Klausur zur Analysis I A WS 11/12

Prof. Dr. G. Wang 1.3.2012

Dr. A. Magni

Beginn: 10:00 Uhr Ende: 13:00 Uhr

Name: .... Vorname: ....

Matr.Nr.: .... Studiengang: ....

Geburtsort: .... Geburtstag: ....

Studiengang: .... Semesterzahl: ....

Bitte Beachten Sie folgende Hinweise:

- Kennzeichen Sie alle Zettel mit Namen und Nummer der Aufgabe.
- Geben Sie alle Zettel, auch die mit Nebenrechnungen, gemeinsam mit dem vollständig ausgefüllten Deckblatt ab.
- Als Hilfsmittel sind nur Stifte zugelassen.
- Ein Täuschungsversuch kann zum sofortigen Ausschluss und Nichtbestehen der Klausur führen.
- Resultate aus der Vorlesung dürfen Sie als bekannt voraussetzen. Begründen Sie nach Möglichkeit stichwortartig Ihre Schritte.
- Insgesamt sind 55 Punkte zu vergeben. Wir stellen uns vor, dass Sie mindestens 20 davon schaffen sollten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit kurzer Begründung).

(a) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (b) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2012} - \sqrt{n})$ (c) $a_n = n(\sqrt[n]{2012} - 1)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i/2)^k}{1 + (1/2)^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}\ (n \in \mathbb{N}).$$

a) Zeigen Sie mittles vollständiger Induktion, dass $a_n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und die Folge (a_n) monoton fallend ist.
b) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, den Betrag sowie die konjugiert-komplexe Zahl zu

$$\frac{2-i}{2+i}$$

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = i$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr sind, jeweils mit Begründung:
(a) M ist beschränkt. (b) M ist offen. (c) M ist abgeschlossen.

Aufgabe 6 (6 Punkte)
(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $\tan(x)^{\tan(x)} : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.
(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + e^x$ besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (muss nicht gezeigt werden). Berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. Ist f' stetig?

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := \sin(x) - e^{-x}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 9 (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^a x\sin(x^2)dx \quad (a > 0). \qquad (b) \int_1^{2012} \log x\, dx. \qquad (c) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx.$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Prüfen Sie auf gleichmäßige Konvergenz, sowie auf gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfunktionen:
$f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\cos(nx)}{n}$ auf $I = [-\pi, \pi]$,

Aufgabe 11 (6 Punkte)
Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die Folge (A_n)

$$A_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k a_k.$$

Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n = a.$$

Gilt die Umkehrung dieses Schlusses?