mit $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu}\|\varphi\| \leq \frac{d^2}{\mu}\|f\|_{L^2}.$$

v heißt schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lv = f \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Beispiel 11.2.8. Sei $g \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Definiere $\gamma \in W_0^{1,2}(\Omega)'$

$$\gamma(u) = -\int_\Omega \langle Du, g\rangle.$$

Man kann zeigen, dass gilt $\|\gamma\| \leq \|g\|_{L^2}$. Sei $v \in W^{1,2}(\Omega)$ Lösung von $Lv = \gamma$. Wir haben

$$\|v\|_{W^{1,2}} \leq \frac{1}{\mu}\|g\|_{L^2}$$

und

$$\int \langle Du, aDv\rangle = -\int \langle Du, g\rangle, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

v ist schwache Lösung des Randwertproblems

$$Lv = \operatorname{div} g \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

12. $L^p(\Omega)$

Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. In diesem Kapital schreiben wir q manchmal auch mit p'. Für $v \in L^q(\Omega)$ definiere ein lineares Funktional

$$L_v : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto L_v(u) := \int_\Omega u \cdot v.$$

nach der Hölder-Ungleichung gilt

$$|L_v(u)| \leq \|v\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Damit ist L_v beschränkt mit der Operator-Norm $\|L_v\| \leq \|v\|_{L^q(\Omega)}$. Man kann zeigen, dass $\|L_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)}$. Falls $1 < p \leq \infty$ wählen wir

$$u(x) = \begin{cases} |v(x)|^{q-2}\overline{v(x)}, & \text{falls } v(x) = 0 \\ 0, & \text{sonst }. \end{cases}$$

Es ist leicht to prüfen, dass $u \in L^p(\Omega)$ mit $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{q}{p}}$. Also

$$L_v(u) = \int_\Omega |v|^q = \|v\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)},$$

daraus folgt $\|L_v\| \geq \|v\|_{L^q(\Omega)}$, also $\|L_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)}$. Nun betrachte den Fall $p = 1$ (und $q = \infty$), und zwar $v \neq 0$ (Der Fall $v = 0$ ist offensichtlich.) Seien $0 < \varepsilon < \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ und eine Teilmenge $A \subset \Omega$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ und $|v(x)| > \|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon$ in A. Definiere $u(x) = \overline{v(x)}/|v(x)|$ in A und $u(x) = 0$ sonst. Dann gilt $u \in L^1(\Omega)$ und

$$L_v(u) = \int_A |v(x)| < (\|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon)\mu(A) = (\|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon)\|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Es folgt $\|L_v\| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon$, für alle klein $\varepsilon > 0$. Also haben wir $\|L_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)}$ gezeigt. Die obige Überlegung impiezirt dass die Abbildung

$$L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)', \quad v \mapsto Lv$$

eine isometrische Einbettung ist. Nun fragen wir, ob diese Abbildung surjektiv ist.

12.1. $1<p<\infty$. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $1<p<\infty$.

Wir brauchen

Lemma 12.1.1 (Clarkson-Ungleichungen)**.** *Seien $u,v\in L^p(\Omega)$ und $1<p<\infty$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Für $2\le p<\infty$ gilt*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \le \frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^2 \tag{12.1}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^q \ge \left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^2\right)^{q-1}. \tag{12.2}$$

Für $1<p\le 2$ gilt

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p \ge \frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^2 \tag{12.3}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^q+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^q \le \left(\frac{1}{2}\|u\|_p^p+\frac{1}{2}\|v\|_p^2\right)^{q-1}. \tag{12.4}$$

Proof. Hier zeigen wir nur den Fall $2\le p<\infty$. Für (12.1) benötigen wir nur die Folgende zu zeigen

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p+\left|\frac{a-b}{2}\right|\le\frac{1}{2}(|a|^p+|b|^p),\qquad \forall a,b>0$$

Man zeige zunächst

$$\alpha^p+\beta^p\le(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{p}{2}},\quad \forall,\alpha,\beta\ge 0.$$

Wegen Homogenität der Ungleichung benötigen wir nur für den Fall $\beta=1$ zu zeigen. Diese folgt aus der Positivität der Funktion $f(x):=(x^2+1)^{\frac{p}{2}}-x^p-1$. Denn f ist monoton steigend. Seien $\alpha=\left|\frac{a+b}{2}\right|$ und $\beta=\left|\frac{a-b}{2}\right|$ haben wir

$$\begin{aligned}\left|\frac{a+b}{2}\right|^p+\left|\frac{a-b}{2}\right| &\le \left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^2+\left|\frac{a-b}{2}\right|^2+\right)^{\frac{p}{2}}\\ &= \left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\le\frac{1}{2}|a|^p+\frac{1}{2}|b|^p.\end{aligned}$$

In der letzen Ungleichung benuzten wir die konvexität von $x^{\frac{p}{2}}$, denn $p\ge 2$.

Für die Reste bitte sehen Sie das Buch “Sobolev Spaces” von Robert Adams und John Fournier,

□

Theorem 12.1.2 (Gleichmäßige Konvexität)**.** *Sei $1<p<\infty$. Dann ist $L^p(\Omega)$ gleichmäßig konvex, d.h., zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ exisiert, so dass für alle $u,v\in L^p(\Omega)$ gilt dass*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}\le 1,\|v\|_{L^p(\Omega)}\le 1 \text{ und } \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p(\Omega)}>1-\delta\Rightarrow\|u-v\|_{L^p(\Omega)}\le\varepsilon.$$

Proof. Der Beweis für $2\le p<\infty$ (bzw. $1<p\le 2$) folgt aus (12.1) (bzw. (12.4)). □

Vergleichen Sie die Clarkson-Ungleichungen mit der Parallelogrammgleichung für Hilberträume

$$\|\frac{u+v}{2}\|^2+\|\frac{u-v}{2}\|^2=\frac{1}{2}\{\|u\|^2+\|v\|^2\}$$

Lemma 12.1.3. *Sei* $1 < p < \infty$.

(i) Ist $T \in (L^p(\Omega))'$ *mit* $\|T\| = 1$. *Dann existiert genau ein* $w \in L^p(\Omega)$ *mit* $\|w\|_{L^p(\Omega)} = Tw = 1$.

(ii) Ist $w \in L^p(\Omega)$ *mit* $\|w\|_{L^p(\Omega)} = 1$. *Dann existiert genau ein* $T \in (L^p(\Omega))'$ *mit* $\|T\| = Tw = 1$

Proof. (i) Ist $T \in (L^p(\Omega))'$ mit $\|T\| = 1$. Bei Definition gilt

$$\sup_{u \in L^p(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)}=1} |Tu| = 1.$$

Wir suchen den Maximumpunkt von $|Tu|$ in $\{\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1\}$. Sei $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Maximale Fogle, d.h., $\|u_k\| = 1$ mit $|Tu_k| \to 1$ als $k \to \infty$. OBdA können wir annehmen, dass $\frac{1}{2} < Tu_k \to 1$. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir $\frac{u_k+u_l}{2}$ für hinreichend groß k, l mit $Tu_k > 1-\delta$ und $Tu_l > 1-\delta$. Ed folgt $T\frac{u_k+u_l}{2} > 1-\delta$. Da $\|T\| = 1$, folgt

$$\frac{u_k+u_l}{2} \geq 1-\delta.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvexität von $L^p(\Omega)$ gilt $\|u_k - u_l\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$. D.h., $\{u_k\}$ ist eine Cauchyfolge. Also existiert $w \in L^p(\Omega)$ mit $u_k \to w$ in $L^p(\Omega)$. Es gilt $w \in L^p(\Omega)$ mit $\|w\|_{L^p(\Omega)} = Tw = 1$. Die Eindeutigkeit folgt aus gleicher Überlegung mit der maximale Folge $w, u, w, u, \cdots$, falls w und v zwei Lösungen sind. Der obige Beweis impliziert dass die Folge $w, u, w, u, \cdots$ Cauchyfolge ist, somit $w = u$ ist.

(ii) Ist $w \in L^p(\Omega)$ mit $\|w\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Definiere wie oben ein Funktional L_v durch

$$L_v(u) = \int_\Omega uv, \qquad \text{für } u \in L^p(\Omega),$$

wobei v durch

$$v(x) = \begin{cases} |w(x)|^{q-2}\overline{w(x)}, & \text{falls } w(x) = 0 \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases} \tag{12.5}$$

definiert ist. Wie oben, es ist leicht zu prüfen, dass $v \in L^p(\Omega)$ und $Lv(w) = \|w\|^p_{L^p(\Omega)} = 1$ und $\|L_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)} = \|w\|^{p/q}_{L^p(\Omega)} = 1$. Dies zeigt die Existenz. Nun zeigen wir die Eindeutigkeit. Wir zeigen: Seien zwei $T_1, T_2 \in (L^p(\Omega))'$ mit $\|T_1\| = \|T_2\| = 1$ und $T_1(w) = T_2(w) = 1$, dann gilt $T_1 = T_2$. Falls nicht, dann existiert $u \in L^p(\Omega)$ mit $T_1(u) \neq T_2(u)$. Beim Ersetzen u durch λu für eine geeignete Konstante λ können wir annemhen, dass $T_1(u) - T_2(u) = 2$. Beim Ersetzen u mit durch $u + \lambda w$ für eine geeignete Konstante λ können wir weiter annemhen, dass $T_1(u) = 1$ und $T_2(u) = -1$. Für $t > 0$, gilt $T_1(w+tu) = 1+t$. Es folgt $\|w+tu\|_{L^p(\Omega)} \geq 1+t$, denn $\|T_1\| = 1$. Analog $\|w-tu\|_{L^p(\Omega)} \geq 1+t$ folgt aus $T_2(w-tu) = 1+t$. Falls $1 < p \leq 2$, gilt nach der Clarkson-Ungleichung (12.4)

$$\begin{aligned} 1 + t^p\|u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \left\|\frac{w+tu)+(w-tu)}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{w+tu)-(w-tu)}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|w+tu\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|w-tu\|^p_{L^p(\Omega)} \geq (1+t)^p, \end{aligned}$$

welche unmöglich für alle $t > 0$ gilt. Analog, für $2 \leq p < \infty$ impiezirt die Clarkson-Ungleichung (12.2)

$$\begin{aligned} 1 + t^{p'}\|u\|^{p'}_{L^p(\Omega)} &= \left\|\frac{w+tu)+(w-tu)}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{w+tu)-(w-tu)}{2}\right\|^{p'}_{L^p(\Omega)} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\|w+tu\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\|w-tu\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{p'-1} \geq (1+t)^{p'}, \end{aligned}$$

auch unmöglich für alle $t > 0$. $\square$

Theorem 12.1.4 (Reiszscher Darstellungssatz für $L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$)**.** *Sei $1 < p < \infty$ und sei $T \in (L^p(\Omega))'$. Dann existiert $v \in L^p(\Omega)$, so dass*

$$Tu = L_v(u) = \int_\Omega uv, \qquad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Weiter gilt $\|v\|_{L^q(\Omega)} = \|T\|$. D.h., der dual Raum von $L^p(\Omega)$, $(L^p(\Omega))'$ isometrisch isomorph zum $L^q(\Omega)$ ist.

$$(L^p(\Omega))' \cong L^{p'}(\Omega).$$

Proof. Falls $T = 0$, nehmen wir einfach $v = 0$. Also können wir annehmen, dass $T \neq 0$, und oBdA sogar $\|T\| = 1$. Nach Theorem 12.1.3 existiert $w \in L^p(\Omega)$ mit $\|w\|_{L^p(\Omega)} = 1$ und $Tw = 1$. Definiere v durch (12.5). Dann gilt $\|v\|_{L^q(\Omega)} = \|L_v\| = 1$ und $L_v(w) = 1$. Bei der zweiten Aussage in Lemma 12.5 erhalten wir

$$T = L_v.$$

□

Theorem 12.1.5. *Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(\Omega)$ separable.*

Proof. Sei I die Menge aller Quader $Q = \Pi_{k=1}^n (a_k, b_k)$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ und $Q \subset \Omega$. E sei der $\mathbb{Q}$-Vekotrraum gespannt von der charaktrischen Funktionen χ_Q $(Q \in I)$ gespannte $\mathbb{Q}$-Vekotrraum. E ist abzählbar. Wir bleiben noch die Dichtheit von E in $L^p(\Omega)$ zu zeigen. Da $C_c(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ dicht ist, brauchen wir nur die Dichtheit von E in $C_c(\Omega)$ zu zeigen. □

12.2. $p = 1$ **oder** $p = \infty$.

Theorem 12.2.1 (Reiszscher Darstellungssatz für $L^1(\Omega)$)**.** *Sei $T \in (L^1(\Omega))'$. Dann existiert $v \in L^\infty(\Omega)$, so dass*

$$Tu = \int_\Omega uv, \qquad \forall u \in L^1(\Omega).$$

Weiter gilt $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \|T\|$. Also

$$(L^1(\Omega))' \cong L^\infty(\Omega).$$

Proof. ObdA nehmen wir an, dass $T \neq 0$ und $\|T\| = 1$.

(i) $\mu(\Omega) < \infty$. In diesem Fall kann man zeigen, dass $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ und

$$|Tu| \leq \|u\|_1 \leq (\mu(\Omega))^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_p, \qquad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Es folgt $T \in (L^p(\Omega))'$. Nach Theorem 12.1.5 existiert $v_p \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$Tu = \int_\Omega uv_p, \qquad \forall u \in L^p(\Omega) \tag{12.6}$$

und

$$\|v_p\|_{p'} \leq \big(\mu(\Omega)\big)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{12.7}$$

Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ ist, aus (12.6) gilt für beliebige $1 < p, q < \infty$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi v_p = T\varphi = \int_\Omega \varphi v_q,$$

Es folgt $v_p = v_q$ f. ü. in Ω. Also $v = v_p \in L^p(\Omega)$ erfüllt (12.6) für alle $1 < p < \infty$. Aus (12.7) gilt

$$\|v\|_{p'} \leq \big(\mu(\Omega)\big)^{1-\frac{1}{p}} = (\mu(\Omega))^{1/p'}.$$

Mit der Aufgabe 3 in Serie 3 zeigen wir, dass $v \in L^\infty(\Omega)$ und

$$\|v\|_\infty \leq \lim_{p' \to \infty} (\mu(\Omega))^{1/p'} = 1.$$

Wie im Anfang des Kapitals kann man zeigen, dass $\|v\|_\infty = 1$.

□

12.3. **Reflexivität und Separabilität von** $L^p(\Omega)$.

Theorem 12.3.1 (Reflexivität von $L^p(\Omega)$)**.** *$L^p(\Omega)$ ist genau dann reflexiv, wenn $1 < p < \infty$.*

Proof. Sei $1 < p < \infty$ Sei $X = L^p(\Omega)$. Da $X' \cong L^{p'}(\Omega)$, erhalten wir

$$X'' \cong (L^{p'}(\Omega))' \cong L^p(\Omega).$$

D.h., für alle $x'' \in X''$ existert $x \in L^p(\Omega) = X$ mit

$$x''(x') = x'(x) = Jx(x'), \qquad \forall x' \in X',$$

also X ist reflexiv.

$L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'$ sind not reflexiv. Denn $L^1(\Omega)$ ist separabel und $L^\infty(\Omega)$ nicht. (Siehe Theorem 12.3.3 unten.) Wir hahen auch einen direkten Beweis in dem folgen Lemma. □

Lemma 12.3.2. *$L^1(\Omega)$ ist nich reflexiv. Dann ich $L^\infty(\Omega)$ auch nicht reflexiv.*

Proof. OBdA nehmen wir an, dass $\Omega \in \Omega$. Betrachte eine Filge $f_k = \alpha_k \chi_{B_{\frac{1}{k}}(0)}$ mit hinreichend groß k, so dass $B_{\frac{1}{k}}(0) \subset \Omega$, wobei $\alpha_k = \mu(B_{\frac{1}{k}}(0))^{-1}$. Also $\|f_k\|_{L^1} = 1$. Falls $L^1(\Omega)$ reflexiv ist, ist nach Theorem 7.2.4 $\overline{B_1(0)} \subset L^1(\Omega)$ schwach folgenkompakt. Also oBdA konvergiert f_k gegen $x \in L^1(\Omega)$ schwach, d.h.,

$$\int_\Omega f_k \varphi \to \int_\Omega f\varphi, \qquad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega). \tag{12.8}$$

Falls $\varphi \in C_c^\infty(\Omega \backslash \{0\})$, gilt $f_k\varphi = 0$ für hinreichend groß k. Aus (12.8) erhalten wir

$$\int_\Omega f\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega \backslash \{0\}).$$

Es folgt $f = 0$ *f.ü.* in Ω. Dies widerspricht (12.8) mit $\varphi \equiv 1$.

Die 2. Aussage folgt aus Theorem 7.2.2 (iv).

□

Nach Theorem 12.2.1 wissen wir $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$. Es folgt $L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))'$. Man kann zeigen, dass

$$L^1(\Omega) \subsetneq (L^\infty(\Omega))'.$$

D.h. existiert es einen stietigen Funktional $F : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, die nicht solche Form

$$F(f) = \int_\Omega uf \qquad \forall f \in L^\infty(\Omega)$$

hat. ObdA nehmen Wir an, dass $0 \in \Omega$. Definiere $\mathcal{F}_0 : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch $F(f) = f(0)$. man kann zeigen, dass F ein stetiges Funktional von $C_c(\Omega)$ ist. Da $C_c(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, nach Hahn-Banach setzen wir F auf $L^\infty(\Omega)$ fort und erhalten wir einen stetigen Funktional $F : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(f) = f(0), \qquad \forall f \in C_c(\Omega).$$

Wir zeigen, dass keine $u \in L^1$ exisiert mit

$$F(f) = \int uf, \qquad \forall f \in L^\infty.$$

Angenommen, dass solche Funtion u existiert. Dann gilt

$$\int uf = 0, \qquad \forall f \in C_c(\Omega\backslash\{0\}).$$

Daraus folgt $u = 0$ *f.ü.* in $\Omega\backslash\{0\}$, und in Ω. Es folgt

$$F(f) = 0, \qquad \forall f \in L^\infty.$$

Widerspruch.

Theorem 12.3.3. *$L^\infty(\Omega)$ ist nicht separabel.*

Lemma 12.3.4. *Sei X ein Banachraum. Es existiert eine Familie $\{O_i\}_{i\in I}$ mit*

(1) *(i) $\forall i \in I$ ist O_i eine nichtleere offene Teilmenge von X*
(2) *(ii) $O_j \cap O_j = \emptyset$, falls $i \neq j$*
(3) *(iii) I ist nicht anzählbar.*

Dann ist X nicht separabel.

Proof. Ein Widerspruch-Argument. □

Beweis von Theorem 12.3.3. Für jede $a \in \Omega$, fixieren wir r_a mit $0 < r_a < \operatorname{dist}(a, \Omega^c)$. Setze $u_a = \chi_{B_{r_a}(a)}$ und

$$O_a := \{f \in L^\infty(\Omega) : \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}.$$

Man kann leicht zeigen, dass O_a allen Bedingungen in Lemma 12.3.4 erfüllt. □

13. Kompakte Operatoren und Fredholmoperatoren

Motivation: Operator $L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$ $L_0 v = -\operatorname{div}(aDv)$ wie in Subsection 8.3.

$$Kv = -\operatorname{div}(bv) + \langle c, Dv\rangle + qv = \text{Terme niederer Ordnung}$$

oder

$$(Kv)(u) = \int_\Omega (\langle b, Du\rangle v + \langle c, Dv\rangle u + quv).$$

L_0 ist Isomorphismus (Satz von Lax-Milgram). Dagegen ist L aber i.a. kein Isomorphismus.

Beispiel 13.0.5. $Lu = -u'' + u$ auf $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist weder injektiv noch surjektive.

13.1. **Kompakte Operatoren.**

Definition 13.1.1. Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X,Y)$ heißt *kompakt*, falls für jede beschränkte Folge $\{x_n\} \subset X$ die Folge $\{Kx_n\}$ eine konvergente Teilfolge hat. Wir bezeichnen den Vektorraum der kompakten Operatoren mit $K(X,Y) \subset L(X,Y)$.

Lemma 13.1.2. *Für $K \in L(X,Y)$ sind äquivalent:*

(1) *K ist kompakt.*
(2) *$K(M)$ ist relativ kompakt in Y für jede beschränkte Menge $M \subset X$.*
(3) *Falls X reflexiv: K ist vollstetig, d.h., $x_n \rightharpoonup x$ schwach in $X \Longrightarrow Kx_n \to Kx$ stark in Y.*

Beispiel 13.1.3. (1) $K \in L(X,Y)$ mit $\dim \operatorname{Bild} K < \infty \Longrightarrow K$ kompakt.
(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. Inklusion $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ ist kompakt.
(3) $\mathbb{I} \in L(X,X)$ ist nicht kompakt, fall $\dim X = \infty$