\mathcal{R}_B x)$, wobei $I : X^* \to X$ bijektiv, isometrisch und konjugiert linear ist.

Es ist leicht nachzuprüfen alle Aussagen über T.

□

Theorem 9.2.2 (Satz von Lax-Milgram)**.** *Sei $B : X \times X \to \mathbb{K}$ beschränkte Bilinearform auf dem reellen Hilbertraum X, und B sei koerziv:*

$$\Re B(x, x) \geq \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \in X, \ \textit{mit einem } \lambda > 0. \tag{9.3}$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{R}_B : X \to X^*, \quad (\mathcal{R}_B x)(y) = B(x, y)$$

invertierbar (insbesondere surjektiv) und

$$\|\mathcal{R}_B^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}.$$

Zusatz. Sei B symmetrisch. Dann ist $\mathcal{R}_B^{-1}\varphi = x_0$ die eindeutig bestimmte Minimalstelle des Funktionals

$$Q(x) = \frac{1}{2}B(x,x) - \Re\varphi(x),$$

für $\varphi \in X^*$.

Proof. Aus dem Riesz'schen Darstellungssatz Satz, Theorem 5.2.5 (sehen Theorem 9.2.1 oben), gibt $T = T_B \in L(X,X)$ mit

$$B(y,x) = \langle y, Tx\rangle \qquad \text{für alle } x,y \in X.$$

Außerdem gilt, nach der Koerzivitätsbedingung (9.3),

$$\lambda\|x\|^2 \le \Re B(x,x) = \Re\langle x, Tx\rangle \le \|x\|\|Tx\|, \quad \forall x \in X,$$

also

$$\lambda\|x\| \le \|Tx\|, \quad \forall x \in X, \tag{9.4}$$

woraus folgt, dass $N(T) = \{0\}$ ist. Außderm gilt, dass der Bildraum $R(T)$ abgeschlossen ist. Das können wir so zeigen: für $x_k, y \in X$ mit $Tx_k \to y$ ist Tx_k eine Cauchyfogle:

$$\|x_k - x_l\| \le \frac{1}{\lambda}\|Tx_k - Tx_l\|,$$

woraus konvegiert x_k gegen $x \in X$. Aus der Stetigkeit von T folgt $Tx_k \to Tx$, also $y = Ax$. Zu zeigen bleibt $R(T) = X$. Falls $R(T) \ne X$, nach dem Projektionssatz (genauer Korollar 5.2.4) gilt $y \in R(T)^\perp$, d.h.

$$\langle Tx, y\rangle = 0, \quad \forall x \in X.$$

Daraus folgt

$$0 = \Re\langle Ty, y\rangle = \Re\langle y, Ty\rangle \le \lambda\|y\|^2 > 0,$$

ein Widerspruch. Damit ist T bijektiv. Aus (9.4) folgt dann $\|T^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}$. Da $T = I \circ \mathcal{R}_B$ ist, folgt

$$\|\mathcal{R}_B^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda},$$

denn I ist bijektiv und isometrisch.

Für $\varphi \in X^*$, ist $x_0 = \mathcal{R}_B^{-1}\varphi \in X$. Bei Definition gilt

$$\varphi(y) = \mathcal{R}_B x_0(y) = B(x_0, y), \qquad \forall y \in X.$$

Für $y \in X$ ist

$$\begin{aligned}
Q(y) - Q(x_0) &= \frac{1}{2}(B(y,y) - B(x_0,x_0)) - \Re\varphi(y - x_0)\\
&= \frac{1}{2}(B(y,y) - B(x_0,x_0)) - \Re B(x_0, y{-}_0)\\
&= \frac{1}{2}(B(y,y) - B(y,x_o) - B(x_0,y)) + B(x_0,x_0))\\
&= \frac{1}{2}B(y - x_0, y - x_0) \ge \frac{1}{2}\lambda\|y - x_0\|^2.
\end{aligned}$$

Aslo ist x_0 ein Minimier. □

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$, $a = (a_{\alpha\beta})_{1\le\alpha,\beta\le n}$ und sei L ein Operator

$$Lv = -\mathrm{div}(aDv) = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\alpha(a_{\alpha\beta}\partial_\beta v).$$

Definition 9.2.3. Die L zugeordnete Bilinearform auf dem Hilbertraum $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist

$$B(u,v) = \int_\Omega \langle Du, aDv\rangle = \int_\Omega a_{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta v$$

B ist beschränkt.

Definition 9.2.4. Wir fassen L auf als Operator

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)', \quad (Lu)(v) = \int_\Omega a_{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta v = B(u,v).$$

L ist stetig.

Wir interessieren uns nun dafür, ob L surjektiv ist. Wir wollen den Satz von Lax-Milgram verwenden.

Frage: ist B koerziv auf $W_0^{1,2}(\Omega)$?

Lemma 9.2.5. *Sei L elliptisch mit Konstante $\mu > 0$, d.h.,*

$$\langle \xi, a(x)\xi\rangle \geq \mu|\xi|^2 \quad \textit{für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist die zugeordnete Bilinearform B auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ koerziv mit Konstante $\lambda = \frac{\mu}{(1+d)^2}$, $d = \operatorname{diam}\Omega$.

Theorem 9.2.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $a \in L^\infty(\Omega, M_n(\mathbb{R}))$ sei elliptisch mit Konstante $\mu > 0$. Dann ist $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ invertierbar und $\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$.*

Beispiel 9.2.7. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Definiere $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$,

$$\varphi(u) = \int fu.$$

Die Operator Norm von φ ist

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,2}}=1} \int uf \leq \sup_{u\in W_0^{1,2}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,2}}=1} \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\ &\leq d^2\|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

wobei $d = \operatorname{diam}\Omega$. Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ Lösung von $Lv = \varphi$. Dann gilt

$$\int \langle Du, aDv\rangle = \int fu \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

mit $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu}\|\varphi\| \leq \frac{d^2}{\mu}\|f\|_{L^2}.$$

v heißt schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lv = f \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beispiel 9.2.8. Sei $g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Definiere $\gamma \in W_0^{1,2}(\Omega)'$

$$\gamma(u) = -\int_\Omega \langle Du, g\rangle.$$

Man kann zeigen, dass gilt $\|\gamma\| \leq \|g\|_{L^2}$. Sei $v \in W^{1,2}(\Omega)$ Lösung von $Lv = \gamma$. Wir haben

$$\|v\|_{W^{1,2}} \leq \frac{1}{\mu}\|g\|_{L^2}$$

und

$$\int \langle Du, aDv \rangle = -\int \langle Du, g \rangle, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

v ist schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lv = \operatorname{div} g \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$