PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG. Das Skript basiert auf der Bücher von J. Jost, Qing Han und der Skripts von H.-C. Grunau, O. Schnürer,

INHALTSVERZEICHNIS

1. Beispiele der Partiellen Differentialgleichungen

Wir benutzen den folgenden Notationen.

(i) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. In Koordinaten schreiben wir $x = (x^1, \dots, x^n)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

(ii) Ist u bezüglich $x \in \Omega$ hinreichend oft differenzierbar, so bezeichnen wir mit ∇u, $\nabla^2 u$, $\dots$, (oder mit Du, D^2u, $\dots$) erste, zweite, $\dots$ Ableitungen.

Indices bezeichnen partielle Ableitungen

$$u_i = u_{x^i} = \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad u_{ij} = u_{x^i x^j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, \dots .$$

Für $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist t die $(n+1)$-ste Variable, $u(x,t)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ oder $\dot{u} = u_t$.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Definition 1.1. Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung, welche Ableitung einer gesuchten Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ enthält.

Mehr präzise ist

Definition 1.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $u \in C^k(\Omega)$, $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$. Ein Ausdruck der Form

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x\right) = 0$$

heißt Differentialgleichung k-ter Ordnung.

Date: 5. Februar 2025.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35J25.

F kann auch lediglich auf einer offenen Teilmenge definiert oder vektorwertig sein. Auch wenn u nicht klassisch differenzierbar ist, spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

Definition 1.3 (Typeinteilung für Differentialgleichungen zweiter Ordnung)**.**
Sei $F \in C^1\left(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega\right)$.

(i) Eine Differentialgleichung $F\left(D^2u, Du, u, \cdot\right) = 0$ zweiter Ordnung mit $F = F(r_{ij}, p_i, z, u, x)$ heißt (in x entlang einer Lösung u) elliptisch, falls die Ableitung $\left(a^{ij}\right)_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2u(x), Du(x), u(x), x)\right)_{i,j}$ symmetrisch und positiv definit ist. Die Zusätze kann man streichen, wenn dies für alle x bzw. u gilt. Der Operator $u \mapsto F\left(D^2u, Du, u, \cdot\right)$ heißt in diesem Fall elliptisch.

(ii) Sei F elliptisch. Dann heißt die Differentialgleichung $\dot{u} = F\left(D^2u, Du, u, \cdot\right)$ parabolisch.

(iii) Sei F elliptisch. Dann heißt die Differentialgleichung $u_{tt} = F\left(D^2u, Du, u, \cdot\right)$ hyperbolisch.

Beispiel 1.4. Eine Differentialgleichung der Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_i + du = f$$

heißt elliptisch, falls (a^{ij}) symmetrisch und positiv definit ist.

Beispiele 1.5 (Beispiele der elliptischen Gleichungen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) Lineare Gleichungen.

i) Laplacegleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Diese Differentialgleichung ist elliptisch, da $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} = \delta^{ij}$ gilt. Die Lösungen heißen *harmonische Funktionen.*

ii) Poissongleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$-\Delta u = f(u).$$

iii) Eigenwertgleichung oder Helmholtzgleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Quasilineare Gleichungen.

i) p-Laplace Gleichung, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $p > 0$,

$$\operatorname{div}\left(|Du|^{p-2}Du\right) = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i\left(|Du|^{p-2}D_iu\right) = 0,$$

wobei D_i partielle Ableitungen bezeichnet, $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. i. A. ist die p-Laplace Gleichung eine degenerierte elliptische Gleichung.

ii) Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \Delta u - \frac{u^iu^ju_{ij}}{1+|Du|^2} = 0,$$

wobei $u^i := \delta^{ij}u_j$.
Wir verwenden hier die Einsteinsche Summenkonvention, d. h. wir summieren über gleiche „oben“ und „unten“ stehende Indices von 1 bis zur Dimension n, also

$$u^iu^ju_{ij} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} u_iu_ju_{ij}.$$

c) Voll-nichtlineare Gleichungen
Monge-Ampère Gleichung

$$\det D^2u = f(x, u, Du),$$

speziell: Gleichung vorgeschriebener Gaußkrümmung für Graphen

$$\frac{\det D^2u}{(1+|Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}} = f(x, u).$$

Beispiele 1.6.
Wärmeleitungsgleichung, $u : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}$, $T > 0$,

$$\dot{u} = \Delta u.$$

Diese Differentialgleichung ist parabolisch.
Mittlerer Krümmungsfluss für Graphen (MCF)

$$\dot{u} = \sqrt{1+|Du|^2} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right).$$

Wellengleichung, $u : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}$, $T > 0$,

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist hyperbolisch.
Schrödingergleichung, $u : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{C}$, $T > 0$,

$$iu_t + \Delta u = 0.$$

Reaktions-Diffusions Gleichung

$$u_t - \Delta u = f(u).$$

Poröse Medien Gleichung

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0, \quad \gamma > 0.$$

Korteweg-de Vries Gleichung (KdV)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Riccifluss (H. Poincaré, R. Hamilton, G. Perelman)

$$\dot{g}_{ij} = -2R_{ij}.$$

Häufig werden Differentialgleichungen mit Randwerten untersucht, z. B.

(i) Dirichlet Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

(ii) Neumann Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei ν äußeres Normalenfeld von Ω ist.

Manchmal werden Differentialgleichungen auch mitAnfangswerten (oder Anfangs- und Randwerten) untersucht, z. B.,

(i) parabolische Anfangs- und Randwertprobleme

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ u = \varphi & \text{auf } (\partial\Omega \times [0, T)) \cup (\Omega \times \{0\}) \end{cases}$$

(ii) hyperbolische Cauchyprobleme

$$\begin{cases} u_{tt} &= \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,T), \\ (u, u_t) &= (\varphi_0, \varphi_1) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

Bemerkung 1.7 (Untersuchte Fragestellungen)**.**

- Existenz von Lösungen,
- Eindeutigkeit der Lösung,
- Stetige Abhängigkeit einer Lösung von den Daten (u. a. physikalisch wichtig),
- Regularität von Lösungen, z. B. Differenzierbarkeit,
- schwache Lösungen, d. h. Lösungen u einer Differentialgleichung k-ter Ordnung mit $u \notin C^k$.
- quantitatives oder qualitatives Verhalten.
- Klassifikation aller Lösungen, explizite Lösungsformeln.
- ....

Viele Partielle Differntialgleichungen stemmen aus der Naturwissenschaften, insbesondere aus Physik. Hier geben wir Beispiele, die stemmen aus der reinen Mathematik.

1.1. **Separationsansatz, Helmholtzgleichung.** Gehen wir z.B. von der Wellengleichung:

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, & & t \in \mathbb{R}, x \in \Omega \\ u(t,x) &= 0, & & (t,x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega \\ u(0,x) &= \varphi(x), & & x \in \bar{\Omega} \\ u_t(0,x) &= \psi(x) & & x \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

aus, und versuchen(!), die Lösung u in der separierten Form zu finden:

$$(1.2) \qquad \text{Ansatz:} \qquad u(t,x) = v(t)w(x).$$

In dieser Form löst u (1.1) genau dann, wenn

$$v''(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) = 0$$

Ist u eine nichttriviale Lösung, so wird v für fast alle t und w für fast alle x ungleich 0 sein. Für derartige t, x hat man also, dass (1.1) äquivalent zu

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)}$$

ist. Da man t und x unabhängig von einander variieren kann, ist diese Identität also gleichwertig zur Existenz einer Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t, \forall x : \frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)} = -\lambda$$

bzw.

$$(1.3) \qquad -\Delta w(x) = \lambda(x)w(x)$$

und

$$(1.4) \qquad -v''(t) = \lambda v(t).$$

Man nimmt zu (1.3) noch die Randwertvorgabe aus (1.1) hinzu und erhält das Eigenwertproblem für den Laplace-Operator unter Dirichletrandbedingungen, die sogenannte Helmholtzgleichung (Eigenwertproblem):

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} -\Delta w(x) &= \lambda(x)w(x), & & x \in \Omega \\ w(x) &= 0, & & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Bei beschränktem Ω können wir zeigen (Anwendung des Spektralsatz aus der FA), dass (1.5) genau für eine Folge $\lambda_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$ nichttriviale Lösungen w_k besitzt. Für diese λ_k bilden $\cos(\sqrt{\lambda_k} t), \sin(\sqrt{\lambda_k} t)$ ein Fundamentalsystem von (1.4). Mit Lösungen der Form

$$u_k(t,x) = (a_k \cos(\lambda k t) + b_k \sin(\lambda k t)) w_k(x)$$

erreicht man Anfangsdaten

$$u_k(0,x) = a_k w_k(x), \quad u_{k,t}(0,x) = b_k \lambda_k w_k(x)$$

(aber nicht allgemeine φ und ψ). Die allgemeine Lösungen können wir mit

$$u(t,x) = \sum_k u_k(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(\lambda k t) + b_k \sin(\lambda k t)) w_k(x)$$

finden. Hierbei ist $(w_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset L^2(\Omega)$ die Orthonormalsystemen von Eigenfunktionen von (1.3). Die Koeffizienten a_k und b_k sind durch die Anfangsdaten bestimmen.

Ganz analog gelangt man mit dem Separationsansatz (1.2) von dem Anfangs- randwertproblem (1.12) für die Wärmeleitungsgleichung mit $f = 0$ und homoge- nen Dirichletrandbedingungen $h = 0$ zur Helmholtzgleichung (1.3), wobei man anstelle von (1.4)

$$v'(t) = -\lambda v(t)$$

zu lösen hat. Die mit diesem Ansatz gewonnenen Lösungen sind also von der Form

$$u_k(t,x) = a_k^{-\lambda k t} w_k(x).$$

1.2. **Die Minimalflächengleichung, Variationsrechnung, Euler-Lagrange-Gleichung.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein reguläres Gebiet. Zu vorgegebenem stetigem $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sucht man ein $u : \Omega \to \mathbb{R}$, dessen Graph unter der Randhöhenvorgabe $u_{|\partial\Omega} = g$ das Flächenfunktional

$$F(u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx$$

minimiert. Genauer müsste es *n-dimensionales Volumenfunktional* heißen.

Wir nehmen an, wir hätten ein hinreichend glattes derartiges minimales $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ gefunden. Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und $t \in \mathbb{R}$ erfüllt $u + t\varphi$ die Randbedingung $(u + t\varphi)|_{\partial\Omega} = g$. Gemäß unserer Annahme besitzt also die differenzierbare Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(u + t\varphi)$ im Punkte $t = 0$ ein Minimum. Notwendigerweise gilt dann:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(u+t\varphi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla(u(x) + t\varphi(x))|^2} dx \\
&\overset{\text{p.a.I.}}{=} \int_\Omega \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sqrt{1 + |\nabla(u(x) + t\varphi(x))|^2} dx \\
&= \int_\Omega \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \cdot \nabla\varphi(x) dx \\
&\overset{\text{G.}}{=} -\int \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \cdot \varphi(x)
\end{aligned}$$

Da $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ beliebig gewählt werden kann und man $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$ als stetig annehmen kann, muss der letztere Term also identisch verschwinden. Aus der Minimaleigenschaft von u für das Funktional F unter der Randbedingung $u_{|\partial\Omega} = g$ erhalten wir als notwendige Bedingung, dass u eine Lösung des Dirichletproblems für die Minimalflächengleichung ist:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) &= 0, \quad \text{in } \Omega \\
u &= g, \quad \text{auf } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Theorem 1.8 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** *Sei $f \in C^0(\Omega)$ mit*

$$\int_\Omega f\varphi = 0,$$

for alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Dann gilt $f = 0$.

Definition 1.9 (Glatterung)**.** Sei $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\int_\Omega \eta = 1$ und sei $0 \in \Omega$. Für kleine $\varepsilon > 0$ definieren wir $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. Es gilt:

(1) $\int_\Omega \eta_\varepsilon = 1$.
(2) Sei $f \in C^0(\Omega)$. Dann gilt $f_\varepsilon := f \star \eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ und $f_\varepsilon \to f$ lokal gleichmäßig.

Analog kann man zeigen, das Minimum $u \in W^{1,p}$ $(p > 1)$ von

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

in $W_0^{1,p}$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx = 0, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

erfüllt. Diese Gleichung versteht man als schwache Form von die p-Laplacegleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(Übung)

2. Harmonische Funktionen

Wir beginnen diesem Kapital mit dem Gaußschen Integralsatz

2.1. **Gaußscher Integralsatz und Greensche Formeln.**

Theorem 2.1 (Gaußscher Integralsatz, oder Divergenzsatz)**.** *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Für jedes Vektorfeld V der Klasse $C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} V(x) dx = \int_{\partial\Omega} V(y) \cdot \nu(y) dS(y). \tag{2.1}$$

Hierbei ist $\nu(x)$ das normale Einheitsvektorfeld von $\partial\Omega$ am Punkt $x \in \partial\Omega$.

Lemma 2.2 (Greensche Formeln)**.** *Für $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ gelten die erste Greensche Formel*

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x) dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\partial\Omega} v(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \tag{2.2}$$

und die zweite Greensche Formel

$$\int_\Omega \{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)\} dx = \int_{\partial\Omega} \left\{ v(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} dS(y). \tag{2.3}$$

Der Gaußscher Integralsatz spielt eine wichtige Rolle in der Vorlesung. (2.2) und (2.3) werden mehrmals benutzen.

2.2. **Harmonische Funktionen, die Fundamentallösung.**

Definition 2.3 (harmonische Funktion)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u \in C^2(\Omega)$. Dann heißt u (in Ω) harmonisch, falls

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{ii} = 0$$

in Ω gilt. Der Operator Δ heißt Laplaceoperator.

Beispiele 2.4. (i) Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind alle konstanten und allgemeiner alle affin linearen Funktionen harmonisch.

(ii) Es gibt auch harmonische Polynome höherer Ordnung; z. B.

$$u(x) = x_1^2 - x_2^2.$$

.

Beispiel 2.5 (Rotationssymmetrische Lösungen)**.** Sei $u \in C^2(B_R \backslash \{0\})$ eine rotationssymmetrische Lösung von $\Delta u = 0$, d. h. es gibt $v \in C^2((0, R))$, so dass

$$u(x) = v(r),$$

wobei $r = |x| = \left(\sum\limits_{i=1}^n (x^i)^2 \right)^{1/2}$.

Wir leiten zunächst eine gewöhnliche Differentialgleichung für v her: Mit

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = r_i = \frac{x_i}{|x|} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r} = \frac{1}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r} \right),$$

berechnen wir

$$u_i = v'(r) r_i = v' \frac{x_i}{r},$$

$$u_{ij} = v'' \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} + v' \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} \right).$$

Also gilt

$$0 = \Delta u = \delta^{ij} u_{ij} = v'' + v' \frac{n-1}{r}.$$

Entweder gilt $v' \equiv 0$ auf $(0, R)$ oder $v' \neq 0$ auf $(0, R)$. Im Fall $v' > 0$ ergibt sich

$$0 = \frac{v''}{v'} + \frac{n-1}{r} = (\log v')' + \frac{n-1}{r}.$$

Nach dem Integrieren haben wir

$$\begin{aligned} \log v' &= -(n-1) \log r + \log a, \quad a > 0, \\ v' &= \frac{a}{r^{n-1}}. \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für $v' < 0$, dass $v' = \frac{a}{r^{n-1}}$ für ein $a < 0$. Durch Integration erhalten wir im Falle $n = 2$ aus $v' = \frac{a}{r}$, dass $v = a \log r + b$ und im Falle $n \geq 3$ aus $v' = \frac{a}{r^{n-1}}$, dass $v = \frac{a}{-n+2} \frac{1}{r^{n-2}} + b$, jeweils für ein $b \in \mathbb{R}$, ist. D.h.,

$$u(x) = \begin{cases} a \log |x| + b, & n = 2 \\ a|x|^{-(n-2)} + b, & n \geq 3. \end{cases}$$

Definition 2.6 (Fundamentallösung)**.** Die Funktion

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

$\Gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt *Fundamentallösung* der Laplacegleichung.

Hier bezeichnet ω_n den Flächeninhalt von der Einheitsspähere $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Das Volumen von $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist dann $\frac{1}{n}\omega_n$.

Bemerkung 2.7. Die Konstante in der Fundamentalen Lösung sind so gewählt, dass

$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} dS = 1, \qquad \text{für alle } r > 0.$$

gilt.

(Übung.)

Insgesamt haben die Fundamental Lösung die folgende Eigenschaften:

Proposition 2.8 (Eigenschaften der Fundamentalen Lösung)**.** *Die Fundamental Lösung Γ besitzt die folgende Eigenschaften:*

(i) Γ ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, d.h.,

$$\Delta \Gamma = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(ii)

$$\int_{\partial B_r} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} dS = 1, \qquad \text{für alle } r > 0.$$

(iii)

$$\partial_i \Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{x_i}{|x|^n}$$

(iv)

$$\partial_{ij} \Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^n} - n \frac{x_i x_j}{|x|^{n+2}} \right).$$

(v)

$$\Gamma \in L^1(B_r(0)), \quad \nabla\Gamma \in L^1(B_r(0)) \text{ für alle } r > 0.$$

Aber $D^2\Gamma \notin L^1(B_r(0))$.

(vi)

$$\int_{B_r} |\Gamma| dx \to 0 \text{ und } \int_{\partial B_r} |\Gamma| do \to 0, \text{ als } r \to 0.$$

Bemerkung 2.9. Für $x \neq 0$ gelten die Abschätzungen

$$|D\Gamma(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n-1}} \quad \text{und} \quad \left|D^2\Gamma(x)\right| \leq \frac{c}{|x|^n}$$

mit $c = c(n)$.

2.3. Mittelwerteigenschaft.

Theorem 2.10 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $u \in C^2(\Omega)$ *sei harmonisch, d.h.,* $\Delta u = 0$ *(bzw. subharmonisch, d.h.,* $-\Delta u \leq 0$*) Dann gilt*

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u = \fint_{B_r(x)} u,$$

$$u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u,$$

falls $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

Hier definieren wir

$$\fint_{\partial B_r(x)} u = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u \, dS \quad \text{und} \quad \fint_{B_r(x)} u = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u \, dx.$$

Beweis.

(i) Definiere

$$\varphi(r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS.$$

Zeige zunächst, dass φ konstant ist. Mit der Transformation (mit $z = y/r$) gilt es

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \fint_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS(y) = \fint_{\partial B_r(0)} u(x+y) \, dS(y) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(0)} u(x+y) \, dS(y) \\ &\overset{\text{T.}}{=} \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1|} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz) r^{n-1} \, dS(z) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz) \, dS(z). \end{aligned}$$

Wir berechnen die Ableitung von φ

$$
\begin{aligned}
\varphi'(r) &\overset{\text{p.a.I.}}{=} \frac{1}{|\partial B_1|}\int\limits_{\partial B_1(0)} \frac{\partial}{\partial r} u(x+rz)\,dS(z). \\
&\overset{\text{K.}}{=} \frac{1}{|\partial B_1|}\int\limits_{\partial B_1(0)} \langle Du(x+rz), z\rangle\,dS(z) \\
&\overset{\text{T.}}{=} \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1|}\int\limits_{\partial B_r(x)} \left\langle Du(y), \frac{y-x}{r}\right\rangle dS(y) \qquad (z = \frac{y-x}{r}) \\
&= \frac{1}{|\partial B_r|}\int\limits_{\partial B_r(x)} \langle Du(y), \nu\rangle\,dS(y) \\
&\overset{\text{G.}}{=} \frac{1}{|\partial B_r|}\int\limits_{B_r(x)} \Delta u(y)\,dy,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

wobei ν die äußere Normale an $\partial B_r(x)$ ist und wir den Divergenzsatz verwendet haben. Da u harmonisch ist, d.h., $\Delta u = 0$, gilt

$$\varphi' = 0, \quad \forall r \qquad\qquad (\varphi'(r) \ge 0, \quad \forall r).$$

Also ist φ konstant. ($\varphi(r)$ ist monoton steigend.) Da u stetig ist, erhalten wir

$$\varphi(r) = \lim_{t \searrow 0} \varphi(t) = \lim_{t\searrow 0} \fint\limits_{\partial B_t(x)} u(y)\,dy = u(x). \qquad\qquad (u(x) \le \varphi(r).)$$

(ii) Es gilt aufgrund der eben erzielten Ergebnisse

$$\int\limits_{B_r(x)} u(y)\,dy = \int\limits_0^r \int\limits_{\partial B_s(x)} u(y)\,dS(y)\,ds = u(x)\int\limits_0^r \underbrace{\omega_n s^{n-1}}_{=|\partial B_s|}\,ds = \frac{1}{n}\omega_n r^n u(x) = |B_r(x)|u(x).$$

□

Theorem 2.11 (Umkehrung der Mittelwerteigenschaft)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Falls für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS(y)$$

gilt, so ist u harmonisch.

Beweis. Benutze die Notation des Beweises von Theorem 2.10. Ist $\Delta u \not\equiv 0$, so existiert $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so dass (ohne Einschränkung) $\Delta u > 0$ in $B_r(x)$ gilt. Dann folgt mit Hilfe der Rechnungen des Beweises von Theorem 2.10, (2.4)

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int\limits_{B_r(x)} \Delta u > 0.$$

Widerspruch. □

Theorem 2.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Gilt für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint\limits_{B_r(x)} u(y)\,dy,$$

so ist u in Ω harmonisch.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Theorem 2.13 (Starkes Maximumprinzip). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ sei harmonisch. Dann gilt*

(i)
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) Existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, so ist u auf der Zusammenhangskomponente von x_0 konstant.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der zweiten. Daher beweisen wir nur diese.

Definiere
$$A := \left\{ x \in \Omega : u(x) = u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \right\}.$$

A ist relativ abgeschlossen in Ω. Wir behaupten, dass A relativ offen ist. Sei $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, $x \in A$. Es folgt

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} u &= u(x) = \fint_{B_r(x)} u \quad \text{(Mittelwerteigenschaft)} \\ &\le \fint_{B_r(x)} \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega}} u \end{aligned}$$

daraus folgt $u|_{B_r(x)} = \max_{\overline{\Omega}} u$ ist, also $B_r(x) \subset A$. Damit ist A relativ offen in Ω. $\square$

Als eine direkten Anwendung haben wir eine Eindeutigkeit von der Laplacegleichung.

Theorem 2.14 (Eindeutigkeit). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Randwertproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \textit{in } \Omega, \\ u = g & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

Beweis. Seien u und $\tilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ Lösungen. Dann erfüllt $w := u - \tilde{u}$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Das Maximumprinzip impliziert nun, dass $w = 0$ in Ω gilt. $\square$

Sie vergleichen diesen Theorem mit einer Übung.

2.4. **Regularität und innere Abschätzungen.**

Theorem 2.15 (Regularität). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Erfüllt u die Mittelwerteigenschaft $u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u$ für alle Kugeln $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Wir bemerken, dass es genügt, kleine Kugeln zu betrachten.

Beweis. Sei η ein Friedrichscher Glättungskern ("mollifier"). Definiere in

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

die Funktionen
$$u_\varepsilon := \eta_\varepsilon * u,$$

wobei
$$\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ist. Es gilt $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Wir zeigen nun, dass $u = u_\varepsilon$ in Ω_ε gilt. Hieraus folgt $u \in C^\infty(\Omega)$. Sei also $x \in \Omega_\varepsilon$. Wir benutzen die leicht doppeldeutige Notation $\eta(x) = \eta(|x|)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy \\
&\overset{\text{T.}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_r(x)} u \right) dr \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \omega_n r^{n-1}\,dr \qquad \text{(Mittelwerteigenschaft)} \\
&= u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon = u(x). \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.16. Der Satz gilt auch unter schwacherer Voraussetzung: *Für jedes $x \in \Omega$ existiert ein $r_0 > 0$ so dass die Mittelwerteigenschaft gilt für alle $B_r(x)$ mit $r \leq r_0$. Dann ist u glatt und harmonisch.*

Korollar 2.17. *Eine stetige Funktion $u \in C^0(\Omega)$ ist genau harmonisch, dann wenn u die Mittelwerteigenschaft erfüllt.*

Daher werden wir in Zukunft annehmen, dass harmonische Funktionen von der Klasse C^∞ sind.

Theorem 2.18 (Innere Abschätzungen für harmonische Funktionen)**.** *Sei $u \in C(\overline{B}_R(x_0))$ harmonisch in $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\overline{B}_R(x_0)} |u|.$$

Beweis. Wir haben schon gezeigt, dass $u \in C^\infty(B_R(x_0))$. OBdA können wir annehmen, dass $u \in C^\infty(\overline{B}_R(x_0))$. Ansonst betrachten wir u in $\overline{B}_r(x_0)$ für beliebige $r < R$ und den Grenzübergang $r \to R$. da $u \in C^\infty$, gilt $\Delta(u_i) = \partial_i(\Delta u) =$ für $i = 1, \cdots, n$. In anderer Wort, ist u_i harmonisch. Daher gilt die MWE für u_i, aslo

$$\begin{aligned}
\partial_i u(x_0) \quad &= \quad \fint_{B_R(x_0)} \partial_i u(y) dy = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} \partial_i u(y) dy \\
&\overset{\text{G.}}{=} \quad \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \nu_i dS_y.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|\partial_i u(x_0)| \quad &\leq \quad \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_r(x_0)} |u(y)| dS_y \\
&\leq \quad \frac{n}{\omega_n R^n} \max_{\partial \overline{B}_R(x_0)} |u| \cdot \omega_n R^{n-1} \leq \frac{n}{R} \max_{\overline{B}_R(x_0)} |u|
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.19 (Höhrere innere Abschätzungen für harmonische Funktionen)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und u in Ω harmonisch. Sei $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ und sei α ein Multiindex der Ordnung k, $|\alpha| = k$. Dann gilt

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{n^k e^{k-1} k!}{R^k} \max_{\overline{B}_R(x_0)} |u|, \qquad (k \geq 1)$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach k.

(i) $k = 1$: Theorem 2.18.

(ii) $k \geq 2$: Angenommen gilt die Abschätzung für k. Wir werden zeigen, dass die Abschätzung für $k+1$ gilt. Sei v eine beliebige Ableitung von u von Ordnung k. Es ist klar, dass v auch harmonisch ist. Für alle $\vartheta \in (0,1)$, wenden wir Theorem 2.18 auf v in $B_{(1-\vartheta)R}(x_0)$ an und erhalten wir

$$|\nabla v(x_0)| \leq \frac{n}{(1-\vartheta)R} \max_{B_{(1-\vartheta)R}(x_0)} |v|.$$

Für $x \in B_{(1-\vartheta)R}(x_0)$ gilt $B_{\vartheta R}(x) \subset B_R(x_0)$. Nach Induktionsannahme haben wir

$$|v(x)| \leq \frac{n^k e^{k-1} k!}{(\vartheta R)^k} \max_{\overline{B}_{\vartheta R(x)}} |v|, \quad \forall x \in B_{(1-\vartheta)R}(x_0)$$

Es folgt

$$\max_{\overline{B}_{(1-\vartheta)R}(x_0)} |v| \leq \frac{n^k e^{k-1} k!}{(\vartheta R)^k} \max_{\overline{B}_{R(x)}} |u|.$$

Also,

$$|\nabla v(x_0)| \leq \frac{n^{k+1} e^{k-1} k!}{(1-\vartheta)\vartheta^k R^{k+1}} \max_{\overline{B}_{R(x)}} |u|.$$

Wähle $\vartheta = k/(k+1)$ und erhalte

$$\frac{1}{(1-\vartheta)\vartheta^k} = (1 + \frac{1}{k})^k (k+1) < e(k+1).$$

Es folgt

$$|\nabla v(x_0)| \leq \frac{n^{k+1} e^k (k+1)!}{R^{k+1}} \max_{\overline{B}_{R(x)}} |u|.$$

□

Theorem 2.20 (Satz von Liouville)**.** *Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.*

Beweis. Sei $|u(x)| \le M$ für alle $x \in R^n$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Nach Theorem 2.18 gilt

$$|\nabla u(x_0)| \le \frac{n}{r} \max_{\overline{B}_r(0)} |u| \le \frac{n}{r} M \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

Es folgt $|Du(x_0)| = 0$. Somit ist u konstant. □

2.5. **Harnackungleichung.** Wir können Theorem 2.18 verbessern.

Theorem 2.21. *Sei $u \in C(\overline{B}_R(x_0))$ harmonisch in $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ und $u \ge 0$ in $B_R(x_0)$. Dann gilt*

$$|\nabla u(x_0)| \le \frac{n}{R} u(x_0).$$

Beweis. Wie in den Beweis von Theorem 2.18 gilt

$$\begin{aligned} |\partial_i u(x_0)| &\le \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_r(x_0)} |u(y)| dS_y = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) dS_y \\ &= \frac{n}{R} u(x_0) \qquad\qquad (MWE) \end{aligned}$$

□

Theorem 2.22 (Harnackungleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $u > 0$ in Ω. Sei $\Omega_1 \Subset \Omega$ offen und zusammenhängend. Dann gibt es $c = c(n, \Omega_1, \Omega)$, so dass*

$$\sup_{\Omega_1} u \le c \cdot \inf_{\Omega_1} u$$

gilt.

Für $x, y \in \Omega_1$ folgt also

$$\frac{1}{c} u(y) \le u(x) \le c \cdot u(y),$$

d. h. die Funktionswerte von u in Ω_1 sind untereinander vergleichbar.

Beweis. Erstens, oBdA. könenn wir annemhen, dass $u > 0$ in $B_R(x_0)$. Ansonst betrachten wir $u + \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$, zeigen entsprechende Abschätzung und lassen $\varepsilon \to 0$. Für alle $x \in B_{R/2}(x_0)$, gilt $B_{R/2}(x) \subset B_R(x_0)$.

Beweis 1. Definiere $r := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$ oder setze $r = 1$, falls $\Omega = \mathbb{R}^n$ ist. Seien $x, y \in \Omega_1$ mit $|x - y| \le r$. Wir benutzen die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen und erhalten

$$\begin{aligned} u(x) &= \fint_{B_{2r}(x)} u = \frac{n}{\omega_n 2^n r^n} \cdot \int_{B_{2r}(x)} u \\ &\ge \frac{n}{\omega_n 2^n r^n} \int_{B_r(y)} u, \qquad\qquad \text{da } B_r(y) \subset B_{2r(x)} \\ &= \frac{1}{2^n} \fint_{B_r(y)} u = \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $x, y \in \Omega_1$ mit $|x - y| \le r$

$$2^n u(y) \ge u(x) \ge \frac{1}{2^n} u(y).$$

Da $\overline{\Omega_1}$ kompakt ist, gibt es endlich viele $x_i \in \Omega_1$, $1 \le i \le N$, so dass $\overline{\Omega_1} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{r/2}(x_i)$ ist. Seien nun $x, y \in \Omega_1$ beliebig. Modifiziere einen stetigen Weg von x nach y, so dass er nur aus

Geradenstücken zwischen Punkten aus $\{x, y, x_1, \ldots, x_N\}$ besteht. Jedes x_i werde dabei höchstens einmal besucht, z. B.

$$„x \to x_1 \to \ldots \to x_N \to y“.$$

Es gilt

$$u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(x_1),$$
$$u(x_1) \geq \frac{1}{2^n} u(x_2), \ldots,$$

und hieraus folgt dann

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y).$$

Beweis 2. Man kann den Satz mit Theorem 2.21 beweisen. Angenommen $\Omega = B_R(x_0)$ und $\Omega_1 = B_{R/2}(x_0)$. Wir wenden Theorem 2.21 an u in $B_{R/2}(x_0)$ an und erhalten

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{2n}{R} u(x), \quad \forall x \in B_{R/2}(x_0),$$

bzw.

$$|\nabla \log u(x)| \leq \frac{2n}{R}.$$

Es folgt, für beliebige $x, y \in B_{R/2}(x_0)$,

$$\begin{aligned} \log \frac{u(x)}{u(y)} &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \log u(tx + (1-t)y))dt \\ &= (x-y) \cdot \int_0^1 \nabla \log u(tx + (1-t)y))dt. \end{aligned}$$

Da $tx + (1-t)y \in B_{R/2}(x_0)$ für alle $t \in [0,1]$ und $|x - y| \leq R$, erhalten wir

$$|\log \frac{u(x)}{u(y)}| \leq |x-y| \cdot \int_0^1 |\nabla \log u(tx + (1-t)y))| dt \leq \frac{2n}{R}|x-y| \leq 2n.$$

Also

$$u(x) \leq e^{2n} u(y).$$

□

2.6. **Subharmonische und superharmonische Funktionen.**

Definition 2.23. Sei $u \in C^2(\Omega)$.

(1) u heißt *subharmonisch*, falls gilt $-\Delta u(x) \leq 0$, für alle $x \in \Omega$.
(2) u heißt *superharmonisch*, falls gilt $-\Delta u(x) \geq 0$, für alle $x \in \Omega$.

Bemerking. Ein konvexe Funktion ist eine subharmonisch. Genauer, sei Ω konvex. Eine C^2 Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn ihre Hesse-Matrix D^2u semi-positiv definit ist. f ist subharmonisch genau dann, wenn die Spur ihrer Hesse-Matrix nicht negativ ist.

Für sub(super)-harmonische Funktionen gilt auch Mittelwerteigenschaft in folgenden Sinne.

Theorem 2.24 (Mittelwerteigenschaft sub(super)-harmonischer Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$*

(1) Ist u subharmonisch, dann gilt $u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u$
(2) Ist u superharmonisch, dann gilt $u(x) \geq \fint_{\partial B_r(x)} u$

Beweis. Man kann den Satz wie Theorem 2.10 beweisen. □

Theorem 2.25 (Schwaches Maximumprinzip für sub(super)-harmonische Funktionen)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen,* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

(1) Ist u subharmonisch, d.h. $-\Delta u(x) \leq 0$, *für alle* $x \in \Omega$, *so folgt:*

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

(2) Ist u super harmonisch, d.h. $-\Delta u(x) \geq 0$, *für alle* $x \in \Omega$, *so folgt:*

$$u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u.$$

(3) Ist u harmonisch, d.h. $-\Delta u(x) = 0$, *für alle* $x \in \Omega$, *so folgt:*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Beweis. Der Beweis ist ganz gleich wie den Beweis von Theorem 2.13. (Übung)

□

3. Die Laplacegleichung und Darstellungsformeln

3.1. Greensche Funktion und Darstellungsformeln auf Gebieten.

Theorem 3.1. *Sei Ω ein beschänktes C^1 Gebiet and sei $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Dann gilt.*

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta_y u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(y-x)\right) dS_y \tag{3.1}$$

für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Wir benutzen die 2. Greenschen Formel

$$\int_\Omega v\Delta u - u\Delta v = \int_{\partial\Omega} \left\{ v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} dS.$$

Sei $x \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$ ist. Definiere $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$. Die Anwendung der 2. Greenschen Formel an u und $\Gamma(\cdot - x)$ liefert

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\varepsilon} \{u(y)\Delta\Gamma(y-x) - \Gamma(y-x)\Delta u(y)\}\,dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \{u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(y-x) - \Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\}\,dS_y + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \{u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(y-x) - \Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\}\,dS_y\end{aligned}$$

Es gilt

(i) $\Delta\Gamma(y-x) = 0$ für $x \neq y$,

(ii) $\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,dy \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

Dies folgt wie bei der folgenden Abschätzung: Für $n \geq 3$, nach der Definition von Γ erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B_r(x)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}dS_y\right| &= \left|\frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\right| \left|\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}dS_y\right| \\ &\leq \frac{r}{n-2}\max_{\partial B_r(x)}|\nabla u| \to 0, \quad \text{als } r \to 0.\end{aligned}$$

Die Abschätzung für $n = 2$ ist ähnlich. (Übung)

(iii) Das äußere Normalenfeld von Ω_ε am Rand $\partial B_\varepsilon(x)$ ist $-\frac{y-x}{|y-x|}$. Wir berechnen

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(y-x) = -\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \quad \text{auf } \partial B_\varepsilon(x).$$

Es folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(y-x)\,dS_y = -\fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\,dS_y \to -u(x) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

(iv) Weiterhin gilt

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(y-x)\Delta u(y)\,dy \to \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\,dy \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0,$$

da Γ in der Nähe der Singularität integrierbar ist.

Damit folgt aus dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(y-x)\right) dS_y,$$

für alle $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ und alle $x \in \Omega$.

□

Bemerkung 3.2. Wir haben
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}(x-y) dS_y = 1,$$
für alle $x \in \Omega$. Der Beweis folgt direkt von (3.1) mit $u \equiv 1$.

Theorem 3.1 liefert eine Darstellungsformel für u, falls wir Δu in Ω sowie u und $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ auf $\partial\Omega$ kennen. Randwertprobleme, bei denen alle diese Daten vorgeschrieben sind, sind aber überbestimmt und i. a. nicht lösbar. Beispiel: Sei
$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \tfrac{\partial u}{\partial \nu} &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$
Aus den ersten beiden Gleichungen und dem Maximumprinzip folgt dass $u = 0$ gilt. Also muß auch $\varphi = 0$ gelten. Für $\varphi \neq 0$ existiert daher keine Lösung $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ oder $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Für fest $x \in \Omega$ betrachten wir die Funktion $\varphi(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta_y \varphi(x, y) = 0$. Aus der Greenschen Formel gilt
$$0 = \int_\Omega \varphi(x,y) \Delta u(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \left(\varphi(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial \nu}(y) \right) dS_y \tag{3.2}$$

Definiere
$$\gamma(x,y) := \Gamma(y-x) - \varphi(x,y), \quad x \neq y \in \Omega.$$
Wir addieren (3.1) und (3.2) und erhalten
$$u(x) = \int_\Omega \gamma(x,y) \Delta u(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \left(\gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu_y}(x,y) \right) dS_y.$$

Wir wählen φ so, dass $\varphi(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$
$$\begin{aligned} \Delta_y \varphi(x,y) &= 0, && \text{in } \Omega \\ \varphi(x,y) &= \Gamma(x-y), && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.3}$$
erfüllt. D. h., $\gamma(x, \cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$.

Es folgt
$$u(x) = \int_\Omega \gamma(x,y) \Delta u(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu_y}(x,y)\, dS_y. \tag{3.4}$$

Definition 3.3 (die Greensche Funktion)**.** Die *Greensche Funktion* für den Gebiert Ω ist definiert durch
$$G(x,y) = \Gamma(x,y) - \varphi(x,y),$$
wobei φ (3.3) erfüllt.

Wir erhalten also

Theorem 3.4 (Darstellungsformel)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung des Randwertproblems*
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.5}$$
und G die Greensche Funktion für Ω, so gilt
$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\, dy - \int_\Omega f(y) G(x,y)\, dy \tag{3.6}$$
für $x \in \Omega$.

Beweis. Der Beweis folgt aus (3.4) und der Definition der Greenschen Funktion G. $\square$

Bemerkung 3.5. Für sehr spezielle Gebiete werden wir $\varphi(x,y)$, und die Greensche Funktion G explizit bestimmen. Für allgemeinen Gebiete, ist die Existenz einer Lösung von (3.3) schwer zu zeigen wie die Existenz einer Lösung von (3.5)

Bemerkung 3.6. Sei $x \in \Omega$. Betrachte $G(x,y)$ als Funktion von y. Dann gilt im Distributionssinn

$$\begin{aligned} \Delta G &= \delta_x, \quad \text{in } \Omega, \\ G &= 0 \quad\;\; \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei δ_x das Diracmaß zum Punkt x ist.

Theorem 3.7 (Symmetrie der Greenschen Funktion). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und sei $\partial\Omega \in C^1$. Seien $x \neq y \in \Omega$. Sei G die zu Ω gehörige Greensche Funktion. Nehme an, dass $G \in C^2\left(\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right) \setminus \Delta\right)$, $\Delta := \{(x,x) : x \in \Omega\}$, ist. Dann gilt*

$$G(y,x) = G(x,y).$$

Beweis. Fixiere $x \neq y \in \Omega$. Definiere für $z \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} v(z) &:= G(x,z) \quad \text{für } z \neq x, \\ w(z) &:= G(y,z) \quad \text{für } z \neq y. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta v(z) &= 0 \quad \text{für } z \neq x, \\ \Delta w(z) &= 0 \quad \text{für } z \neq y, \\ w = v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Definiere $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \left(\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)}\right)$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ (was wir im folgenden annehmen wollen) ist $\partial\Omega_\varepsilon \in C^1$. Nach Annahme gilt $v,\, w \in C^2\left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right)$.

Die 2. Greensche Formel liefert nun

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} v\frac{\partial w}{\partial\nu} - w\frac{\partial v}{\partial\nu} \\ &= \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} v\frac{\partial w}{\partial\nu} - w\frac{\partial v}{\partial\nu} + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} v\frac{\partial w}{\partial\nu} - w\frac{\partial v}{\partial\nu}, \end{aligned}$$

wobei wir mit ν die äußere Normale an Ω_ε bezeichnen.

Nahe x ist w glatt. Wir erhalten also da φ durch die Randwerte beschränkt ist

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial w}{\partial\nu} v\,dz \right| &\le c \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} |v| = c \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} |G(x,z)| \\ &\le \underbrace{c \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} |\Gamma(z-x)|\,dz}_{\equiv I} + \underbrace{c \cdot \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \underbrace{|\varphi(x,z)|}_{=\text{beschränkt}}\,dz}_{\to 0 \quad \text{für } \varepsilon\to 0}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$I \le c \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot \begin{Bmatrix} \log\varepsilon, & n=2, \\ \varepsilon^{2-n}, & n \ge 3 \end{Bmatrix} \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Analog gilt für $|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w\, dz|$. Es gilt also

$$0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} -w \frac{\partial v}{\partial \nu} + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(y)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\}.$$

Durch Vergleich mit den Rechnungen aus dem Beweis von Theorem 3.1 sehen wir unter Berücksichtigung der Tatsache, dass w und φ nahe x beschränkt sind und somit unsere inneren Abschätzungen anwendbar sind,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu_z} \left(\Gamma(z-x) - \varphi(x,z)\right) dS(z) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z) \frac{\partial}{\partial \nu_z} \Gamma(z-x)\, dS(z) \\
&= w(x).
\end{aligned}$$

Wir schließen also, dass $w(x) = v(y)$ ist und somit folgt $G(y,x) = G(x,y)$. □

Die Eindeutugkein der Greenschen Funktion folgt aus dem Maximumprinzip.

3.2. **Greensche Funktion für eine Kreisscheibe.** In diesem Anschnitt finden wir die Greensche Funktion für Kreisscheibe.

Theorem 3.8. *Die Greensche Funktion G für B_R ist*

$$G(x,y) = \begin{cases} \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}(|y|^{2-n} - R^{2-n}), & x = 0 \\ \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|y-x|^{2-n} - \left|\dfrac{|x|}{R} y - \dfrac{R}{|x|} x\right|^{2-n}\right), & x \neq 0. \end{cases} & n \geq 3 \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}(\log|y| - \log R), & x = 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\left(\log|y-x| - \log\left|\dfrac{|x|}{R} y - \dfrac{R}{|x|} x\right|\right), & x \neq 0. \end{cases} & n = 2 \end{cases}$$

Beweis. Nach Debifinition 3.3 sollen wir eine Funktion $\varphi(x,y)$ finden, die (3.3) erfüllt. Wir betrachten $n \geq 3$. Für $x = 0$,

$$\Gamma(0-y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}|y|^{2-n}.$$

Dann nehmen wir einfach

$$\varphi(0,y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} R^{2-n},$$

für jede $y \in \overline{B}_R$. Für $x \in B_R/\{0\}$ setzen wir $X = R^2 \frac{x}{|x|^2}$. X ist die Kelvin-Transformation von x bezüglich der Sphäre mit dem Raduis R. Es ist klar, dass $X \notin \overline{B}_R$. Dann ist $\Gamma(y - X)$ harmonisch für $y \in B_R$. Es folgt, dass

$$\varphi(x,y) := \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left|\frac{|x|}{R} y - \frac{R}{|x|} x\right|^{2-n} = \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n} \Gamma(y - X)$$

harmonisch für $y \in B_R$ ist. Nach Definition von X gilt

$$\frac{|x|}{R} = \frac{R}{|X|}.$$

Daraus kann man zeigen, dass für $y \in \partial B_R$ gilt

$$\frac{|x|}{R} = \frac{|y-x|}{|y-X|}, \tag{3.7}$$

bzw.

$$|y-x| = \frac{|x|}{R}|y-X|.$$

Es folgt

$$\Gamma(y-x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}} = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{1}{|y-X|^{n-2}} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\Gamma(y-X),$$

für alle $x \in B_R \backslash \{0\}$ und $y \in \partial B_R$. Dann nehemen wir

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\Gamma(y-X),$$

für alle $x \in B_R \backslash \{0\}$ und $y \in B_R$. Die Funktion φ ist die gesuchte Funktion. Der Beweis gilt auch für $n = 2$. □

Korollar 3.9. *Sei G die Greensche Funktion für B_R. Dann gilt*

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R|x-y|^n},$$

für alle $x \in B_R$ und $y \in \partial B_R$.

Beweis. Eine direkte Berechnung mit (3.7). (Übung) □

Definition 3.10 (Poisson-Kern)**.** Die Funktion

$$K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}$$

heißt die *Poisson-Kern.*

Korollar 3.11 (Poisson Integralformel)**.** *Sei $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B}_R)$ harmonisch. Dann gilt*

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x,y)u(y)dS_y \qquad \forall x \in B_R. \tag{3.8}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Darstellungsformel (3.6). □

Lemma 3.12. *Sei $K(x,y)$ die Poisson-Kern. Dann gilt*
(1) $K(x,y)$ is glatt für alle $x \in B_R$ und $y \in \partial B_R$.
(2) $K(x,y) > 0$ für alle $x \in B_R$ und $y \in \partial B_R$.
(3) für fest $x_0 \in \partial B_R$ und $\delta > 0$,

$$\lim_{x \to x_0, |x|<R} K(x,y) = 0 \qquad \textit{gleichmäßig in } y \in \partial B \backslash B_\delta(x_0).$$

(4) $\Delta_x K(x,y) = 0$ für alle $x \in B_R$ und $y \in \partial B_R$.
(5) $\int_{\partial B_R} K(x,y)dS_y = 1$ für alle $x \in B_R$.

Beweis. (1)-(4) folgen direkt von der Form der Poisson-Kern. Mit $u = 1$ liefert (3.8) die Aussage (5). □

Theorem 3.13 (Poisson Integralformel)**.** *Sei φ eine stetige Funktion auf ∂B_R und sei u definiert durch*

$$u(x) = \int_{\partial B_R} K(x,y)\varphi(y)dS_y \quad \forall x \in B_R, \tag{3.9}$$

wobei K die Poisson-Kern ist. Dann $u \in C^\infty(B_R)$ und $\Delta u = 0$ in B_R. Weiter gilt

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial B_R.$$

Damit lasst u sich stetig auf $\overline{B}_R$ fortsetzen und ist die Lösung $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \textit{in } B_R, \\ u &= \varphi, && \textit{auf } \partial B_R. \end{aligned}$$

Beweis. Nach (1) und (4) in Lemma 3.12 können wir leicht zeigen, dass die durch (3.9) definierte Funktion u glatt und harmonisch in B_R ist. Wir sollen nur die Stetigkeit $u \in C^0(\overline{B}_R)$, oder genau

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial B_R,$$

zeigen.

Sei $x_0 \in \partial\Omega$ einer feste, aber beliebige Punkt. Sei $x \in B_R$. Nach (5) in Lemma 3.12 erhalten wir

$$\varphi(x_0) = \int_{\partial B_R} K(x,y)\varphi(x_0)dS_y.$$

Also

$$u(x) - \varphi(x_0) = \int_{\partial B_R} K(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))dS_y = I + II,$$

wobei

$$I = \int_{\partial B_R \cap B_\delta(x_0)} \cdots, \quad II = \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(x_0)} \cdots,$$

für eine kleine positive Konstante δ. Für beliebige $\varepsilon > 0$, wählen wir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so klein, dass

$$|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $y \in \partial B_R \cap B_\delta(x_0)$ gilt. Nach (2) und (5) in Lemma 3.12 erhalten wir

$$|I| \le \int_{\partial B_R \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)|\varphi(x) - \varphi(x_0)|\, dS < \varepsilon \int_{\partial B_R \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)\, dS \le \varepsilon.$$

Setze $M := \max_{\partial B_R} |\varphi|$. Nach (3) in Lemma 3.12 können wir ein $\delta' > 0$ finden, dass

$$K(x,y) \le \frac{\varepsilon}{2M\omega_n R^{n-1}},$$

für alle $x \in B_R \cap B_{\delta'}(x_0)$ und $y \in \partial B_R \setminus B_\delta(x_0)$ gilt. Die Konstante δ' hängt von ε und $\delta = \delta(\varepsilon)$, dann nur von ε ab. Es liefert

$$|II| \le \int_{\partial B_R \setminus B_\delta(x_0)} K(x,y)(|\varphi(y)| + |\varphi(x_0)|)dS_y \le \frac{\varepsilon}{2M\omega_n R^{n-1}} \cdot 2M \int_{\partial B_R \cap B_\delta(x_0)} 1\, dS \le \varepsilon,$$

und dann

$$|u(x) - \varphi(x_0)| \le 2\varepsilon$$

für alle $x \in B_R \cap B_{\delta'}(x_0)$. D.h.,

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial B_R.$$

□

Für $n = 2$ benutzen wir die Polarkoordinaten mit $x = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ und $y = (R\cos\eta, R\sin\eta)$ und erhalten

$$u(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(r,\vartheta,\eta)\varphi(R\cos\eta, R\sin\eta)d\eta,$$

wobei

$$K(r,\vartheta,\eta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\vartheta - \eta) + r^2}.$$

Als die erste Anwendung des Satzes haben wir

Theorem 3.14 (Harnack-Ungleichung)**.** *Sei $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ harmonisch und nichtnegativ. Leiten Sie aus der Poisson-Formel folgende Version einer Harnackungleichung her:*

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \le u(x) \le \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0)$$

für alle $x \in B_R(0)$.

Beweis. Übung □

Korollar 3.15 (Satz von Liouville)**.** *Eine nach unten (oder nach oben) beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ist konstant.*

Beweis. Übung □

Als die zweite Anwendung des Satzes zeigen wir

Theorem 3.16 (Hebbarkeitssatz)**.** *Sei u harmonisch in $B_R \backslash \{0\}$ und gelte*

$$u(x) = \begin{cases} o(\log |x|), & n = 2, \\ o(|x|^{2-n}), & n \geq 3, \end{cases}, \quad \text{als } |x| \to 0.$$

Dann besitzt u eine glatte harmonische Fortsetzung auf B_R.

Beweis. OBdA nehmen wir an, dass u stetig in $0 < |x| \leq 2R$. Sei v eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta v &= 0, \quad \text{in } B_R \\ v &= u, \quad \text{auf } \partial B_R. \end{cases}$$

Die Existenz von v ist von Theorem 3.13 gesichert. Setze $M := \max_{\partial B_R} |u|$. Es ist klar, dass die konstante Funktion $\pm M$ harmonisch ist und $-M \leq v \leq M$ auf ∂B_R gilt. Nach dem Starken Maximumprinzip (Theorem 2.13) gilt $-M \leq v \leq M$ in B_R, d.h.,

$$|v| \leq M \quad \text{in } B_R.$$

Wir behaupten, dass $u = v$ in $B_R \backslash \{0\}$. Der Satz folgt klar aus der Behauptung. Um die Behauptung zu zeigen, sitzen wir $w = v - u$ in $B_R \backslash \{0\}$ und $M_r := \max_{\partial B_r} |w|$ für alle $r < R$. Wir betrachten nur den Fall $n \geq 3$. Der Fall $n = 2$ ist analog. Es ist offensichtlich, dass

$$-M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \leq w(x) \leq M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}, \qquad \text{auf } \partial B_r \cup \partial B_R$$

gilt. Denn es gilt auf ∂B_r nach der Definition von M_r und auf ∂B_R wegen $w = 0$ auf ∂B_R. Nochmal benutzen wir Theorem 2.13 und erhalten

$$-M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \leq w(x) \leq M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}, \qquad \text{in } B_R \backslash B_r,$$

bzw.,

$$|w(x)| \leq M_r \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}, \qquad \text{in } B_R \backslash B_r.$$

Da $M_r = \max_{\partial B_r} |v - u| \leq \max_{\partial B_r} |v| + \max_{\partial B_r} |u| \leq M + \max_{\partial B_r} |u|$, erhalten wir

$$|w(x)| \leq M \cdot \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \cdot (r^{n-2} \max_{\partial B_r} |u|), \qquad \text{in } B_R \backslash B_r.$$

Nun für beliebige $x \in B_R \backslash \{0\}$ nehemen wir $r < |x|$ und lassen $r \to 0$. Nach der Voraussetzung an u erhalten wir $w(x) = 0$ für alle $x \in B_R \backslash \{0\}$. □

4. Perronverfahren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Wir wollen eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ finden, die das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

löst.

4.1. **Konvergenzsätze.**

Theorem 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert. Dann ist u in Ω harmonisch.*

(Übung)

Theorem 4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei (u_k) eine Folge harmonischer Funktionen, die auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ die Abschätzung $|u_k(x)| \le c(K)$ erfüllen. Dann gibt es eine Teilfolge der (u_k), die in $C^2_{loc}(\Omega)$ konvergiert. Der Grenzwert u ist eine glatte harmonische Funktion.*

Beweis. Aufgrund der inneren Abschätzungen für harmonische Funktionen, Theorem 2.19, gibt es für jedes $K \subset \Omega$ eine Umgebung U mit

$$K \subset U = K_\varepsilon \equiv \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, K) < \varepsilon\} \Subset \Omega$$

für ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|u_k\|_{C^l(U)} \le c\left(l, n, U, \Omega, c\left(\overline{U}\right)\right)$ gilt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es daher eine in $K_{\varepsilon/2}$ gleichmässig konvergente Teilfolge. Wir nehmen daher ohne Einschränkung an, dass u_k in U gleichmässig gegen eine stetige Funktion u konvergiert. Der Limes u ist aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz in $K_{\varepsilon/4}$ harmonisch. Mit Hilfe eines Diagonalfolgenarguments in K folgt die Behauptung. □

Korollar 4.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u_k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen $u_k \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, die in Ω harmonisch sind. Gelte $u_k = \varphi_k$ auf $\partial\Omega$. Konvergieren die Funktionen φ_k auf $\partial\Omega$ gleichmäßig gegen eine Funktion φ, so konvergieren die Funktionen u_k in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, die in Ω harmonisch ist.*

Beweis. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ auf $\partial\Omega$ und des Maximumprinzips folgt, dass $u_k \rightrightarrows u$ in $\overline{\Omega}$ gilt. Die Funktion u ist in Ω harmonisch und damit auch glatt. □

Theorem 4.4 (Harnacksches Konvergenztheorem)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei u_k eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen. Sei $y \in \Omega$ und sei $u_k(y)$ gleichmäßig beschränkt. Sei $\Omega' \Subset \Omega$. Dann konvergiert u_k auf Ω' gegen eine harmonische Funktion.*

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass Ω' zusammenhängend ist und $y \in \Omega'$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein N, so dass für $m \ge l > N$

$$0 \le u_m(y) - u_k(y) < \varepsilon$$

gilt. Aufgrund der Harnackungleichung, Theorem 2.22 folgt

$$\sup_{\Omega'} |u_m - u_k| \le c(\Omega', \Omega) \cdot \varepsilon.$$

Somit konvergiert u_k auf Ω' gegen u. Also ist u in Ω' harmonisch. □

Theorem 4.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien u_k harmonische Funktionen, die in $C^0_{loc}(\Omega)$ gegen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann konvergiert $u_k \to u$ in $C^l_{loc}(\Omega)$.*

Beweis. Auf kompakten Teilmengen von Ω sind die Funktionen u_k gleichmäßig beschränkt. Aufgrund der inneren Abschätzungen und nach Arzelà-Ascoli gibt es daher eine Teilfolge, die für beliebiges $l \in \mathbb{N}$ in C^l_{loc} gegen u konvergiert.

Falls nicht die gesamte Folge in C^k_{loc} gegen u konvergiert, gibt es $\Omega' \Subset \Omega$ und $\varepsilon > 0$, so dass für eine nicht umbenannte Teilfolge $\|u_k - u\|_{C^l(\Omega')} \ge \varepsilon$ gilt. Aufgrund der inneren Abschätzungen und Arzelà-Ascoli konvergiert aber auch eine Teilfolge dieser „Gegenbeispielfolge“ in $C^l(\Omega')$ für beliebiges $l \in \mathbb{N}$. Wegen der C^0_{loc}-Konvergenz ist u auch der Grenzwert dieser Teilfolge. Dies widerspricht aber der Voraussetzung $\|u_k - u\|_{C^l(\Omega')} \geq \varepsilon$. Somit konvergiert bereits die gesamte Folge. □

4.2. C^0-subharmonische Funktionen.

Definition 4.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) $u \in C^2(\Omega)$ heißt
- harmonisch, falls $-\Delta u = 0$,
- subharmonisch, falls $-\Delta u \leq 0$,
- superharmonisch, falls $-\Delta u \geq 0$.

(ii) $u \in C^0(\Omega)$ heißt
- subharmonisch, falls für jede Kugel $B_r(x) \Subset \Omega$ und jede harmonische Funktion $h : C^2(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ mit $u \leq h$ auf $\partial B_r(x)$ auch $u \leq h$ in $B_r(x)$ folgt.
- superharmonisch, falls $-u$ subharmonisch ist.
- harmonisch, falls u subharmonisch und superharmonisch ist.

Kurzfristig werden wir diese Eigenschaften mit C^2-subharmonisch und C^0-subharmonisch unterschiedlich bezeichnen.

Lemma 4.7.

(i) Eine C^2-subharmonische Funktion ist auch C^0-subharmonisch.

(ii) Eine C^0-subharmonische Funktion erfüllt die Mittelwerteigenschaften

$$u(x) \leq \fint_{B_r(x)} u,$$
$$u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u,$$

falls $B_r(x) \Subset \Omega$.

(iii) Die neue Definition harmonischer Funktionen ist äquivalent zu den bisherigen.

Beweis.

(i) Dies folgt direkt aus dem Maximumprinzip, Theorem 2.25.

(ii) Sei $h \in C^\infty(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ C^2-harmonisch und $u = h$ auf $\partial B_r(x)$. Dann ist h durch die Poissonsche Darstellungsformel, siehe Theorem 3.13, gegeben und diese liefert $h(x) = \fint_{\partial B_r(x)} h$.

Daher folgt

$$u(x) \leq h(x) = \fint_{\partial B_r(x)} h = \fint_{\partial B_r(x)} u,$$
$$u(x) \int_{\partial B_r(x)} 1 \leq \int_{\partial B_r(x)} u$$

und nach Integration von 0 bis r erhalten wir

$$u(x) \cdot |B_r(x)| \leq \int_{B_r(x)} u.$$

(iii) Es gilt: Ist eine Funktion C^0-harmonisch, so erfüllt sie die Mittelwerteigenschaft. Demnach ist sie von der Klasse C^2. Also ist sie auch C^2-harmonisch. Da schließlich eine C^2-harmonische Funktion aufgrund des Maximumprinzips auch C^0-harmonisch ist, sind alle diese Definitionen für harmonische Funktionen äquivalent.

□

Lemma 4.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei subharmonisch.*

(i) Dann erfüllt u das starke Maximumprinzip in Ω, d. h. falls es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$ gibt, so ist u in der Zusammenhangskomponente von x_0 konstant.

(ii) Seien $u, v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei Ω zusammenhängend, v superharmonisch und es gelte $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt entweder $u < v$ in Ω oder $u = v$ in Ω und beide Funktionen sind harmonisch.

Wir spezifizieren hier nicht genauer, welche Definition von subharmonisch wir voraussetzen, da die Aussage insbesondere für C^0-subharmonische Funktionen gilt.

Beweis.

(i) Benutze die Mittelwerteigenschaft.

(ii) u und $-v$ sind subharmonisch.

Da das Dirichletproblem auf $B_r(x)$ für stetige Randwerte eine Lösung $h \in C^\infty(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ besitzt, genügt es, in der Definition von C^0-harmonischen Funktionen, die harmonische Funktion mit $u = h$ auf $\partial B_r(x)$ zu betrachten.

Durch Addition der beiden harmonischen Fortsetzungen der Randwerte (die gleich der harmonischen Fortsetzung der Summe der Randwerte ist) sehen wir, dass $u-v$ subharmonisch ist. Es gilt $u - v = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir können nun den ersten Teil anwenden und erhalten die Behauptung.

□

Korollar 4.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$ erfülle eine der Mittelwerteigenschaften*

$$u(x) \le \fint_{B_r(x)} u \quad \text{oder} \quad u(x) \le \fint_{\partial B_r(x)} u$$

für alle Kugeln $B_r(x) \Subset \Omega$. Dann ist u auch C^0-subharmonisch.

Beweis. Sei $B_r(x) \Subset \Omega$ und h die C^2-harmonische Fortsetzung der Randwerte $u|_{\partial B_r}$. $u - h$ erfüllt dieselbe Mittelwerteigenschaft wie u. Der Beweis von Lemma 4.8 (i) benutzt nur die Mittelwerteigenschaft. Somit erfüllt u das Maximumprinzip. Es folgt $u - h \le 0$ in $B_r(x)$. Also ist u auch C^0-subharmonisch. □

Bemerkung 4.10. Ist u eine C^0-subharmonische Funktion, so gilt aufgrund der Poissonschen Darstellungsformel auch die Mittelwertungleichung mit Sphären. Integrieren wir diese, so erhalten wir die Mittelwerteigenschaft für Kugeln. Daher sind diese drei Definitionen äquivalent.

Lemma 4.11 (Harmonische Ersetzung (Liftung))**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch und $B \Subset \Omega$ eine Kugel. Sei $\overline{u} : \overline{B} \to \mathbb{R}$ die harmonische Funktion mit $\overline{u} = u$ auf ∂B.*

Wir definieren die harmonische Ersetzung von u in B durch

$$U(x) := \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B. \end{cases}$$

Dann ist U in Ω (C^0-)subharmonisch.

Beweis. Sei $B' \Subset \Omega$ eine Kugel. Sei h harmonisch in B' und $U \le h$ auf $\partial B'$. Wir wollen nachweisen, dass $U \le h$ in B' gilt.

Die Funktion u ist subharmonisch. Somit gilt $u \le U$ in Ω (und insbesondere in B). Wir benutzen die Annahme $U \le h$ auf $\partial B'$ und erhalten $u \le U \le h$ auf $\partial B'$. Da u subharmonisch ist, erhalten wir $u \le h$ in B'. Nach Definition von U folgt also $U \le h$ in $B' \setminus B$. Insbesondere gilt daher $U \le h$ auf $\partial B \cap B'$ und somit $U \le h$ auf $\partial(B \cap B')$. h und U sind harmonische Funktionen, wir schließen also, dass $U \le h$ in $B \cap B'$ gilt. Insgesamt erhalten wir also $U \le h$ in B'. Also ist U subharmonisch. □

Lemma 4.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $u_1, \ldots, u_N$ in Ω subharmonisch. Dann ist auch*

$$u(x) := \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$

in Ω subharmonisch.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition von „subharmonisch". (Übung) □

Definition 4.13. (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Subfunktion oder Sublösung (für den Laplaceoperator $-\Delta$), wenn u subharmonisch ist und $u \le \varphi$ auf $\partial\Omega$ gilt.

(ii) Superfunktionen sind analog definiert.

Bemerkung 4.14. (i) Für gegebenes $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$ sind Subfunktionen aufgrund des Maximumprinzips kleiner als Superfunktionen.

(ii) Sei $c_1 \ge \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$, dann ist $u(x) = c_1$ eine Superfunktion. Sei $c_2 \le \inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$, dann ist $u(x) = c_2$ eine Subfunktion.

4.3. **Das Perronverfahren.**

Theorem 4.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$. Sei*

$$S_\varphi := \left\{u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) : u \text{ ist Subfunktion bezüglich } \varphi\right\}.$$

Definiere

$$u(x) := \sup_{v \in S_\varphi} v(x).$$

Dann ist u in Ω harmonisch.

Beweis. Aufgrund des Maximumprinzips erfüllt $v \in S_\varphi$ die Ungleichung $v \le \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$. Nach Lemma 4.12 und Bemerkung 4.14 brauchen wir nur Funktionen $v \in S_\varphi$ mit $v \ge \inf \varphi$ zu betrachten, da $\max\{v, \inf \varphi\} \in S_\varphi$ gilt. Diese C^0-Schranken erlauben es später, die inneren Abschätzungen für harmonische Funktionen zu verwenden.

Sei $y \in \Omega$ beliebig. Nach Definition von u existiert eine (von y abhängige) Folge v_i, $v_i \in S_\varphi$, so dass $v_i(y) \to u(y)$. Sei $R > 0$, so dass $B = \overline{B_R(y)} \Subset \Omega$. Sei V_i die harmonische Ersetzung von v_i bezüglich B wie in Lemma 4.11. Es gilt $V_i \in S_\varphi$. Die Funktion v_i ist subharmonisch. Also gilt $v_i \le V_i$. Nach Definition von u gilt also $V_i(y) \to u(y)$.

Die Funktionen V_i sind nun in B harmonisch und aufgrund der inneren Abschätzungen für Ableitungen harmonischer Funktionen konvergiert eine Teilfolge V_{i_k} auf jeder Kugel $B_\rho(y)$, $\rho < R$, gleichmäßig gegen eine in B harmonische Funktion v. Vergleiche dazu nochmals Theorem 4.2.

Nach Definition von u gilt daher $v \le u$. Es gilt auch $v(y) = u(y)$. Wir behaupten nun, dass in B sogar $u = v$ gilt: Angenommen es gibt ein $z \in B$ mit $v(z) < u(z)$. Dann gibt es $\overline{u} \in S_\varphi$, so dass $v(z) < \overline{u}(z)$. Definiere $w_k := \max\{\overline{u}, V_{i_k}\}$. Es gilt $w_k \in S_\varphi$. Bezeichne mit W_k die zugehörigen harmonischen Ersetzungen in B. Dann gilt

$$W_k \ge w_k \ge \underbrace{V_{i_k} \to v}_{\text{in } y}.$$

Wie oben existiert eine Teilfolge der W_k, die in B gegen eine harmonische Funktion w konvergiert. Dann gilt in B die Ungleichung $v \le w \le u$. Andererseits ist $v(y) = w(y) = u(y)$. Da v und w in B harmonische Funktionen sind, gilt aufgrund des Maximumprinzips $v = w$ in B. Dies ist ein Widerspruch, da

$$v(z) < \overline{u}(z) \le w_k(z) \le W_k(z) \to w(z) = v(z).$$

Somit gilt $u = v$ in B und u ist in Ω harmonisch. □

Bemerkung 4.16. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Existiert eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

so ist u gerade die Perronlösung, die wir in Theorem 4.15 konstruiert haben.

I. a. ist nicht klar, ob die Perronlösung die Randbedingung erfüllt.

Beweis. Wir beweisen nur, dass u die Perronlösung ist. Es gilt $u \in S_\varphi$. Sei $w \in S_\varphi$. Dann folgt aufgrund des Maximumprinzips, dass $w \le u$ ist. Die Behauptung folgt. □

Beispiel 4.17. Sei $B \subset \mathbb{R}^n (n \ge 3)$ die Einheitskugel, $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass $u_\varepsilon : B \to \mathbb{R}$:

$$u_\varepsilon := \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon^{2-n}-1}(|x|^{2-n}-1), & \varepsilon \le |x| \le 1 \\ -1, & |x| \le \varepsilon \end{cases}$$

in B subharmonisch sind.

Sei $B' \subset\subset B$ eine Kugel, $h \in C^2(B') \cap C^0(\overline{B'})$ in B' harmonisch, $h \ge u_\varepsilon$ auf $\partial B'$. Sicher gilt, indem man ggfs. ein hinreichend kleines Loch um 0 aus B' herausschneidet:

$$h \ge -\frac{1}{\varepsilon^{2-n}-1}(|x|^{2-n}-1)$$

in B', man vergleiche beide harmonischen Funktionen in $B' \backslash B_\delta(0)$. Die Ungleichung $h \ge -1$ ist wegen $h_{|\partial B'} \ge u_{\varepsilon|\partial B'} \ge -1$ aber evident. Insgesamt haben wir $h \ge u_\varepsilon$ in B'.

Betrachten wir nun $\Omega = B \backslash \{0\}$, $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$:

$$\varphi := \begin{cases} 0, & |x| = 1 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

ist sicher stetig. $u_{\varepsilon|\Omega}$ sind gemäß Obigem Unterfunktionen zu φ. Für $\varepsilon \to 0$ ist aber punktweise für $x \ne 0$: $\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x) = 0$. d.h. das in Satz 4.15 bestimmte u ist

$$u = \begin{cases} 0, & B \backslash \{0\}, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

Die Randdaten φ werden im Randpunkt 0 nicht stetig angenommen. (Mit dieser Methode kann man sogar die Unlösbarkeit zeigen: harmonische Funktionen liegen über den Subharmonischen. vgl. Bemerkung 4.16).

4.4. **Barrieren und Randwerte.** Mit Hilfe von Barrieren zeigen wir nun, dass die Perronlösung stetige Randwerte auf hinreichend regulären Gebieten tatsächlich annimmt.

Definition 4.18 (Barriere)**.** Sei $\xi \in \partial\Omega$. Eine Funktion $w \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, $w = w_\xi$, heißt *Barriere* für ξ relativ zu Ω, falls

(i) w in Ω superharmonisch ist,
(ii) $w(\xi) = 0$ und $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ gelten.

Bemerkung 4.19. Erfüllt w die Bedingungen von Definition 4.18 in einer Umgebung von ξ, so gibt es eine Barriere für ξ relativ zu Ω.

Beweis. Sei Definition 4.18 in $\Omega \cap B_r(\xi)$, $r > 0$, erfüllt. Sei $m := \inf\limits_{(B_r(\xi) \backslash B_{r/2}(\xi)) \cap \Omega} w > 0$. Dann ist leicht einzusehen, dass

$$\overline{w}(x) := \begin{cases} \min\{m, w(x)\}, & x \in \overline{\Omega} \cap B_{r/2}(\xi), \\ m, & x \in \overline{\Omega} \setminus B_{r/2}(\xi) \end{cases}$$

eine Barriere für ξ relativ zu Ω ist. □

Die Existenz einer Barriere ist also eine lokale Eigenschaft des Randes. Definiere daher

Definition 4.20. Ein Randpunkt heißt *regulär* (bezüglich des Laplaceoperators), falls es eine Barriere zu diesem Punkt gibt.

Lemma 4.21. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei u eine mittels Perronverfahren konstruierte Lösung, sei ξ ein regulärer Randpunkt von Ω und sei φ in ξ stetig. Dann gilt $u(x) \to \varphi(\xi)$ für $x \to \xi$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Definiere $M := \sup|\varphi|$. Sei w eine Barriere für ξ. Aufgrund der Stetigkeit von φ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$ für $|x - \xi| < \delta$ gilt. Fixiere $k > 0$, so dass $kw(x) \geq 2M$ für $|x - \xi| \geq \delta$ gilt.

Nun ist $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$ eine Superfunktion und $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ eine Subfunktion. Nach Definition von u gilt $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x)$. Da eine Superfunktion über einer Sublösung liegt, gilt auch $u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$. Insgesamt folgt also $|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x)$. Für $x \to \xi$ folgt $w(x) \to 0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir also $u(x) \to \varphi(\xi)$ für $x \to \xi$. □

Theorem 4.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist das Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für beliebiges $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ genau dann in $C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ lösbar, wenn jeder Randpunkt regulär ist.

Beweis. „$\Longleftarrow$“: Sei jeder Randpunkt regulär. Dann können wir Lemma 4.21 anwenden und erhalten, dass die Perronlösung die Randbedingung erfüllt und bis zum Rand stetig ist.

„$\Longrightarrow$“: Die Lösung zu $\varphi(x) = |x - \xi|$ ist eine Barriere zu $\xi \in \partial\Omega$. □

Eine Beispiel des irregulären Gebiets findet man in [Jost] s. 76.

Definition 4.23. (i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann erfüllt Ω eine *äußere Kugelbedingung*, falls für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Kugel B existiert, so dass $\{x\} = \overline{B} \cap \overline{\Omega}$ gilt.

(ii) Ω erfüllt eine *gleichmäßige Kugelbedingung*, falls für alle $x \in \partial\Omega$ Kugeln mit gleichem Radius verwendet werden können.

Lemma 4.24. *Erfülle Ω in ξ eine äußere Kugelbedingung, $\{\xi\} = \overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega}$. Dann ist*

$$w(x) := \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \log \frac{|x-y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

eine Barriere für $\xi \in \partial\Omega$.

Beweis. Klar. □

4.5. **Existenzsätze.**

Lemma 4.25. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Dann erfüllt Ω eine äußere Kugelbedingung.*

Proof. Übung. □

Theorem 4.26. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ zu*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beweis. Sei u die Perronlösung. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. □

Theorem 4.27. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, $f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ zu*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Beweis. Sei $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung zu

$$\Delta v = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

(v ist nicht eindeutig bestimmt, aber das macht nichts.) Sei $w \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung zu

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi - v & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann löst $u := w + v$ das Randwertproblem (4.1). Die Eindeutigkeitsaussage folgt direkt aus dem Maximumprinzip. □

4.6. **Das Potenzial.**

Definition 4.28. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt. Das Newtonsche Potential von f ist definiert durch

$$w_f(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

wobei Γ die Fundamentallösung ist.

Erinnere

$$\nabla\Gamma(x-y) \sim \frac{1}{|x-y|^{n-1}}, \qquad \nabla^2\Gamma(x-y) \sim \frac{1}{|x-y|^n}.$$

Lemma 4.29. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ beschränkt und $w = w_f$ das Newtonsche Potential von f. Ist $f \in C^{k-1}(\Omega)$ für ein $k \geq 2$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dann gilt $w \in C^k(\Omega)$ und $\Delta w = f$ in Ω. Weiter ist w glatt, falls f glat ist.*

Proof. Zunächst betrachten wir den Fall, dass f einen kompakten Träger in Ω besitzt. D.h., $\operatorname{supp} f \subset \Omega$. Für jede $x \in \Omega$ gilt

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy.$$

Wenden wir die Substitutionsformel mit $z = y - x$ an und erhalten

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) f(z+x) dz.$$

Da f mindestens C^1 ist, gilt

$$\begin{aligned} w_{x_i}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) f_{x_i}(z+x) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z) f_{z_i}(z+x) dz \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{z_i}(z) f(z+x) dz. \end{aligned}$$

Für $f \in C^{k-1}(\Omega)$ kann man zeigen

$$D^\alpha \partial_{x_i} w(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{z_i}(z) D_z^\alpha f(z+x) dz$$

für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ mit $|\alpha| \leq k-1$. Also $w \in C^k(\Omega)$. Weiter ist f glatt in Ω, so ist w.

Nun berechnen wir Δf, falls f mindestens C^1 ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i}(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \Gamma_{x_i}(z) f_{z_i}(z+x) dz \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \sum_{i=1}^n \Gamma_{x_i}(z) f_{z_i}(z+x) dz. \end{aligned}$$

Da $f(\cdot + x)$ einen kompaktem Träger besitzt, gilt

$$\begin{aligned}\Delta w(x) &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{x_i}(z)f_{z_i}(z+x)dz = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(z)f(z+x)dz\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}(z)f(z+x)dz\\ &= \frac{1}{\omega_n e^{n-1}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon}f(z+x)dz = f(x).\end{aligned}$$

Allgemeiner betrachten wir eine Umgebung von $x_0 \in \Omega$. Setze $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ und betrachte eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ mit $\varphi \equiv 1$ in $B_{r/2}(x_0)$. Somit können wir die Funktion w so schreiben:

$$\begin{aligned}w(x) &= \int_\Omega \Gamma(x-y)(1-\varphi(y))f(y)dy + \int_\Omega \Gamma(x-y)\varphi(y)f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\\ &=: w_1(x) + w_2(x).\end{aligned}$$

da $\varphi \equiv 1$ in $B_{r/2}(x_0)$, besitzt das erste Integral keine Singularitäten, falls $x \in B_{r/4}(x_0)$. Es folgt, dass w_1 glatt in $B_{r/4}(x_0)$ ist und $\Delta w_1 = 0$. Für das zweite Integral ist φf a C^{k-1}-Funktion mit kompaktem Träger. Es folgt w_2 is in $C^k(\Omega)$ und $\Delta w_2 = \varphi f$. Daraus folgt w is C^k-Funktion in $B_{r/4}(x_0)$ und

$$\Delta w(x) = \varphi(x)f(x) = f(x),$$

für jede $x \in B_{r/4}(x_0)$. $\square$

5. Maximumprinzip und apriori Abschätzungen

In diesem Kapital untersuchen wir das Maximum Prinzip und apriori Abschätzungen

5.1. apriori Abschätzungen der Poisonn-Gleichung.

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Poisonn-Gleichung

$$-\Delta u = f$$

Lemma 5.1 (Eindeutigkeit). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Dann für jede $f \in C(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$, existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von dem Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega \\ u &= \varphi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Theorem 5.2. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von dem Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega \\ u &= \varphi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\sup_{\Omega} |u| \le \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \sup_{\Omega} |f|,$$

wobei C eine positive Konstante ist, die nur von n und $\operatorname{diam}(\Omega)$ abhängt.

Beweis. Setze $F = \sup_\Omega |f|$ und $\Phi = \max_{\partial\Omega} |\varphi|$. Dann gilt

$$\begin{cases} -\Delta(\pm u) &= \pm f \le F, & \text{in } \Omega \\ \pm u &= \pm\varphi \le \Phi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

OBdA können wir annehmen, dass $\Omega \subset B_R$ für ein $R > 0$. Setze

$$v(x) = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{cases} -\Delta v &= -F, & \text{in } \Omega \\ v &\ge \Phi, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Betrachte $w_\pm = \pm u - v$. Wir haben

$$\begin{cases} -\Delta w_\pm &\le 0, & \text{in } \Omega \\ w_\pm &\le 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nach Satz 2.25 gilt

$$w_\pm \le 0 \quad \text{in } \Omega,$$

bzw

$$|u(x)| \le v = \Phi + \frac{F}{2n}(R^2 - |x|^2) \le \Phi + \frac{R^2}{2n} F, \quad \forall x \in \Omega.$$

□

Mit zusätzlicher Bedingungen vom Rand, können wir die Abschätzung verbessern. Für jede Kugel B in $\mathbb{R}^n$, definieren wir

$$d_x := \operatorname{dist}(x, \partial B).$$

Lemma 5.3. *Sei $f \in C(B)$ mit*
$$\sup_{x\in B} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty,$$
für ein $\beta \in (0,1)$. Sei $u \in C(\overline{B}) \cap C^2(B)$ eine Lösung von
$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$
Dann gilt
$$\sup_B d_x^{-\beta}|u(x)| \le C \sup_B d_x^{2-\beta}|f(x)|, \qquad \forall x \in B,$$
wobei $C > 0$ nur von n und β abhängt.

Beweis. OBdA, nehmen wir $B = B_R$ und
$$N := \sup_{x\in B_R} d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty.$$
Setze
$$v(x) = (R^2 - |x|^2)^\beta.$$
Eine direkte Berechnung liefert
$$-\Delta v = 2\beta(R^2 - |x|^2)^{\beta-2}\{n(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2\}.$$
Für $|x| > R$, gilt
$$n(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2 \ge 2(1-\beta)(R^2 - |x|^2) + 2(1-\beta)|x|^2 = 2(1-\beta)R^2,$$
da $n \ge 2(1-\beta)$. Also, erhalten wir
$$\begin{aligned} -\Delta v &\ge 4\beta(1-\beta)R^2(R^2 - |x|^2)^{\beta-2} \\ &= \beta(1-\beta)R^\beta(R - |x|)^{\beta-2}\{4R^{2-\beta}(R + |x|)^{\beta-2}\} \\ &\ge \beta(1-\beta)R^\beta(R - |x|)^{\beta-2}, \end{aligned}$$
da
$$4R^{2-\beta}(R + |x|)^{\beta-2} = 4(1 + \frac{|x|}{R})^{\beta-2} > 1.$$
Wir bemerken, dass $d_x = R - |x|$ für $x \in B_R$. Dann haben wir
$$\begin{aligned} -\Delta(\pm u) &= \pm f \le N d_x^{\beta-2} = N(R - |x|)^{\beta-2} \\ &= \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1} N\beta(1-\beta)R^\beta(R - |x|)^{\beta-2} \\ &\le -\{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1} N\Delta v. \end{aligned}$$
Es liefert
$$\begin{cases} -\Delta(\pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv) &\le 0, & \text{in } B_R, \\ \pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv &\le 0, & \text{auf } \partial B. \end{cases}$$
Nach Theorem 2.13 gilt
$$\pm u - \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv \le 0, \qquad \text{in } B.$$
Also
$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}Nv = \{\beta(1-\beta)R^\beta\}^{-1}N(R^2 - |x|^2)^\beta \\ &= 2\{\beta(1-\beta)\}^{-1}N(R - |x|)^\beta \frac{R^{-\beta}(R + |x|)^\beta}{2} \le 2\{\beta(1-\beta)\}^{-1}N(R - |x|)^\beta \\ &= \frac{2}{\beta(1-\beta)} N d_x^\beta. \end{aligned}$$
□

Bemerkung 5.4. Wir haben einige Bemerkungen über Theorem 5.2 und Lemma 5.3.

(1) Wir nennen die Abschätzungen in Theorem 5.2 und Lemma 5.3 *apriori Abschätzungen*. Das heißt, wir nehemen an, dass die Lösung schon existiert, und dann wir die passende Norm von der Lösung durch vorgegebenen Datei herleiten. Die apriori Abschätzungen herzuleiten ist der erste Schritt für die Untersuchung der Existenz der Lösungen einer partiellen Differentialgleichung.
(2) Eine passende Norm für die Abschätzungen zu finden ist auch sehr wichtig. Sehen Sie das folgende Beispiel.

Beispiel 5.5. Sei f eine Funktion in $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^2} \left\{ \dfrac{2}{(-\log|x|)^{1/2}} + \dfrac{1}{4(-\log|x|)^{3/2}} \right\}, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist f stetig in B_1. Betrachte

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } B_1. \tag{5.1}$$

Definiere

$$u(x) = -\begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)(-\log|x|)^{1/2}, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann gilt $u \in C(B_1) \cap C^\infty(B_1 \backslash \{0\})$. Eine direkte Berechnung zeigt, dass u die Gleichung $-\Delta u = f$ in $B_1 \backslash \{0\}$ erfüllt und

$$\lim_{x \to 0} u_{x_1 x_1}(x) = \infty.$$

Also, u ist nicht in $C^2(B_1)$. Nun wir zeigen, dass (5.1) für diese gewählte stetige Funktion f keine C^2 Lösung besitzt. Angenommen, dass $v \in C^2(B_1)$ eine Lösung von (5.1) ist. Für ein feste $R \in (0,1)$ ist $w := u - v$ harmonisch in $B_R \backslash \{0\}$. Da $u \in C(\overline{B}_R)$ und $v \in C^2(\overline{B}_R)$, ist w stetig in B_R. Nach Theorem 3.16 ist w harmonisch und dann C^2 in B_1. Insbesondere ist u auch C^2 in B_1, ein Widerspruch. □

5.2. **Schwaches Maximumprinzip.** In diesem Abschnitt, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, untersuchen wir ein Operator under folgender Bedingungen:

Begingungen 5.6. *Seien a_{ij}, b_i und c beschränkte, stetige Funktionen in Ω mit $a_{ij} = a_{ji}$. Wir untersuchen folgenden Operatoren*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + cu \qquad \text{in } \Omega, \tag{5.2}$$

für $u \in C^2(\Omega)$.

Definition 5.7 (Elliptizität)**.** Der operator heißt *strikt elliptisch* in Ω, falls gilt

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \qquad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.3}$$

für eine Konstante $\lambda > 0$. Die Konstante λ heißt die *elliptizitätskonstante*.

Der operator heißt *gleichmäßig elliptisch* in Ω, falls gilt

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \qquad \text{für alle } x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.4}$$

für Konstante $\lambda > 0$ und $\Lambda > 0$.

Definition 5.8 (Sublösung)**.** Für eine stetige Funkiton f in Ω heißt eine C^2-Funktion u *Sublösung* oder *Unterlösung* von $-Lu = f$, falls

$$-Lu \leq f \quad \text{ in } \Omega.$$

Für eine stetige Funkiton f in Ω heißt eine C^2-Funktion u *Superlösung* oder *Oberlösung* von $-Lu = f$, falls

$$-Lu \geq f \quad \text{in } \Omega.$$

Wir setzen $u^+ := \max\{u, 0\}$ die nicht-negative Teile von u.

Theorem 5.9 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L ein strikt elliptischer Operator mit Bedingungen 5.6. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Unterlösung, d.h., $-Lu \leq 0$ in Ω mit*

$$c \leq 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{5.5}$$

Dann nimmt u ihres nicht-negatives Maximum am Rand, d.h,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Beweis. Schritt 1. Wir untersuchen erste den folgenden Fall:

$$-Lu < 0 \text{ in } \Omega.$$

Angenommen, dass u in $x_0 \in \Omega$ ihres nicht-negatives maximum annimmt. Dann erhalten wir, dass $u(x_0) \geq 0$, $D_i u(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix $\nabla^2 u(x_0)$ negativ semi-definite ist. Da $A := (a_{ij}(x_0))$ nach der Voraussetzung positiv definite ist, gilt $\operatorname{tr}(A\nabla u(x_0)) \leq 0$, d.h.,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0)\nabla^2_{ij} u(x_0) \leq 0.$$

Es lierfert

$$-Lu(x_0) = -\{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial^2_{ij} u + b_i \partial_i u(x_0) + c(x_0)u(x_0)\} \geq 0.$$

Ein Widerspruch!

Schritt 2. Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Für $\varepsilon > 0$ betrachte

$$w(x) = u + \varepsilon e^{\mu x_1},$$

wobei μ is eine positive Konstante, die wir spät wählen werden. Eine direkte Berechnung ergibt sich

$$-Lw = -\big\{Lu + \varepsilon e^{\mu x_1}(a_{11}\mu^2 + b_1\mu + c)\big\} \leq -\varepsilon e^{\mu x_1}(a_{11}\mu^2 + b_1\mu + c).$$

da b_1 und c beschänkt sind und $a_{11} \geq \lambda > 0$, können wir $\mu > 0$ so wählen, dass

$$a_{11}\mu^2 + b_1\mu + c > 0 \quad \text{in } \Omega$$

gilt. Nach Schnitte 1 gilt

$$\max_{\Omega} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+.$$

Daraus folgt

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{\mu x_1}.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ lierfert

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

□

Bemerkung 5.10. Falls $c = 0$ in den obigen Satz, dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Korollar 5.11. *Sei $c \leq 0$. Seien $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $-Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u \leq 0$ in Ω.*

Korollar 5.12 (Vergleichsprinzip)**.** *Sei $c \leq 0$. Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $-Lu \leq -Lv$ in Ω und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u \leq v$ in Ω.*

Beweis. Die Differenz $w = u - v$ erfüllt $-Lw \leq 0$ in Ω und $w \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Nach Korollar 5.11 gilt $w \leq 0$ in Ω. $\square$

Das Vergleichsprinzip rechtfertigt die Name der Sublösung.

Bemerkung 5.13. Under der Bedingung

$$c \leq 0 \text{ in } \Omega$$

gilt

$$\left.\begin{cases} -Lu & \leq & -Lv & \text{in } \Omega \\ \quad u & \leq & v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}\right\} \Longrightarrow u \leq v \text{ in } \Omega.$$

Korollar 5.14 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $c \leq 0$ in Ω. Für $f \in C(\Omega)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$ existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von*

$$\begin{aligned} -Lu &= f, && \textit{in } \Omega, \\ u &= \varphi && \textit{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.15. 1. Die Eindeutigkeit, und auch das Maximumprinzip, gilt i. A. nicht für unbeschränkten Gebiete.

Betrachte

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

in $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash B_1$. Eine nichttriviale Lösung ist gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} \log|x|, & \text{falls } n = 2, \\ |x|^{2-n} - 1, & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

2. Die Eindeutigkeit, und auch das Maximumprinzip, gilt i. A. auch nicht für $c > 0$.

Betrachte $\Omega = (0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ und

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} \sin x_i.$$

Dann ist u eine nichttriviale Lösung von

$$\begin{aligned} -(\Delta u + nu) &= 0, && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $c = n > 0$. Eigentlich ist n die Eigenwert von $-\Delta$ mit der Dirichletrandbedingung.

5.3. **Starkes Maximumprinzip.**

Theorem 5.16 (Hopf-Lemma)**.** *Sei $\Omega = B$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in \partial B$. Sei $c(x) \leq 0$ in B. Sei $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ eine Unterlösung von $-Lu = 0$, d.h., $-Lu \leq 0$ in B. Weiter gelten $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in B$ und $u(x_0) \geq 0$. Dann gilt*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

wobei ν die äußere Normale von B an x_0 ist.

Beweis. Aus die Voraussetzung $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in B$, gilt $u(x) \leq u(x_0)$ für alle $x \in \overline{B}$. OBdA annemhen wir an, dass $B = B_R$ für ein $R > 0$. Aus der Stetigkeit von u in $\overline{B}$ gilt

$$u(x) \leq u(x_0) \quad \text{für alle } x \in \overline{B}_R.$$

Für positive Konstante μ und ε setzen wir

$$v(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon w(x)$$

mit

$$w(x) = e^{-\mu|x|^2} - e^{-\mu R^2}.$$

Wir betrachten w und v in $\Omega := B_R \backslash \overline{B}_{R/2}$. Eine direkte Berechnung liefert

$$\begin{aligned} Lw &= e^{-\mu|x|^2}\big\{4\mu^2\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j - 2\mu\sum_i a_{ii} - 2\mu\sum_i b_ix_i + c\big\} - ce^{-\mu R^2} \\ &\geq e^{-\mu|x|^2}\big\{4\mu^2\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j - 2\mu\sum_i a_{ii} - 2\mu\sum_i b_ix_i + c\big\}, \end{aligned}$$

da $c \leq 0$ in Ω. Aus der Elliptizität haben wir

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)x_ix_j \geq \lambda|x|^2 \geq \lambda\frac{R^2}{4} > 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Es liefert

$$Lw \geq e^{-\mu|x|^2}\{\mu^2\lambda R^2 - 2\mu\sum_i(a_{ii} + b_ix_i) + c\} \geq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

wenn wir μ hinreichend groß wählen. Da $c(x) \leq 0$ in Ω und $u(x_0) \geq 0$, gilt

$$-Lv = -Lu - \varepsilon Lw + cu(x_0) \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

für alle $\varepsilon > 0$. Der Rand von Ω, $\partial\Omega$, hat zwei Komponente. Auf $\partial B_{R/2}$ gilt nach Voraussetzung $u - u(x_0) < 0$. Bei der Stetigkeit haben wir

$$u - u(x_0) < -\varepsilon \quad \text{auf } \partial B_{R/2}$$

für eine kleine $\varepsilon > 0$. Da $w < 1$ auf $\partial B_{R/2}$, haben wir $v < 0$ auf $\partial B_{R/2}$ für diese kleine ε. Auf ∂B_R ist es leicht zu sehen, dass $v \leq 0$ gilt, denn $w = 0$ auf ∂B_R. Das schwache Maximumprinzip liefert $v \leq 0$ in Ω. Da $v(x_0) = 0$, ist x_0 einer maximale Punkt von v. Es folgt

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0,$$

bzw.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = 2\varepsilon\mu R^{-\mu R^2} > 0.$$

□

Definition 5.17 (Kugelbedingungen)**.** Für Ω, eine *innere Kugelbedingung* in $x_0 \in \partial\Omega$ bedeutet es eine Kugel $B \subset \Omega$ derart existiert, so dass $x_0 \in \partial B$.

Für Ω, eine *äußere Kugelbedingung* in $x_o \in \partial\Omega$ bedeutet es eine Kugel B derart existiert, so dass

$$\Omega \cap B = \emptyset, \quad \overline{\Omega} \cap \overline{B} = \{x_0\}$$

gilt.

Bemerkung 5.18. Theorem 5.16 gilt für jedes beschänktes C^1-Gebiet, das die innere Kugelbedingung in $x_0 \in \partial\Omega$ erfüllt.

Theorem 5.19 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $c \leq 0$ und L strikt elliptisch. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Unterlösung von $-Lu = 0$, d.h., $-Lu \leq 0$ in Ω. Dann u nimmt ihr nicht negatives Maximum nur am Rand $\partial\Omega$, ansonst ist u konstant.*

Beweis. Sei M das Maximum von u in $\overline{\Omega}$ und setze

$$D := \{x \in \Omega \,|\, u(x) = M\}.$$

Wir zeigen, dass $D = \emptyset$ oder $D = \Omega$. Angenommen, dass $D \neq \emptyset$. Aus der Stetigkeit von u ist D relativ abgeschlossen in Ω. Dann ist $\Omega\backslash D$ offen, und existiert eine offene Kugel $B \subset \Omega\backslash D$ mit $\partial B \cap D \neq \emptyset$. Denn wir wählen einen Punkt $x^* \in \Omega\backslash D$ mit $\operatorname{dist}(x^*, D) < \operatorname{dist}(x^*, \Omega)$ und dann nehmen B die Kugel mit dem Radius $\operatorname{dist}(x^*, D)$ und dem Zentrum im x^*. Sei $x_0 \in \partial B \cap D \neq \emptyset$. Offensichtlich gilt

$$-Lu \leq 0 \text{ in } B, \text{ und } u(x) < u(x_0) \text{ in } B \text{ mit } u(x_0) = M \geq 0.$$

Nach Satz 5.16 gilt
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$
Ein Widerspruch zu $\nabla u(x_0) = 0$. $\square$

Nun können wir Korollar 5.11 verbessern.

Korollar 5.20. *Sei $c \leq 0$. Seien $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $-Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt entweder $u < 0$ in Ω oder u ist eine nicht-positive Konstante in Ω.*

6. Die Wärmeleitungsgleichung

6.1. Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Definition 6.1 (Wärmeleitungsgleichung)**.** Für $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ($u = u(x,t) = u(x_1, \cdots, x_n, t)$) heißt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \tag{6.1}$$

Wärmeleitungsgleichung oder Diffusionsgleichung.

$\Delta = \Delta_x$ is der Laplace-Operator in $\mathbb{R}^n$. Ist u eine Lösung von (6.1), so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ auch eine Lösung. (Übung) Das deutet hin, dass die Quotient $\frac{r^2}{t}$ ($r = |x|$) ist wichtig für die Wärmeleitungsgleichung. Wir wollen die spezielle Lösung unter der Ansatz

$$u(x,t) = v(\frac{r^2}{t}) = v(\frac{|x|^2}{t}), t > 0$$

finden. (Sehen Aufgabe 5.2) Aber es ist besser folgende Form

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v(\frac{x}{t^\beta}), \quad t > 0 \tag{6.2}$$

zu benutzen, wobei α, β konstant sind. Die Idee ist so: wir suchen eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die unter der Transformation

$$u(x,t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

invariant ist. D.h.,

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

für alle $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$. Setze $\lambda = t^{-1}$. Wir leiten (6.2) für $v(y) := u(y, 1)$ her. Nun setzen wir (6.2) in (6.1) ein und erhalten nach Berechnung

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \tag{6.3}$$

für $y := t^{-\beta} x$. Wir nehmen $\beta = \frac{1}{2}$, so dass Gleichung (6.3) nur von y abhängig ist. Also bekommen wir

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0. \tag{6.4}$$

Nun suchen wir wie am Anfang der Vorlesung für die Laplace-Gleichung die rotationssymmetrische Lösung v von (6.4), d.h. $v(y) = w(|y|)$. w erfüllt die ODE

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

für $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$. Nun wir wählen $\alpha = \frac{n}{2}$ und erhalten eine einfachere ODE

$$(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2}(r^n w)' = 0,$$

bzw.

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = c,$$

füt eine Konstante c. Dann haben wir

$$w = b e^{-\frac{r^2}{4}}.$$

Also

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} v\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} w\left(\left|\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right|\right) = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

eine Lösung von (6.1). Man kann direkt nachprüfen, dass diese eine Lösung ist. (Übung).

Definition 6.2 (Fundamentallösung)**.** Die Funktion $\gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ vermöge

$$\gamma(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0 & t < 0 \text{ oder } t = 0, x \neq 0. \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Die Rolle der Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung γ ist sehr ähnlich wie der Fundamentallösung der Laplacegleichung Γ in Definition 2.6.

Lemma 6.3. *Sei γ die Fundamentallösung Wärmeleitungsgleichung. Es gilt*

(i) Die Fundamentallösung γ ist glatt auf ihrem Definitionsbereich.
(ii) $\gamma(x,t) > 0$ für alle $t > 0$.
(iii) Die Fundamentallösung ist tatsächlich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times R \backslash \{(0,0)\}$. D h. $\gamma_t - \Delta\gamma = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$.
(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(y,t)dy = 1$ für alle $t > 0$.
(v) für alle $\delta > 0$,

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\delta} \gamma(x,t)dx = 0.$$

Proof. (i) unf (ii) sind klar. (iii) und (iv) kann man direkt nachprüfen. (Übung). (v) folgt aus

$$\int_{|x|>\delta} \gamma(y,t)dy = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta|>\frac{\delta}{2\sqrt{t}}} e^{-|\eta|^2} d\eta \to 0,$$

als $t \to 0^+$. Hierbei haben wir die Transformationssatz mit $\frac{y}{2\sqrt{t}} = \eta$ benutzt. □

Sie vergleichen diese Lemma mit Lemma 2.8 für Γ.

Bemerkung 6.4. Man kann die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung so interpretieren, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Temperatur überall auf dem $\mathbb{R}^n$ gleich 0, außer im Ursprung, wo sie unendlich ist. Die Fundamentallösung beschreibt dann, wie sich die Temperatur ausbreitet. Wegen $\gamma(x,t) > 0, \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit unendlich groß; bereits nach beliebig kurzer Zeit $t > 0$ hat sich etwas Wärme in beliebig weit vom Ursprung entfernte Punkte ausgebreitet.

Bemerkung 6.5. Für festes $(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$(x,t) \mapsto \gamma(x-y, t-s)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \backslash \{(y,s)\}$.

6.2. **Die homogene Wärmeleitungsgleichung.**

Bezeichnung:

$$C^{k,l}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) = \left\{ \begin{array}{r} u : (\mathbb{R}^n \times (0,T)) \to \mathbb{R}; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, j \in \{0,\dots,l\}, \text{ mit } |\alpha| \le k : \\ D_t^j D_x^\alpha u \in C^0(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \text{ existieren} \end{array} \right\}$$

Dabei $T \in (0,\infty]$. Analog für Zeitintervalle $[0,T), (0,T], [0,T]$, Gebiete Ω statt $\mathbb{R}^n$, bzw. deren Abschluss $\overline{\Omega}$.
Bezeichnung: Wir benutzen die folgende Bezeichnungen:

$$C_b^0(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

und für $f \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = \varphi, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Das Problem heißt das Anfangswertproblem für die (homogene) Wärmeleitungsgleichung oder das Cauchyproblem für die Wärmeleitungsgleichung.

Satz 6.6. *Sei $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert für $t > 0$ die Funktion*

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)\varphi(y)dy \tag{6.6}$$

eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, und für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),t>0} u(x,t) = \varphi(x_0).$$

Es gilt die Abschätzung

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall t > 0. \tag{6.7}$$

In dieser Klasse, d.h. in $C_b^0([0,\infty)\times\mathbb{R}^n) \cap C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ ist die Lösung von (6.5) mit Anfangswertannahme wie oben eindeutig bestimmt. Außerdem gelten für die Ableitungen von u die folgenden Abschätzungen:

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, $k \in \mathbb{N}_0$; dann existiert eine Konstante $C = C(\alpha,k,n)$, so dass für alle $t > 0$ gilt:

$$\|D_x^\alpha D_t^k u(\cdot,t)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \le C t^{-k-\frac{|\alpha|}{2}} \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.8}$$

Bemerkung 6.7. (i) Man beachte qualitativ und quantitativ (siehe (6.7)) den extrem glättenden Charakter der Wärmeleitungsgleichung. Das zeigt auch: wenn überhaupt, dann kann man die Rckwärtswärmeleitungsgleichung bestenfalls für C^∞-Daten lösen. Hierbei ist die Rckwärtswärmeleitungsgleichung

$$u_t + \Delta u = 0.$$

(ii) Bei im Unendlichen ggfs. stark anwachsenden Lösungen (stärker als exponentiell) geht die Eindeutigkeit i.a. verloren, vgl. di Benedetto V.5.1. Randwerte im Unendlichen sind für die Eindeutigkeit erforderlich.

(iii) Wir definieren die *Wärmeleitungshalbgruppe*, indem wir für $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ setzen:

$$e^{t\Delta}\varphi(x) := u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)\varphi(y)dy.$$

Zum Begriff "Halbgrupp": Das bedeutet, dass

$$\forall t,s \ge 0 : e^{(t+s)\Delta}\varphi = e^{t\Delta}(e^{s\Delta}\varphi); \quad e^{(t+s)\Delta} = e^{t\Delta} \circ e^{s\Delta}.$$

Zur rechten Seite: Man löst (6.5) mit Anfangsdatum φ bis zur Zeit s. $u(s,.)$ nimmt man dann als Anfangsdatum und löst bis zur Zeit t, bzw., da (6.5) gegenüber Zeitverschiebungen invariant ist, auf $[s,s+t]$. So erhält man eine Lösung von (6.5) auf $[0,t+s]$. Wegen unseres Eindeutigkeitsresultats ist diese gleich $e^{(t+s)\Delta}\varphi$.

Beweis von Satz 6.6. In den Beweis benutzen wir mehr male Lemma 6.3.

Schritt 1. $u \in C^\infty((\mathbb{R}^n \times (0,))$, Vertauschbarkeit von Integral und Ableitungen.

Sei $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$. im Folgenden beliebig, aber fest. Für beliebiges, aber im Folgenden festes $R > 1$ reicht es, den Bereich

$$t \in [R^{-1}, R], \quad |x| < R$$

zu betrachten. Sei weiter $k_0 \in \mathbb{N}$ fest, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n, k \in \mathbb{N}_0$ beliebig mit $|\alpha| + k \le k_0$. Um den Satz über parameterabhängige Integrale zur Vertauschbarkeit 6von Differentiation und Integration auf $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)\varphi(y)dy$ müssen wir für

$$|D_x^\alpha D_t^k \gamma(x-y,t)||\varphi(y)|$$

eine integrierbare Majorante als Funktion in y finden, deren Wahl zwar von R, k_0, φ abhängen darf, aber ansonsten unabhängig von t, x und α, k erfolgen muss. Zunächst beobachtet man, dass mit geeigneten Polynomen $P_{\alpha,k}$ gilt

$$D_x^\alpha D_t^k \gamma(x-y,t) = P_{\alpha,k}(\frac{1}{\sqrt{t}}, x, y)\gamma(x-y,t). \tag{6.9}$$

Unter den gemachten Annahmen findet man in Abhängigkeit von n, R, k_0 ein Polynom Q, so dass $\forall t \in [R^{-1}, R], \forall x \in B_R(0), \forall y \in \mathbb{R}^n$:

$$|D_x^\alpha D_t^k \gamma(x-y,t)\varphi(y)| \leq Q(|y|) \cdot \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}.$$

Für $|y| \leq 2R$ schätzen wir trivial ab:

$$\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4R}\right) \leq 1$$

Für $|y| \geq 2R$ schätzen wir ab:

$$|x-y| \geq |y| - |x| \geq |y| - R \geq |y| - \frac{1}{2}|y| = \frac{1}{2}|y|,$$

bzw

$$\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4R}\right) \leq \exp\left(-\frac{|y|^2}{16R}\right).$$

Mit der Setzung

$$\tilde{\gamma}(y) = \begin{cases} 1, & |y| \leq 2R, \\ \exp\left(-\frac{|y|^2}{16R}\right), & |y| \geq 2R, \end{cases}$$

eine Majorante für den Integranden in (6.6) die wegen des exponentiellen Abklingens von $\tilde{\gamma}$ im Unendlichen integrierbar ist. Das zeigt $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ sowie in (6.6) die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration.

Schritt 2. u löst die Wärmeleitungsgleichung.

Mit den soeben erledigten Vorarbeiten fällt dieses nun leicht:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)u(x,t) &= (\partial_t - \Delta)\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)\varphi(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t - \Delta)\gamma(x-y,t)\varphi(y)dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $(\partial_t - \Delta)\gamma(x-y,t) = 0$ gilt.

Schritt 3. Supremumsabschätzung (6.7).

Mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)dy = 1 \quad \forall t > 0, \tag{6.10}$$

schätzen wir für beliebiges $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)|\varphi(y)|dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)\|\varphi\|_{C^0}dy = \|\varphi\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Schritt 4. Anfangswertannahme für $t \searrow 0$.

Zu zeigen ist lokal gleichmäßige Konvergenz $u(\cdot,t) \to \varphi$. Wir beginnen mit einer auf (6.10) basierenden Beobachtung:

$$\begin{aligned}
u(x,t) - \varphi(x) &= u(x,t) - \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)\varphi(x)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)(\varphi(y) - \varphi(x))dy \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\eta|^2)(\varphi(x+2\sqrt{t}\eta) - \varphi(x))d\eta \qquad (y = x + 2\sqrt{t}\eta) \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \{ \int_{|\eta|\leq R_1} + \int_{|\eta|\geq R_1} \} =: I + II,
\end{aligned}$$

für eine Konstane $R_1 > 0$, die wählen wir spät.

Sei $R_0 > 0$ beliebig aber fest. Wir betrachten $|x| \leq R_0$. Ferner sei oBdA $t \leq 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir bestimmen $R_1 > 0$ so, dass

$$\frac{2\|\varphi\|_{C^0}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta|\geq R_1} \exp(-|\eta|^2)d\eta \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

und erhalten

$$|II| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Wir nun betrachten I. Sei $K := \overline{B_{R_0+2R_1}(0)}$, diese Menge is kompakt. Unter den gemachten Annahmen gilt: $|\eta| \leq R_1 \Rightarrow x, x+2\sqrt{t}\eta \in K$. Auf K ist φ gleichmäßig stetig. Also existiert $\delta > 0$, so dass

$$\xi, \xi' \in K: \quad |\xi - \xi'| < \delta \Rightarrow |\varphi(\xi) - \varphi(\xi')| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei zusätzlich $0 < t < \left(\frac{\delta}{2R_1}\right)^2$, dann ist

$$|x + 2\sqrt{t}\eta - x| \leq 2|\sqrt{t}\eta| \leq 2|\eta|\frac{\delta}{2R_1} \leq \delta,$$

sofern $|\eta| \leq R_1$. Somit für $|x| \leq R_0$, $0 < t < \min\{1, \left(\frac{\delta}{2R_1}\right)^2\}$ gilt

$$|I| \leq \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta|\leq R_1} \exp(-|\eta|^2)\frac{\varepsilon}{2}dy \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt haben wir

$$|u(x,t) - \varphi(x)| \leq |I| + |II| \leq \varepsilon,$$

für $|x| \leq R_0$, $0 < t < \delta_1$ mit $\delta_1 = \min\{1, \left(\frac{\delta}{2R_1}\right)^2\}$.

Schritt 5. Höhere Abschätzungen von u.

Durch die Betrachtung erster und zweiter räumlicher Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_i - x_i}{2t} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)\varphi(y)dy \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{y_i - x_i}{2t}\frac{y_j - x_j}{2t} - \frac{\delta_{ij}}{2t}\right) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)\varphi(y)dy
\end{aligned}$$

kommt man auf die Vermutung, dass für $|\alpha| = m$ mit einem Polynom P_α vom Grade $\leq m$ gilt:

$$D_x^\alpha u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{m}{2}} P_\alpha\left(\frac{y-x}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)\varphi(y)dy.$$

Man kann durch Induktion nach m zeigen. Damit folgt für $|\alpha| = m$

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha u(x,t)| &\leq \frac{\|\varphi\|_{C^0}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} t^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| P_\alpha\left(\frac{y-x}{\sqrt{t}}\right)\right| \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \\ &= \frac{\|\varphi\|_{C^0}}{(\pi)^{\frac{n}{2}}} t^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |P_\alpha(2\eta)| \exp\left(-\eta^2\right) dy. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\|D_x^\alpha u(\cdot,t)\|_{C^0} \leq C(n,m) t^{-\frac{m}{2}} \|\varphi\|_{C^0}.$$

Das ist Behauptung (6.7) für rein räumliche Ableitungen, d.h. $k = 0$.

Hieraus und aus der Dgl.

$$u_t - \Delta u = 0$$

erhält man direkt auch die Ableitungen für zeitliche und gemischte Ableitungen:

$$u_t - \Delta u = 0, \quad u_{tt} = (\Delta u)_t = \Delta u_t = \Delta^2 u$$

und

$$D_t^k u = \Delta^k u, \quad D_t^k D_x^\alpha u = D_x^\alpha \Delta^k u.$$

eine zeitliche Ableitung wirkt wie 2 räumliche Ableitungsordnungen. Damit zeit (6.7)

$$\|D_t^k D_x^\alpha u(\cdot,t)\|_{C^0} \leq C(n,|\alpha|,k) t^{-\frac{2k+|\alpha|}{2}} \|\varphi\|_{C^0}.$$

Schritt 6. Eindeutigkeit von u in C_b^0.

Dieser Punkt erfordert noch gründlichere Vorarbeiten zum parabolischen Maximumprinzip und wird deshalb erst unten behandelt.

□

Bemerkung 6.8. Der Satz impliziert, dass jede stetige Funktion in $\mathbb{R}^n$ durch glatter Funktionen lokal gleichmäßig approximieren kann.

Bemerkung 6.9. In Distributionenschreibweise gilt für γ:

$$\begin{aligned} \gamma_t - \Delta\gamma &= 0, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\} \\ \gamma &= \delta_0, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{aligned}$$

wobei δ_0 das Dirac-Maß an 0 ist.

Bemerkung 6.10. (6.7) ist eine Art des Maximumprinzips für das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung (6.5): Die durch (6.6) definierte Lösung gilt das Maximumprinzip.

Den Rest dieses Abschnitts widmen wir der noch offenen Eindeutigkeitsfrage für das Cauchyproblem (6.5). Dazu müssen wir zunächst auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ arbeiten. Sei $T \in (0,\infty]$ beliebig. Es bezeichne

$$\Omega_T := \Omega \times (0,T]$$

den Raum-Zeit-Zylinder und

$$\partial_p\Omega_T = \partial\Omega \times (0,T] \cup \Omega \times \{0\}$$

dessen *parabolischen Rand.*

Satz 6.11 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Für $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ gelte*

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Dann gilt:

$$\sup_{\overline{\Omega_T}} u = \sup_{\partial_p\Omega_T} u.$$

Proof. Es reicht, $T < \infty$ zu betrachten; hieraus folgt die Behauptung für $T = \infty$ durch einen einfachen Grenzübergang.

Sei $T < \infty$. Erste, zeigt man das Maximumprinzip für

$$u_t - \Delta u < 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Dann betrachtet man die Funktion $u_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon t$, die $u_t - \Delta u < 0$ in Ω_T erfüllt. □

Satz 6.12. *Für $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ gelte $u_t - \Delta u \geq 0$ in Ω_T. Dann:*

$$\inf_{\Omega_T} u = \inf_{\partial_p \Omega_T} u.$$

Korollar 6.13. *Für $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ gelte*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, && \text{in } \Omega_T \\ u &= 0, && \text{auf } \partial_p \Omega_T. \end{aligned}$$

Dann gilt $u \equiv 0$ in $\overline{\Omega_T}$.

Satz 6.14. *Für $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_T) \cap C^0_b(\overline{\mathbb{R}^n_T})$ gelte*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &\geq 0, && \text{in } \mathbb{R}^n_T \\ u &\geq 0, && \text{auf } \partial_p \mathbb{R}^n_T. \end{aligned}$$

Dann:

$$u \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_T.$$

Proof. ODdA sei $T < \infty$. Sei $\beta > 0$ so, dass $\frac{1}{4\beta} > T$. Wir betrachten für $t \leq T < \frac{1}{4\beta}$:

$$G(x,t) := v(x,t) = (1 - 4\beta t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{\beta |x|^2}{1 - 4\beta t}\right). \tag{6.11}$$

v erfüllt die Gleichung $v_t - \Delta v = 0$ in $\mathbb{R}^n_T$. (Übung)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir betrachten

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon v.$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,t} - \Delta u_\varepsilon &\geq 0, && \text{in } \mathbb{R}^n_T \\ u_\varepsilon &\geq 0, && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$

Da für jedes x: $t \mapsto v(x,t)$ wachsend ist, hat man

$$v(x,t) \geq v(x,0) \geq \exp(\beta |x|^2).$$

Da $u \in C^0_b(\mathbb{R}^n_T)$, kann man in Abhängigkeit von u, ε ein $\rho_0 > 0$ finden, so dass für $\rho > \rho_0$ mit $\Omega = B_\rho(0)$ gilt

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,t} - \Delta u_\varepsilon &\geq 0, && \text{in } \Omega_T \\ u_\varepsilon &\geq 0, && \text{auf } \partial_p \Omega_T. \end{aligned}$$

Mit dem Maximumprinzip, Satz 6.12, haben wir

$$u_\varepsilon \geq 0 \text{ in } \overline{\Omega}_T.$$

Mit $\rho \to \infty$ erhalten wir $u_\varepsilon = u + \varepsilon v \geq 0$ in $\overline{\mathbb{R}}^n_T$. Mit $\varepsilon \to 0$ foglt

$$u \geq 0 \text{ in } \overline{\mathbb{R}}^n_T.$$

□

Das liefert nun direkt die in Satz 6.6 behauptet Eindeutigkeit für (6.5) in Klassen beschränkter Funktionen:

Korollar 6.15. *Für $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_T) \cap C^0_b(\overline{\mathbb{R}^n_T})$ gelte*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, && \text{in } \mathbb{R}^n_T \\ u &= 0, && \text{auf } \partial_p \mathbb{R}^n_T. \end{aligned}$$

Dann:

$$u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_T.$$

Die Eindeutigkeit gilt in der Klasse der $C^0_b(\overline{\mathbb{R}^n_T})$. Außer der Klasse gilt die Eindeutigkeit i. a. nicht.

Proposition 6.16. *Es gibt eine glatte Lösung $0 \neq u \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ des Cauchyproblems*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, && \text{in } \mathbb{R} \times [0,\infty) \\ u &= 0, && \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Proof. Ein Beispiel findet man im Buch von Qing Han, s. 164. □

Wir können das Chauchyproblem (6.5) in einer größen Klasse lösen.

Satz 6.17. *Sei $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$|\varphi(x)| \leq M e^{A|x|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{6.12}$$

für Konstanten $M, A > 0$. Dann die durch (6.6) definierte Funktion u ist glatt in $\mathbb{R}^n \times (0, \frac{1}{4A})$ und erfüllt

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, (4A)^{-1}).$$

Weiter, für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = \varphi(x_0).$$

Proof. Falls $A = 0$, dieser ist Satz 6.6. Also können wir $A > 0$ annehmen. Mit der Voraussetzung (6.12) von φ und der Eigenschaften von γ schätzen wir ab:

$$|u(x,t)| \leq \frac{M}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{4t}|x-y|^2 + A|y|^2} dy.$$

Eine direkte Berechnung folgt

$$-\frac{1}{4t}|x-y|^2 + A|y|^2 = -\frac{1-4At}{4t}\left|y - \frac{1}{1-4At}x\right|^2 + \frac{A}{1-4At}|x|^2.$$

Dann für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, 1/(4A))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{M}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{A}{1-4At}|x|^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1-4At}{4t}\left|y - \frac{1}{1-4At}x\right|^2} dy \\ &\leq \frac{M}{(1-4At)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{A}{1-4At}|x|^2}. \end{aligned}$$

Für die Abschätzungen der Ableitungen von u können wir durch eine Abschätzungen von

$$|P_\alpha(y)| e^{-\frac{1}{4t}|x-y|^2 + A|y|^2}$$

erhalten. Alle Aussagen kann man ähnlich wie in Satz 6.6 zeigen.

□

6.3. **Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung.** Für geeignete Daten$f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wollen wir versuchen, eine Lösung u des Cauchyproblems der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x), \qquad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u(x,0) &= \varphi(x), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{6.13}$$

zu finden. Dabei ist $T > 0$.

Wie schon die Bezeichnung $e^{t\Delta}$ in Satz 6.6 andeutet, ist es sehr gewinnbringend, sich (auch bei hyperbolischen) Evolutionsgleichungen von der - natürlich technisch wesentlich einfacheren - Situation bei gewöhnlichen Differentialgleichungen leiten zu lassen. Sei $a < 0$ eine reelle Zahl, für einen Moment $\varphi \in \mathbb{R}$, wir betrachten das AWP der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$u'(t) - au(t) = f, \quad u'(0) = \varphi \tag{6.14}$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine allgemeinere Lösung der homogenen Dgl. ist gegeben. durch $t \to be^{at}$, eine spezielle Lösung erhält man durch den Ansatz "Variation der Konstante"

$$v(t) = b(t)e^{at}.$$

Diese Funktion löst die Dgi. genau dann wenn

$$\begin{aligned} b'(t)e^{at} + ab(t)e^{at} - ab(t)e^{at} = f(t) \quad &\Leftrightarrow \quad b'(t) = e^{-at}f(t) \\ &\Leftrightarrow \quad b(t) = b(0) + \int_0^t e^{-as} fsds \\ &\Leftrightarrow \quad v(t) = b(0)e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s)ds. \end{aligned}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (6.14) ist dann gegeben durch

$$u(t) = e^{at}\varphi + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s)ds.$$

Indem man formal a durch Δ ersetzt und alle Funktionen als in (x,t) interpretiert, gelangt man auch für (6.13) zu einem zunächst formalen Lösungsansatz, der im Folgenden rigoros gerechtfertigt werden wird.

Satz 6.18. *Es bezeichne $e^{t\Delta}$ die Wärmeleitungshalbgruppe wie in Satz 6.6. Sei $T \in (0,\infty), \varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n), f \in C_b^0(\overline{R}_T^n)$ und so, dass für $t > 0$ die räumlichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existieren und dass $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C_b^0([\delta,T] \times \mathbb{R}^n)$ für alle $\delta \in (0,T]$. Dann ist*

$$u(x,t) = (e^{t\Delta}\varphi)(x) + \int_0^t \left(e^{(t-s)\Delta} f(\cdot,s)\right)(x)ds$$

in $C_b^0(\overline{\mathbb{R}}_T^n) \cap C^{2,1}(\mathbb{R}_T^n)$ und löst in der Tat das Cauchyproblem (6.13) für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit rechter Seite f und Anfangsdatum φ. In dieser Klasse ist die Lösung eindeutig bestimmt.

Beweis. Zur Eindeutigkeit s. Korollar 6.15. Wir brauchen uns also nur mit der Existenzaussage zu befassen. Auf Grund von Satz 6.6 und der Linearität der Wärmeleitungsgleichung reicht es, hier den Fall $\varphi \equiv 0$ zu behandeln.

Sei $\varepsilon_0 > 0$ beliebig, für $t \geq \varepsilon_0$ und $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ sei

$$u_\varepsilon(x,t) := \int_0^{t-\varepsilon} \left(e^{(t-s)\Delta} f(\cdot,s)\right)(x)ds,$$

damit vermeiden wir den unangenehmen Zeitpunkt $s = t$, wo die Stetigkeits- und insbesondere die Differenzierbarkeitsaussagen zusammenbrechen. Der Integrand ist bzgl. (x,t) beliebig oft differenzierbar; für (x,t) aus einer relativ kompakten offenen Teilmenge von $[\varepsilon_0,T] \times \mathbb{R}^n$ und $s \leq t - \varepsilon$

gleichmäßig beschränkt. Wir haben $u_\varepsilon \in C^\infty([\varepsilon_0, T]\times\mathbb{R}^n)$ insbesondere also $u_\varepsilon \in C^{2,1}([\varepsilon_0, T]\times\mathbb{R}^n)$. Wir zeigen nun, dass $u_\varepsilon \to u$ gleichmäßig auf $[\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
u(x,t) - u_\varepsilon(x,t) &= \int_{t-\varepsilon}^{t} \left(e^{(t-s)\Delta} f(\cdot, s)\right)(x) ds \\
\|u(\cdot,t) - u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C^0} &\leq \int_{t-\varepsilon}^{t} \|e^{(t-s)\Delta} f(\cdot, s)\|_{C^0} ds \\
&\overset{(6.7)}{\leq} \int_{t-\varepsilon}^{t} \|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n\times[0,T])} ds \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{C^0(\overline{R}^n_T)}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|u - u_\varepsilon\|_{C^0(\mathbb{R}^n\times[\varepsilon_0,T])} \leq \varepsilon \cdot \|f\|_{C^0(\overline{R}^n_T)}.$$

Mit $\varepsilon \to 0^+$ folgt die geleichmäßige Konvergenz, also Stetigkeit für $t \geq \varepsilon_0$.

Ganz analoge Argumente zeigen: u ist auch in $t = 0$ stetig, und

$$\|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T)} \leq T \cdot \|f\|_{C^0(\overline{R}^n_T)}. \tag{6.15}$$

Wir zeigen nun ganz ähnlich, dass auf $[\varepsilon_0, T]$ die ersten räumlichen partiellen Abeitungen $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}$ für $\varepsilon \to 0^+$ eine gleichmäßige Cauchyfolge bilden. Seien $0 < \varepsilon \leq \varepsilon' < \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(x,t) - \frac{\partial}{\partial x_j} u_{\varepsilon'}(x,t) &= \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{(t-s)\Delta} f(\cdot, s)\right)(x) ds \\
\|\frac{\partial}{\partial x_j} u(\cdot,t) - \frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C^0} &\leq \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} \|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{(t-s)\Delta} f(\cdot, s)\right)\|_{C^0} ds \\
&\leq c\int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n\times[0,T])} ds \qquad \text{(mit (6.8))} \\
&\leq 2C(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon})\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n\times[0,T])}
\end{aligned}$$

Somit haben wir, da ε_0 beliebig, $u \in C^{1,0}(\mathbb{R}^n_T)$. Ganz ähnlich erhält man auch

$$\|u_{x_j}\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T)} \leq C \cdot \sqrt{T} \|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n\times[0,T])}. \tag{6.16}$$

Würde man nun naiv weiter so verfahren, erhielte man für die zweite räumliche (und erste zeitliche) Ableitung die nicht integrierbare Singularität $(t-s)^{-1}$. Also ist diese nicht funktioniert.

Wir beobachten aber, dass für festes $0 < s < t$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{(t-s)\Delta} f(\cdot, s)\right)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y, t-s) f(s,y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j}\gamma(x-y, t-s) f(s,y) dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_j}\gamma(x-y, t-s) f(s,y) dy \qquad \text{(Kettenregel)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y, t-y) \frac{\partial}{\partial y_j} f(s,y) dy \qquad \text{(Satz von Gauß)} \\
&= e^{(t-s)\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial y_j} f(\cdot, s)\right)(x).
\end{aligned}$$

In dee Anwendung des Gaußschen Integralsatz benutzen wir, dass die Funktion $\frac{\partial}{\partial y_j}\gamma(x-y, t-s)$ schnell fallend ist und f beschränkt ist. Nun kann man analog zu oben fortfahren: Seien nun

$0 < \varepsilon \leq \varepsilon' < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Für $t \in [\varepsilon_0, T]$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(\cdot,t) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{C^0} &\leq \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} \|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{(t-s)\Delta} D_j f(\cdot,s)\right)\|_{C^0} ds \\
&\leq C \int_{t-\varepsilon'}^{t-\varepsilon} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|D_j f\|_{C^0(\mathbb{R}^n \times [\frac{\varepsilon+0}{2}, T])} ds \qquad \text{(mit (6.8))} \\
&\leq 2C(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon}) \|f\|_{C^{1,0}(\mathbb{R}^n \times [\frac{\varepsilon_0}{2}, T])} \to 0, \quad \text{für } \varepsilon, \varepsilon' \to 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir $u \in C^{2,0}(\mathbb{R}^n_T)$ und $\int_0^t$ und Ableitungen vertauschen in diesem Sinne. Zur Kontrolle der zeitlichen Ableitungen benutzen wir die Lösungseigenschaften der Wärmeleitungshalbgruppe. Man beachte, dass bei u_ε selbst alle Vertauschungsprozesse uneingeschränkt möglich sind.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-\varepsilon} e^{(t-s)\Delta} f(\cdot,s)(x) ds \\
&= e^{\varepsilon\Delta} f(\cdot, t-\varepsilon)(x) + \int_0^{t-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(t-s)\Delta} f(\cdot,s)\right)(x) ds \\
&= e^{\varepsilon\Delta} f(\cdot, t-\varepsilon)(x) + \int_0^{t-\varepsilon} \Delta\left(e^{(t-s)\Delta} f(\cdot,s)\right)(x) ds \quad \text{(Satz 6.6)} \\
&= e^{\varepsilon\Delta} f(\cdot, t-\varepsilon)(x) + \Delta u_\varepsilon(x,t). \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0^+$ konvergiert der zweite Term gleichmäßig gegen $\Delta u(x,t)$. Zum ersten Term: Hier gehen wir ganz parallel vor wie beim Beweis der lokal glm. Konvergenz für $t \to 0^+$ in Satz 6.6. Wir beschränken uns für beliebiges, aber dann fixiertes $R_0 > 0$ und $|x| \leq R_0$:

$$\begin{aligned}
f(x,t) - e^{e\Delta} f(\cdot, t-\varepsilon)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,\varepsilon)(f(x,t) - f(y,t-\varepsilon)) dy \\
&\overset{y=x+2\sqrt{\varepsilon}\eta}{=} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|\eta|^2)(f(x,t) - f(x+2\sqrt{\varepsilon}\eta, t-\varepsilon)) d\eta \\
&= \{\int_{|\eta| \leq R_1} + \int_{|\eta| \geq R_1}\} =: I + II
\end{aligned}$$

für eine Konstane R_1, die wählen wir spät Set $\tau > 0$ gegeben. Wir bestimmen R_1 wie im Beweis von Satz 6.6, dass

$$\frac{2\|f\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T)}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|\eta| \geq R_1} \exp(-|\eta|^2) d\eta \leq \frac{1}{2}\tau$$

und erhalten

$$|II| \leq \frac{1}{2}\tau.$$

Sei $R_0 > 0$ beliebig, aber fest. Auf $\overline{B}_{R_0+2R_1}(0) \times [0,T]$ ist f glm. stetig (wir betracten $\varepsilon < 1$). Wähle ε hinreichend klein, so hat man für $t \in [\varepsilon_0, T], x \in \overline{B}_{R_0}$:

$$\forall \eta \in \overline{B}_{R_1}: \quad |f(x,t) - f(x+2\sqrt{\varepsilon}\eta, t-\varepsilon)| \leq \frac{\tau}{2}.$$

Es folgt

$$|I| \leq \frac{1}{2}\tau,$$

und

$$|f(x,t) - e^{\varepsilon\Delta} f(\cdot, t-\varepsilon)(x)| \leq \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}\tau = \tau.$$

Das zeigt: für $t \in [\varepsilon_0, T]$ konvergiert auch der erste Term der rechten Seite von (6.17) lokal glm., und zwar gegen $f(x,t)$, so dass: $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_T)$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x,t) \to \frac{\partial}{\partial t} u(x,t),$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = f(x,t) + \Delta u(x,t)$$

für $\varepsilon \to 0^+$. □

6.4. **Eine nichtlineare Wärmeleitungsgleichung.** Gegeben sei eine geeignete Nichtlinearität $f:\mathbb{R}\to R$ sowie ein Anfangsdatum $\varphi\in C_b^0(\mathbb{R}^n)$. Gesucht ist $T>0$ und $u\in C_b^0(\overline{\mathbb{R}}_T^n)\cap C_b^{2,1}(\mathbb{R}_T^n)$ als Lösung von

$$\begin{aligned} u_t(x,t)-\Delta u(x,t) &= f(u(x,t)) && \text{für } (x,t)\in\mathbb{R}_T^n, \\ u(x,0) &= \varphi(x) && \text{für } x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Als Modell-Nichtlinearität kann man etwa an

$$f(u)=|u|^{p-1}u,\quad p>1,$$

denken. Im Vergleich mit (6.13) stellt man nun fest: die rechte Seite ist nun nicht mehr explizit als Funktion von (x,t) gegeben, sondern in Abhängigkeit von der gesuchten (!) Lösung u. Das Problem ist nun nichtlinear, falls f nicht linear ist.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man nun nicht mehr mit der Existenz einer Lösung für alle positiven Zeiten rechnen, sondern die Bestimmung eines Existenzintervalls $[0,T]$ wird Bestandteil des Problems. Ebenso wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen wird man aber die nichtlineare Lösungstheorie auf den linearen Lösungsformeln aufbauen. Formulieren wir das Cauchyproblem (6.18) mit Hilfe der Formel der Variation der Konstanten aus Satz 6.18 (in geeigneten Funktionenräumen äquivalent) um, so erhalten wir

$$u(x,t)=(e^{t\Delta}\varphi)(x)+\int_0^t\left(e^{(t-s)\Delta}f(u(\cdot,s))\right)(x)ds. \tag{6.19}$$

Statt einer Lösungsformel wie im linearen Fall haben wir nun eine Fixpunktgleichung für u zu betrachten. Idee: den Banachschen Fixpunktsatz verwenden (wie beim Beweis z.B. des Satzes von Picard-Lindelöf), den wir kurz in Erinnerung rufen:

Satz 6.19. *Banachscher Fixpunktsatz Sei V ein Banachraum, $A\subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sei $F:A\to A$ eine strikte Kontraktion, d.h. es gibt ein $q<1$, so dass für alle $u,v\in A$ gilt:*

$$\|F(u)-F(v)\|\le q\|u-v\|.$$

(Insbesondere ist also F Lipschitz-stetig vorausgesetzt!) Dann besitzt F genau einen Fixpunkt $u_0\in A$, so dass also

$$F(u_0)=u_0.$$

Formulieren wir also einen abstrakten Rahmen gemäß diesem Satz für das Fixpunktproblem (6.19), das wir nun (an Stelle von (6.18)) betrachten wollen. Für geeignetes, noch zu fixierendes $T>0$, wählen wir

$$V:=V_T:=C_b^0(\overline{\mathbb{R}}_T^n),\quad \|w\|_V=\|w\|_{C_b^0(\overline{\mathbb{R}}_T^n)}$$

als Banachraum. Seier $\varphi\in C_b^0(\mathbb{R}_T^n)$, $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ im Folgenden fest; als (nichtlineare) Abbildung definieren wir

$$w(x,t):=(Fv)(x,t):=(e^{t\Delta}\varphi)(x)+\int_0^t\left(e^{(t-s)\Delta}f(v(\cdot,s))\right)(x)ds. \tag{6.20}$$

Gemäß dem Beweis von Satz 6.18, dort insbesondere Abschätzung (6.15), und der Stetigkeit von f haben wir

$$F:V\to V.$$

Bei der Definition der Menge A ist der “Anfangswertantei” besonders in Betracht zu ziehen; die rechte Seite wirkt für kleines T untergeordnet. Wir fixieren eine Konstante $C_1>0$, so dass $\|\varphi\|_{C^0}\le C_1$ und wählen beliebiges $C_2>0$:

$$A:=A_T:=\{v\in V:\|v(t)-e^{t\Delta}\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}\le C_2\quad\forall t\in[0,T]\}. \tag{6.21}$$

Sicher ist A abgeschlossen, nun ist $T>0$ so (klein) zu wählen, dass

$$F:A\to A \text{ und damit eine strikte Kontraktion wird.}$$

Zu diesem Zwecke bezeichne

$$M_1 := \max_{|v|\leq C_1+C_2} |f(v)|, \quad M_2 := \max_{|v|\leq C_1+C_2} |f'(v)| \tag{6.22}$$

Um $F(A) \subset A$ zu erreichen, betrachten wir für $v \in A$: man beachte: $v \in A \Rightarrow \|v(t)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 + C_2$

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,T]: \quad \|(Fv)(\cdot,t) - (e^{t\Delta}\varphi)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &= \| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(v(\cdot,s))ds\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} f(v(s))\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} ds \\ &\leq \int_0^t \|f \circ v(s)\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}^n)} ds \quad ((6.7)) \\ &\leq T \cdot M_1. \end{aligned}$$

Wir wählen T offensichtlich mit

$$T \cdot M_1 < C_2, \tag{6.23}$$

so dass $Fv \in A$ gilt. Also unter (6.23) haben wir $F : A \to A$.

Um auch noch die strikte Kontraktionseigenschaft zu erhalten, betrachten wir für $u, v \in A$,

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,T]: \quad \|(Fv)(t) - Fu(t)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &= \| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(f(v(s)) - f(u(s)))ds\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \int_0^t \|f(v(s)) - f(u(s))\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} ds \quad ((6.7)) \\ &\leq T \cdot M_2 \|u - v\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T)}. \end{aligned}$$

Wählen wir zusätzlich zu (6.23) T so, dass

$$T < \frac{1}{M_2}, \tag{6.24}$$

Dann haben wir mit

$$q := TM_2 < 1,$$

dass

$$u, v \in A \Rightarrow \|F(u) - F(v)\|_V \leq q\|v - u\|_V.$$

Damit liefert der Banachsche Fixpunktsatz: Wählt man T gemäß (6.23) und (6.24), so hat man für jedes Datum $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi\|_{C_0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1$ ein

$$u \in A \subset C_b^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T), \quad u \text{ löst Fixpunktgleichung (6.19).}$$

□

Man überlegt sich direkt: Für alle f, die dieselben Schranken M_1, M_2 einhalten, hat man dasselbe garantierte Existenzintervall.

Satz 6.20. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $C_1, C_2 > 0$ beliebige Konstanten. Weiter seien $M_1, M_2 > 0$ so, dass*

$$\max_{|v|\leq C_1+C_2} |f(v)| \leq M_1, \quad \max_{|v|\leq C_1+C_2} |f'(v)| \leq M_2. \tag{6.25}$$

Dann gibt es eine Zeit $T > 0$, die nur (über (6.23), (6.24)) von C_1, C_2, M_1, M_2 abhängt, so dass gilt:

Für jedes $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_1$ gibt es eine Lösung

$$u \in C_b^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T) \quad \text{mit } \|u\|_{C^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T)} \leq C_1 + C_2$$

der Fixpunktgleichung (6.19). *Außerdem haben wir* $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_T)$, *und* u *löst das Cauchyproblem* (6.18)*:*

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(u(x,t)) &\quad \textit{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n_T, \\ u(x,0) &= \varphi(x) &\quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Beweis. Nur der letzte Teil bleibt noch zu zeigen. Dazu reicht es zu zeigen, dass für $t \in [0,T]$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(u(x,t)) \in C^0_b([\varepsilon,T] \times \mathbb{R}^n)$$

existieren und dann Satz 6.18 anzuwenden. Fixpunktgleichung (6.19) lautet:

$$u(x,t) = (e^{t\Delta}\varphi)(x) + \int_0^t \left(e^{(t-s)\Delta} f(u(\cdot,s)) \right)(x) ds.$$

Der erste Term ist ohnehin beliebig glatt, beim zweiten könnte man wie im Beweis von Satz 6.18 verfahren oder direkt auf den Lebesgueschen Konvergenzsatz abheben: Der Integrand ist bzgl. x auf $[0,t)$ diff'bar, und

$$\begin{aligned} \| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(e^{(t-s)\Delta} f(u(\cdot,s)) \right)(x) \|_{C^0(\mathbb{R}^n)} &\leq C \cdot |t-s|^{-\frac{1}{2}} \| f(u(\cdot,s)) \|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq CM_1 |t-s|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Diese Singularität ist aber in $s \in [0,t]$ integrierbar, und es folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \cup_{\varepsilon>0} C^0_b(\mathbb{R}^n \times [\varepsilon,T]).$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial x_j} f(u) = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}$ folgt auch

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f \circ u \in \cup_{\varepsilon>0} C^0_b(\mathbb{R}^n \times [\varepsilon,T]),$$

und mit Satz 6.18 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 6.21. Da wir mit stetig differenzierbarer rechter Seite arbeiten, kann man in $C^0(\overline{\mathbb{R}}^n_T) \cap C^{2,1}(\mathbb{R}_T)$ insgesamt Eindeutigkeit zeigen; Hilfsmittel ist das Gronwallsche Lemma. Damit liegt es auf der Hand, dass man

$$T_{\max} \text{ als maximale Existenzzeit von } u \text{ zu } f, \varphi$$

wohldefinieren kann. $T_{\max} = T_{\max}(\varphi, f)$. In der Regel wird $T_{\max} < \infty$ sein. Gelingt es aber, eine Konstante $C_1 > 0$ zu finden, so dass für jede Lösung, solange sie existiert, stets gilt

$$|u(t,x)| \leq C_1, \tag{6.26}$$

so ist $T_{\max} = \infty$ (vgl. gew. Dgl.): Man nehme T aus Satz 6.20. Wegen (6.26) kann man sukzessive auf Intervallen der Länge T lösen; diese verklebten Lösungen lösen insgesamt. Da man das Verfahren unbegrenzt wiederholen kann, gelangt man so für alle Zeiten $t > 0$ zu einer Lösung. (T in Satz 6.20 nur von C_1, C_2, M_1, M_2 abhängt.)

Ob man eine a-priori-Abschätzung wie (6.26) erbringen kann, hängt z.B. von der Anwendbarkeit des Maximumprinzip und damit davon ab, ob die Nichtlinearität

$$u \mapsto f(u)$$

eine geeignete Vorzeichenbedingung erfüllt. Ist etwa stets $u \cdot f(u) \leq 0$, so hat man globale Existenz, während man bei der typischen Reaktions-Diffusions-Nichtlinearität

$$f(u) = |u|^{p-1} u$$

mit "blow-up" in endlicher Zeit rechnen. Dazu vgl. man unten Beispiel 6.23 unten.

Bemerkung 6.22. Ist z.B. $f(u) = |u|^{p-1}u$, $p > 1$, so hat man neben Kurzzeitexistenz noch ein weiteres Charakteristikum für semilineare Wärmeleitungsgleichungen in (6.18) in Ω und Randbedingungen:

Bei hinreichend kleinen Anfangsdaten $\|\varphi\|_{C^0} \leq\leq \varepsilon_0$ hat man globale Existenz von Lösungen,

$$\text{falls } \begin{cases} p > 1, & \Omega \text{ beschärnkt} \\ p > 1 + \frac{2}{n}, & \Omega = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Dazu zeigt man mit Hilfe des superlinearen Verhaltens von f nahe 0, dass die Lösung, so lange sie existiert, klein bleibt. Laut Bemerkung 6.21 hat man dann für alle Zeiten eine Lösung.

Beispiel 6.23 (Blow up in endlicher Zeit)**.** Wir betrachten das semilineare Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u^3 && \text{für } x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x,t) &= \varphi(x), && \text{für } x \in (0, \pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, && \text{für } t > 0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

mit Kompatibilitätsbedingung:

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

Indem man φ ungerade nach $(-\pi, \pi)$ und dann 2π-periodisch nach π fortsetzt, kann man aus Satz 6.20 lokale Existenz in der Zeit einer Lösung erschließen. Indem man auch $u(-x,t)$ und $u(x+2\pi,t)$ betrachtet, so kann man mit dem (hier nicht bewiesenen) Eindeutigkeitsresultat für 6.18 auch das Erfülltsein der Randbedingungen zeigen.

Wir wollen Anfangsdaten φ finden, für die die Lösung nach endlicher Zeit auf hört zu existieren, so dass also $T_{\max} < \infty$ gilt. Dazu setzen wir voraus, dass

$$\varphi \geq 0, \quad \varphi \not\equiv 0.$$

Aus dem starken Maximumprinzip (ebenfalls nicht bewiesen) kann man folgern, dass

$$\forall t > 0, \forall x \in (0, \pi) : u(x,t) > 0, \text{ solange } u \text{ existiert.} \tag{6.28}$$

Die entscheidende Größe wird

$$S(t) = \int_0^\pi u(x,t) \sin x dx \tag{6.29}$$

sein, wir wollen $S(t) \to \infty$ in endlicher Zeit nachweisen. Dazu leiten wir eine gewöhnliche Differentialungleichung für $S(t)$ her, indem wir die Differentialgleichung aus (6.27) mit $\sin x$ testen: (Wir bemerken, dass $v(x) = \sin x$ eine Lösung von $-v_{xx} = v$ ist.)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u^3 \sin x dx &= \int_0^\pi u_t \sin x dx - \int_0^\pi u_{xx} \sin x dx \\ &= S'(t) - \int_0^\pi u_x \cos x dx \\ &= S'(t) + \int_0^\pi u \sin x dx \\ &= S'(t) + S(t) \end{aligned} \tag{6.30}$$

Ziel ist die Herleitung einer Differentialungleichung

$$S'(t) + \underbrace{S(t)}_{\text{dämpft}} \geq \varepsilon \underbrace{S^3(t)}_{\text{treibt}}.$$

Bei kleinen S erwarten wir Dominanz des linearen dämpfenden Terms, bei großen dagegen des treibenden nichtlinearen Terms und damit blow-up. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} S^3(t) &= \left(\int_0^\pi u(x,t)\sin x dx\right)^3 = \left(\int_0^\pi \underbrace{u(x,t)\sin^{\frac{1}{3}} x}_{p=3} \underbrace{\sin^{\frac{2}{3}} x}_{q=\frac{3}{2}} dx\right)^3 dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int_0^\pi u^3 \sin x dx \left(\int_0^\pi \sin x dx\right)^2 \\ &\leq 4\int_0^\pi u^3 \sin x dx. \end{aligned}$$

Es folgt aus (6.30):

$$S'(t) + S(t) \geq \frac{1}{4} S^3(t). \tag{6.31}$$

Solange u existiert, ist wegen (6.28) $S(t) > 0$ und wir können aus (6.31) folgern

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{S'}{S^3} \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{S^2}\right) \\ &\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{4}{S^2}\right)' \geq 2\left(1 - \frac{4}{S^2}\right) \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \left(1 - \frac{4}{S^2}\right)' - 2\left(1 - \frac{4}{S^2}\right) = e^{2t}\left(e^{-2t}\left(1 - \frac{4}{S^2}\right)\right)' \\ &\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{4}{S^2(0)}\right) \leq e^{-2t}\left(1 - \frac{4}{S^2(t)}\right) \\ &\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{4}{S^2(t)}\right) \geq e^{2t}\left(1 - \frac{4}{S^2(0)}\right) \end{aligned}$$

Wir setzen nun voraus, dass

$$1 - \frac{4}{S^2(0)} > 0 \Leftrightarrow S(0) = \int_0^\pi \varphi(x)\sin x dx > 2 \tag{6.32}$$

Dann gilt nach endlicher Zeit $1 - \frac{4}{S(t)} \nearrow 1$, d.h. $S(t) \nearrow \infty$. Das ist der Fall für ein $t < T_{crit}$ mit

$$\begin{aligned} 1 = \exp(2T_{crit})\left(1 - \frac{4}{S(0)}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad -2T_{crit} = \log\left(1 - \frac{4}{S(0)}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad T_{crit} = \log\sqrt{\frac{S^2(0)}{S^2(0) - 4}}. \end{aligned}$$

Das bedeutet:

Ist $\varphi \in C^0([0,\pi]), \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0,\ 0 \neq \varphi \geq 0$, so dass

$$\int_0^\pi \varphi(x)\sin x\, dx > 2,$$

dann explodiert die zugehörige Lösung spätestens zur Zeit

$$T_{crit} = \log\sqrt{\frac{S^2(0)}{S^2(0) - 4}}, \quad \text{mit } S(0) = \int_0^\pi \varphi(x)\sin x\, dx$$

so dass

$$T_{\max}(\varphi) \leq T_{crit}(\varphi).$$

7. Das Maximumprinzip und Abschätzungen der Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen im diesen Kapitel das Maximumprinzip der Wärmeleitungsgleichung weiter untersuchen.

7.1. Mittelwerteigenschaft.

Wie die harmonische Funktionen besitzen die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung eine ähnliche Mittelwerteigenschaft.

Definition 7.1 (Der Wärmeball)**.** Zu $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$ definieren wir den Wärmeball

$$E(x,t,r) := \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | s \leq t \text{ und } \gamma(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r^n}\}.$$

Bei der Mittelwerteigenschaft werden wir eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung über den Wärmeball mitteln. Dies steht tatsächlich in Analogie zu der Mittelung über einen Ball im $\mathbb{R}^n$, die wir bei der Laplace-Gleichung vorgenommen hatten: Setzt man nämlich in die Definition des Wärmeballs für γ mit der die Fundamentallsung $\Gamma(x-y)$ der Laplace-Gleichung ein, so erhält man einen euklidischen Ball um x.

Bemerkung 7.2. Wir wollen uns einmal üerlegen, wie dieser Wärmeball aussieht. Dazu betrachten wir ihn "scheibenweis", bestimmen also $E(x,t,r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\})$ für verschiedene s.

(i) Für $s > t$ ist $E(x,t,r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\})$ leer.
(ii) Für $s = t$, $E(x,t,r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\}) = \{(x,t)\}$.
(iii) Sei $s < t$.

$$\begin{aligned} \gamma(x-y,t-s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} &\geq \frac{1}{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{|x-y|^2}{4(t-s)} &\geq \log\left(\frac{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}{r^n}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{|x-y|^2}{4(t-s)} &\leq \log\left(\frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right) \\ \Leftrightarrow \qquad |x-y| &\leq 2\sqrt{t-s}\sqrt{\log\left(\frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right)} \end{aligned}$$

D.h., $E(x,t,r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\})$ ist der Ball um x mit Radius

$$2\sqrt{t-s}\sqrt{\log\left(\frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right)}$$

Aber dieser Radius ist nur für alle s mit

$$4\pi(t-s) \leq r^2 \Leftrightarrow s \geq t - \frac{r^2}{4\pi}$$

definiert.

Wir fassen zusammen:

$$E(x,t,r) \cap (\mathbb{R}^n \times \{s\}) = \begin{cases} \emptyset, & s > t \\ \{(x,t)\}, & s = t \\ \overline{B}(x, 2\sqrt{t-s}\sqrt{\log\left(\frac{r^n}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}\right)}, & t - \frac{r^2}{4\pi} < s < t \\ \{(x, t - \frac{r^2}{4\pi})\}, & s = t - \frac{r^2}{4\pi} \\ \emptyset, & s < t - \frac{r^2}{4\pi} \end{cases}$$

Bemerkung 7.3. (i) Translation: $E(x,t,r)$ ist der Ball $E(0,0,r)$ zum (x,t) verschieben.
(ii) Skalierung: $E(0,0,r)$ ist eine Skalierung von $E(0,0,1)$ durch $y \to ry$, $s \to r^2 s$.
(iii) $E(y,s,r)$ ist kompakt.

Bemerkung 7.4. Sei $E(r) = E(0,0,r)$. Wir haben

$$\int_{E(1)} \frac{|z|^2}{\rho^2} dz d\rho = 4 \tag{7.1}$$

und

$$\int_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = r^n \int_{E(1)} \frac{|z|^2}{\rho^2} dz d\rho = 4r^n.$$

Der Beweis von (7.1) ist eine Lange Berechnung. Den genauen Wert 4 benutzen wir hier eigentlich nicht.

Satz 7.5 (Mittelwerteigenschaft für Lösung der Wärmeleitungsgleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ eine Lösung der Wr̈meleitungsgleichung. Dann gilt*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(x,t,r)} u(y,s) \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2} dy ds$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$ mit $E(x,t,r) \subset \Omega_T$.

Beweis. Verschiebe das Koordinatensystem so, dass $(x,t) = (0,0)$.

1. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} \psi(y,s) := \log(r^n \gamma(-y,-s)) &= \log\left(\frac{r^n}{(4\pi(-s))^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{4(-s)}}\right) \\ &= \log\left(\frac{r^n}{(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|y|^2}{4s}}\right) \\ &= -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log r. \end{aligned}$$

Bei der Definition von $E(0,0,r)$ ist es klar, dass $E(0,0,r) = \{\psi \geq 0\}$ und $\partial E(0,0,r) = \{\psi = 0\}$. Weiter haben wir

$$\nabla\psi = \frac{y}{2s}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial s} = -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}. \tag{7.2}$$

2. Nun betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi(r) &:= \frac{1}{4r^n} \int_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \frac{1}{4} \int_{E(1)} u(rz, r^2\tau) \frac{|z|^2}{\tau^2} dz d\tau \qquad (\text{mit } y = rz, s = r^2\tau) \end{aligned}$$

Da $E(1)$ kompakt ist, sind alle Ableitungen von u beschränkt und wir können unter dem Integralzeichen differenzieren:

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \frac{1}{4} \int_{E(1)} \frac{d}{dr}\left(u(rz, r^2\tau)\right) \frac{|z|^2}{\tau^2} dz d\tau \\ &= \frac{1}{4} \int_{E(1)} \left(\nabla_y u(rz, r^2\tau) \cdot z + u_s(rz, r^2\tau) \cdot 2r\tau\right) \frac{|z|^2}{\tau^2} dz d\tau \\ &= \frac{1}{4r^n} \int_{E(r)} \left(\nabla_y u(y,s) \cdot \frac{y}{r} + u_s(y,s)\frac{2s}{r}\right) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \qquad (z = \frac{y}{r}, s = \frac{\tau}{r^2}) \\ &= \frac{1}{4r^{n+1}} \int_{E(r)} \nabla_y u(y,s) \cdot y \cdot \frac{|y|^2}{s^2} dy ds + \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} u_s(y,s) \frac{|y|^2}{2s} dy ds \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

3. Nun können wir I_2 bestimmen:

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} u_s(y,s) \frac{|y|^2}{2s} dyds \\ &\overset{(7.2)}{=} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} u_s(y,s) \nabla_y \psi \cdot y dyds \end{aligned}$$

Nun verwanden wir den Satz von Gauß.

$$\begin{aligned} I_2 &\overset{(7.2)}{=} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} u_s(y,s) \nabla_y \psi \cdot y \, dyds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} \operatorname{div}_y (u_s y) \psi dyds \qquad \text{(Gauß nach } y) \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} (\nabla_y u_s \cdot y + n u_s) \psi \, dyds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} (-\nabla_y u \cdot y \psi_s + n u_s \psi) \, dyds \qquad \text{(Gauß nach } s) \\ &\overset{(7.2)}{=} -\frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} (\nabla_y u \cdot y (\frac{n}{2s} + \frac{|y|^2}{4s^2}) + n u_s \psi) \, dyds \\ &= -I - \frac{1}{r^{n+1}} \int_{E(r)} (n \nabla_y u \cdot \frac{y}{2s} + n u_s \psi) \, dyds \\ &= -I - \frac{n}{r^{n+1}} \int_{E(r)} (\nabla_y u \cdot \nabla \psi + u_s \psi) \, dyds \\ &= -I - \frac{n}{r^{n+1}} \int_{E(r)} (-\Delta u \cdot \psi + u_s \psi) \, dyds \qquad \text{(Gauß nach } y) \\ &= -I - \frac{n}{r^{n+1}} \int_{E(r)} (-\Delta u + u_s) \psi \, dyds. \end{aligned}$$

Im der Anwendungen den Gaußschen Integralsatz haben wir immer $\psi_{|\partial E(r)} = 0$ benutzt. Folglich erhalten wir

$$\varphi'(r) = -\frac{n}{r^{n+1}} \int_{E(r)} (-\Delta u + u_s) \psi \, dyds. \tag{7.3}$$

Es folgt $\varphi'(r) = 0$, da u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

4. Nun müssen wir noch den Wert von φ bestimmen.

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \lim_{\rho \searrow 0} \varphi(\rho) \\ &= \lim_{\rho \searrow 0} \frac{1}{4\rho^n} \int_{E(\rho)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dyds \\ &= u(0,0) \lim_{\rho \searrow 0} \frac{1}{4\rho^n} \int_{E(\rho)} \frac{|y|^2}{s^2} dyds \\ &= u(0,0). \end{aligned}$$

□

Korollar 7.6 (Mittelwerteigenschaft für Unterlösung der Wärmeleitungsgleichung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T)$ eine Unterlösung der Wr̈meleitungsgleichung, d.h.*

$$u_t - \Delta u \le 0, \qquad \text{in } \Omega_T.$$

Dann gilt

$$u(x,t) \le \frac{1}{4r^n} \int_{E(x,t,r)} u(y,s) \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2} dyds$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$ *mit* $E(x,t,r) \subset \Omega_T$.

Satz 7.7 (Maximumprinzip)**.** *Sei* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei* $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ *eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt:*

(i) (Schwaches Maximumprinzip.) Das Maximum von u *wird auf dem parabolischen Rand* $\partial_p\Omega_T$ *angenommen:*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\partial\Omega_T} u.$$

(ii) (Starkes Maximumprinzip.) Falls es ein $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ *mit* $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$ *gibt, dann ist* u *konstant auf* Ω_{t_0}*.*

Beweis. (i) Vergleichen Sie Satz 6.11. (i) ist auch eine Folgerung von (ii).

(ii) Wie in Satz 2.13 für harmonische Funktionen, folgt das starke Maximumprinzip aus MWE., Satz 7.5. Der Beweis ist änhlich, aber nicht ganz gleich.

a) Sei $(x_0,t_0) \in \Omega_t$ mit $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u := M$. Wähle $r > 0$ so klein, dass $E(x_0,t_0,r) \subset \Omega_t$. Dann gilt wegen der MWE:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4r^n}\int_{E(x_0,t_0,r)} u(y,s)\frac{|y-x_0|^2}{(t_0-s)^2}dyds \\ &\le M\frac{1}{4r^n}\underbrace{\int_{E(x_0,t_0,r)} \frac{|y-x_0|^2}{(t_0-s)^2}dyds}_{=4r^2} \\ &= M. \end{aligned}$$

Somit muss in der Ungleichung die Gleichheit gelten, also $u(y,s) = M$ für alle $(y,s) \in E(x_0,t_0,r)$.

b) Sei $x_1 \in \Omega$ so, dass die Strecke $\overline{x_0x_1} = \{x \in \Omega \,|\, x = tx_0 + (1-t)x_1 := x_t, t \in [0,1]\}$ ganz in Ω liegt. Sei $t_1 \in (0,t_0)$. Dann verläuft die Strecke $\overline{(x_0,t_0)(x_1,t_1)} := L$ ganz in Ω_T. Wir zeigen dass $u(x_1,t_1) = M$. Betrachte den Zeitpunkt

$$\tilde{t} := \min\{t \in [t_1,t_0] \,|\, u(x,\tau) = M \text{ für alle } (x,\tau) \in L \text{ mit } \tau \in [t,t_0]\}.$$

Wegen der Stetigkeit von u wird dieses Minimum tatsächlich angenommen. Also gilt $u(x_{\tilde{t}},\tilde{t}) = M$. Wir behaupten, dass $\tilde{t} = t_1$. Da $u(x_{\tilde{t}},\tilde{t}) = M$, nach a) existiert ein $\rho > 0$ mit $u(y,t) = M$ für alle $(y,t) \in E(x_{\tilde{t}},\tilde{t},\rho)$. Wäre nun $\tilde{t} > t_1$, so wäre $L \cap E(x_{\tilde{t}},\tilde{t},\rho) \neq \emptyset$. Da jedoch für alle $(y,t) \in E(x_{\tilde{t}},\tilde{t},\rho)$ mit $((y,t) \neq (x_{\tilde{t}},\tilde{t})$ die Relation $t < \tilde{t}$ gilt, hätten wir $\tilde{t}$ nicht minimal gewählt. Ein Widerspruch. Dann muss $\tilde{t} = t_1$ sein. Insbesondere haben wir gezeigt, dass $u(x_1,t_1) = M$.

c) Seien nun $x \in \Omega$ und $0 < s < t_0$ beliebig. Da Ω zusammenhängend ist, finden wir eine Menge von Punkten $\{x_0, x_1, \cdots, , x_m = x\}$ in Ω derart, dass die Strecken $\overline{x_{i-1}x_i}, i = 1,\cdots,m$ ganz in U enthalten sind. Wenn wir überdies eine Folge $t_0 > t_1 > \cdots > t_m = s$ von Zeitpunkten wählen, so liegen die Strecken $\overline{(x_{i-1},t_{i-1})(x_i,t_i)}, i = 1,\cdots,m$ ganz in Ω_T. Nach b) gilt demnach

$$M = u(x_0,t_0) = u(x_1,t_1) = u(x_2,t_2) = \cdots = u(x_m,t_m) = u(x,s).$$

Also ist $u \equiv M$ auf $\overline{\Omega_{t_o}}$. □

Bemerkung 7.8. Unterschied zum Beweis von Satz 2.13 kann man mit a) die Offenheit der Menge $A := \{(y,t) \in \Omega_T | u(y,s) = M\}$ nicht zeigen. Denn $E(x_0,t_0,r)$ ist keine Umgebung von (x_0,t_0), da dieser Punkt auf dem Rand des Wärmeballs liegt.

Bemerkung 7.9. Der Satz gilt für die Unterlösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u \le 0.$$

Bemerkung 7.10. Für die Oberlösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u \ge 0,$$

gilt das entsprechende Minimumprinzip. Dann gilt:

(i) Das Minimum von u wird auf dem parabolischen Rand $\partial_p \Omega_T$ angenommen:

$$\min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\partial \Omega_T} u.$$

(ii) Falls es ein $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit $u(x_0, t_0) = \min_{\overline{\Omega}_T} u$ gibt, dann ist u konstant auf Ω_{t_0}.

Bemerkung 7.11. Das starke Maximum- bzw. Minimumprinzip macht lediglich eine Aussage über Ω_{t_0}. Für Zeiten $t > t_0$ ist eine Änderung möglich. Betrachte z.B. die verschobene Fundamentallösung $u(x,t) := \gamma(x, t - t_0)$ auf Ω_T, wobei $0 \notin \Omega$ und $T > t_0$. Für alle $x \in \Omega$ ist $u(x, t_0) = \gamma(x, 0) = 0$, und u ist auch tatsächlich konstant 0 auf Ω_{t_0}; aber u verschwindet nirgends für $t > t_0$.

Korollar 7.12. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, && \textit{in } \Omega_T \\ u &= 0, && \textit{auf } \partial\Omega \times [0, T] \\ u &= \varphi, && \textit{auf } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, aber $\varphi \not\equiv 0$. Dann folgt dass $u > 0$ in Ω_T.

Korollar 7.12 bedeutet, dass die Wärmeleitungsgleichung eine Eigenschft, die unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, hat.

Bemerkung 7.13. Vergleichen Sie den Satz 7.7 (i) mit dem Satz 6.11. Für das schwache Maximumprinzip haben wir zwei Beweisen. Für das stake Maximumprinzi, Satz 7.7 (ii), haben wir auch eine 2. Beweis Abschnitt 7.3 unten.

7.2. **Die Regularität und Abschätzungen.** In diesem Anschnitt betrachten die Regularität der Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Für eine $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und $R > 0$ definieren wir

$$Q_R(x_0, t_0) = B_R(x_0) \times (t_0 - R^2, t_0].$$

We bemerken, dass solche Gebiete die gleiche Rolle wie die Bälle für Laplace-Gleichung spielen. Sei u eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung, $u_t - \Delta u = 0$ in $Q_R(0)$. Dann ist

$$u_R(x, t) = u(Rx, R^2 t)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichungin $Q_1(0)$. Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, we bezeichnen $C^{2,1}(D)$ die Menge aller Funktionen, die in C^2 bzgl x und in C^1 bzgl. t sind.

Satz 7.14. *Sei u eine $C^{2,1}$ Lösung der Wärmeleitungsgleichungin $Q_R(x_0, t_0)$. Dann ist u glatt in $Q_R(x_0, t_0)$.*

Beweis. Durch Verschiebung nehmen wir an, dass $(x_0, t_0) = (0, 0)$ und bezeichnen $Q_R =_R (x_0, t_0)$. OEdA nehmen wir an, dass u beschränkt in $\overline{Q}_R$ ist. Ansonst betrachten wir u in Q_r für alle $r < R$. We behauten: für alle $(x, t) \in Q_R$ gilt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{B_R} \gamma(x-y, t+R^2) u(y, -R^2) dy \\ &\quad + \int_{-R^2}^{t} \int_{\partial B_R} \left\{ \gamma(x-y, t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y, s) - u(y, s) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu_y}(x-y, t-s) \right\} dS_y ds. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Wir zeigen die Behauptung spät. Aus der Behauptung zeigen wir nun die Glattheit der Funktion u. Das erste Integral der linken Seite ist über $B_R \times \{-R^2\}$. Für $(x, t) \in Q_R$ ist es klar dass $t + R^2 > 0$ und womit keine Sinularität in dem ersten Integral gibt. Das zweite Integral ist über $\partial B_R \times (-R^2, t]$. Bei Substitution der Variabel $\tau = t - s$ wir können das zweite Integral neu schreiben als

$$\int_0^{t+R^2} \int_{\partial B_r} \left\{ \gamma(x-y, \tau) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y, t-\tau) - u(y, t-\tau) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu_y}(x-y, \tau) \right\} dS_y d\tau.$$

Es gibt auch keine Sinularität in dem zweiten Integral, da $x \in B_R, y \in \partial B_y$ und $\tau > 0$. Folglich ist u in Q_R glatt.

Nun zeigen wir (7.4). Erste beobachten wir dass $\tilde{\gamma}(y, s) := \gamma(x - y, t - s)$ die sogenannte Rückwärtswärmeleitungsgleichung

$$\tilde{\gamma}_s + \Delta_y \tilde{\gamma} = 0 \tag{7.5}$$

Dann ist u glatt in $Q_R(x_0, t_0)$. erfüllt. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\gamma}(u_s - \Delta_y u) \\ &= (u\tilde{\gamma})_s + \operatorname{div}(u \nabla \tilde{\gamma} - \tilde{\gamma} \nabla u) - u(\tilde{\gamma}_s + \Delta_y \tilde{\gamma}) \\ &= (u\tilde{\gamma})_s + \operatorname{div}(u \nabla \tilde{\gamma} - \tilde{\gamma} \nabla u). \end{aligned}$$

Für alle kleine $\varepsilon > 0$ mit $t - \varepsilon > -R^2$ integrieren wir diese Formel bzgl (y, s) in $R_R \times (-R^2, t - \varepsilon)$. Es folgt

$$\begin{aligned} & - \int_{-R^2}^{t-\varepsilon} \int_{\partial B_R} \left\{ u(y,s) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu_y}(x-y, t-s) - \gamma(x-y, t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y, s) \right\} \\ = & - \int_{-R^2}^{t-\varepsilon} \int_{\partial B_R} \left\{ u(y,s) \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \nu_y}(y, s) - \tilde{\gamma}(y, s) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y, s) \right\} \\ = & \int_{B_R} u(y, t-\varepsilon) \tilde{\gamma}(y, t-\varepsilon) dy - \int_{B_R} u(y, -R^2) \tilde{\gamma}(y, -R^2) dy \\ = & \int_{B_R} u(y, t-\varepsilon) \gamma(x-y, \varepsilon) dy - \int_{B_R} u(y, -R^2)) \gamma(x-y, t-(-R^2)) dy \end{aligned}$$

Wir brauchen nur

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_R} u(y,t-\varepsilon)\gamma(x-y,\varepsilon)dy = u(x,t).$$

Diese kann man wie in den Schritt 4 des Beweis von Satz 6.6. (Übung.) □

Nun zeigen wir Abschätzungen der Ableitungen der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Satz 7.15. *Sei u eine $C_b^{2,1}$ Lösung der Wärmeleitungsgleichungin $Q_R(x_0,t_0)$. Dann gilt*

$$\nabla_x u(x_0,t_0) \le \frac{C}{R}\sup_{Q_R(x_0,t_0)}|u|,$$

wobei C eine nur von n abhängte positive Konstante ist.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $(x_0,t_0)=(0,0)$ und $R=1$. Allgemeiner kann man durch Verschiebung und Skalierung zeigen. Betrachte $Q_r = B_r\times(-r^2,0]$ für $r\in(0,1)$. FÜr feste $(x,t)\in Q_{\frac14}$, wie in dem obigen Satz setze

$$\tilde\gamma(y,s) := \gamma(x-y,t-s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac n2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \qquad \text{für } s<t.$$

Nun brauchen wir eine Abschneide-Funktion (cut-off function) $\varphi\in C^\infty(Q_1)$ mit $\operatorname{supp}\varphi\subset Q_{3/4}$ und $\varphi\equiv 1$ in $Q_{1/2}$. Setze

$$v=\varphi\tilde\gamma.$$

Man kann wir vorher nachprüfen, dass

$$0 = v(u_s-\Delta u) = (uv)_s + \operatorname{div}(u\nabla v - v\nabla u) - u(v_s+\Delta v).$$

Für klein $\varepsilon>0$ integrieren wir bzgl (y,s) über $B_1\times(-1,t-\varepsilon)$. Wir beachten, dass die Rand-Integrale über $B_1\times\{-1\}$ und $\partial B_1\times(-1,t-\varepsilon)$ verschwinden. Es folgt

$$\int_{B_1}(\varphi u)(y,t-\varepsilon)\gamma(x-y,\varepsilon)dy = \int_{B_1\times(-1,t-\varepsilon)} u(\partial_s+\Delta_y)(\varphi\tilde\gamma)dyds.$$

Wie in den Schritt 4 des Beweis von Satz 6.6 kann man zeigen, dass die linke Seite

$$\int_{B_1}(\varphi u)(y,t-\varepsilon)\gamma(x-y,\varepsilon)dy \to \varphi(x,t)u(x,t) = u(x,t)$$

mit $\varepsilon\to 0$. Also haben wir

$$u(x,t) = \int_{B_1\times(-1,t)} u(\partial_s+\Delta_y)(\varphi\tilde\gamma)dyds.$$

Da $\tilde\gamma$ (7.5) genügt, gilt füt $(x,t)\in Q_{1/4}$

$$u(x,t) = \int_{B_1\times(-1,t)} u((\varphi_s+\Delta_y\varphi)\tilde\gamma + 2\nabla_y\varphi\cdot\nabla\tilde\gamma)dyds.$$

Jede Term in des Integrals enthielt die Ableitung von φ, die in $Q_{1/2}$ verschwindet, da $\varphi\equiv 1$ in $Q_{1/2}$. Es folgt

$$u(x,t) = \int_D u((\varphi_s+\Delta_y\varphi)\tilde\gamma + 2\nabla_y\varphi\cdot\nabla\tilde\gamma)dyds,$$

wobei

$$D = B_{\frac34}\times(-(3/4)^2,t]\backslash B_{\frac12}\times(-(1/2)^2,t].$$

Die Abstand zwischen jeden Punkt $(y,s)\in D$ und $(x,t)\in Q_{1/4}$ hat eine positive untere Schranke. Diese impliziert, dass der Integrand in D keine Singularität besitzt.

Für die Ableitung nach x gilt

$$\nabla_x u(x,t) = \int_D u((\varphi_s+\Delta_y\varphi)\nabla_x\tilde\gamma + 2\nabla_y\varphi\cdot\nabla_x\nabla_y\tilde\gamma)dyds.$$

Sei $C>0$ eine Konstante mit

$$2|\nabla\varphi| + |\varphi_s| + |\nabla^2\varphi| \le C$$

Es folgt

$$|\nabla u(x,t)| \leq C \int_D |u|(|\nabla_x \tilde{\gamma}| + |\nabla_x \nabla_y \tilde{\gamma}|) dyds.$$

Eine direkte Berechnung liefert

$$\begin{aligned} |\nabla_x \tilde{\gamma}| &\leq C \frac{|x-y|}{(t-s)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}, \\ |\nabla_x \nabla_y \tilde{\gamma}| &\leq C \frac{|x-y|^2 + (t-s)}{(t-s)^{\frac{n}{2}+2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass für alle $(x,t) \in Q_{1/4}$ und alle $(y,s) \in D$,

$$|x-y| \leq 1, \quad 0 < t-s \leq 1$$

gilt. Also haben wir für alle $(x,t) \in Q_{1/4}$

$$|\nabla u(x,t)| \leq C \sum_{i=1}^{2} \int_D |u(y,s)| \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}+i}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} dyds.$$

Wir behaupten, dass für alle $(x,t) \in Q_{1/4}$

$$\frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}+i}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq C, \qquad \text{für } i = 1,2.$$

gilt. Es ist klar, dass der Satz folgt aus der Behauptung. Nun zeigen wir die Behauptung. Wir zerlegen D in zweier Teile:

$$\begin{aligned} D_1 &= B_{1/2} \times (-(3/4)^2, -(1/2)^2), \\ D_2 &= B_{3/4} \backslash B_{1/2} \times (-(3/4)^2, t). \end{aligned}$$

Wir betrachten erste D_1. Für alle $(x,t) \in Q_{1/4}$ und $(y,s) \in D_1$ haben wir

$$t - s \geq \frac{1}{8}$$

und dann

$$\frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}+i}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq 8^{\frac{n}{2}+i}, \qquad \text{für } i = 1,2.$$

Dann betrachten wir D_2. Für alle $(x,t) \in Q_{1/4}$ und $(y,s) \in D_2$ haben wir

$$|y-x| \geq \frac{1}{4}, \qquad 0 < t-s < \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Damit haben wir mit $\tau = (t-s)^{-1}$

$$\frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}+i}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} \leq \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}+i}} e^{-\frac{1}{4^3(t-s)}} = \tau^{\frac{n}{2}+i} e^{-\frac{\tau}{4^3}} \leq C, \qquad \text{für } i = 1,2,$$

für alle $\tau > (4/3)^3$. Die Behauptung wird bewiesen. □

Satz 7.16. *Sei u eine $C_b^{2,1}$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $Q_R(x_0,t_0)$. Dann gilt für alle Multiindeces $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ und $l \in \mathbb{N}_0$ die folgende Abschäztungen*

$$|\partial_t^l D_x^\alpha u(x_0,t_0)| \leq \frac{C^{k+2l}}{R^{k+2l}} n^k e^{k+2l-1} (k+2l)! \sup_{Q_R(x_0,t_0)} |u|,$$

wobei C eine nur von n abhängte positive Konstante ist.

Beweis. Für die Ableitungen nach x können wir beweisen wie in dem Satz 2.19, und erhalten für alle Multiindeces $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$

$$|D_x^\alpha u(x_0, t_0)| \leq \frac{C^k}{R^k} n^k e^{k-1} k! \sup_{Q_R(x_0,t_0)} |u|.$$

Für die Ableitungen nach t benutzen wir die Wärmeleitungsgleichungund erhalten

$$\partial_t^l u = \Delta^l u.$$

Wir bemerken, dass es in $\Delta^l u$ n^k male x-Ableitungen gibt. Es folgt

$$|\partial_t^l D_x^\alpha u(x_0, t_0)| \leq n^k \max_{|\beta|=k+2l} |D_x^\beta u(x_0, t_0)|.$$

Die Aussage folgt leicht. □

7.3. **Das Maximumprinzip.** Zunächst wiederholen wir das schwache Maximumprinzip der Wärmeleitungsgleichung. Seien Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

Satz 7.17 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Für $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ gelte*

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Dann gilt:

$$\sup_{\overline{\Omega_T}} u = \sup_{\partial_p \Omega_T} u.$$

Nun wollen wir das Maximumprinzip für die folgende parabolische PDE untersuchen.

$$Pu = u_t - Lu,$$

wobei

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u + cu \quad \text{in } \Omega,$$

ein elliptischer Operator ist. Einfachheitshalber betrachten wir nur

$$Pu = u_t - Lu = u_t - (\Delta u + cu) = u_t - \Delta u - cu.$$

Satz 7.18 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei $c \leq 0$ eine stetige Funktion in Ω_T. Für $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ gelte*

$$u_t - \Delta u - cu \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Dann gilt:

$$\sup_{\overline{\Omega}_T} u \leq \sup_{\partial_p \Omega_T} u^+.$$

Beweis. i) Zunächst nehmen wir an, dass

$$u_t - \Delta u - cu < 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Wäre die Aussage falsch, existierte ein $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_T \backslash \partial_p \Omega$ mit $0 \leq u(x_0) = \sup_{\overline{\Omega}_T} u$. Als Notwendigkeit solcher inneren Maximum Punkt, gilt

$$\nabla_x(x_0, t_0) = 0, \quad \nabla_x^2(x_0, t_0) \leq 0, \text{ und } u_t(x_0, t_0) \geq 0.$$

Daraus folgt

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) - cu(x_0, t_0) \geq 0,$$

da $c \leq 0$ und $u(x_0, t_0) \geq 0$. Ein Widerspruch.

ii) Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Betrachte

$$u^\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t.$$

Es ist leicht to nachprüfen:

$$u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon - cu^e = u_t - \Delta u - cu - \varepsilon + c\varepsilon \leq -\varepsilon + c\varepsilon < 0,$$

da $c \leq 0$. Nach i) haben wir

$$\sup_{\overline{\Omega}_T} u^\varepsilon = \sup_{\partial_p \Omega_T} (u^\varepsilon)^+.$$

Es folgt

$$\sup_{\overline{\Omega}_T} u = \sup_{\partial_p \Omega_T} u^+.$$

□

Satz 7.19 (Schwaches Maximumprinzip)**.** *Sei $c \leq c_0$ eine stetige Funktion in Ω_T für ein nicht-negative Konstante c_0 Für $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ gelte*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - cu &\leq 0 \quad \text{in } \Omega_T \\ u &\leq 0 \quad \text{auf } \partial_p \Omega_T. \end{aligned}$$

Dann gilt $u \leq 0$ in Ω_T.

Beweis. Setze $v(x,t) = e^{-c_0 t}u(x,t)$. Dann $u = e^{c_0 t}v$ und

$$0 \geq u_t - \Delta u - cu = e^{-c_0 t}(v_t - \Delta v - cv + c_0 v) = e^{-c_0 t}(v_t - \Delta v - (c - c_0)v).$$

Es folgt

$$v_t - \Delta v - \tilde{c}v \leq 0$$

mit $\tilde{c} = c - c_0 \leq 0$. Nach Satz 7.18 gilt

$$\sup_{\overline{\Omega}_T} v = \sup_{\partial_p \Omega_T} v^+ = \sup_{\partial_p \Omega_T} e^{-c_0 t}u^+ = 0..$$

Also $u \leq 0$ in Ω_T. $\square$

Als Folgerung haben wir ein Vergleichsprinzip

Korollar 7.20 (Vergleichsprinzip)**.** *Sei $c \leq c_0$ eine stetige Funktion in Ω_T für ein nicht-negative Konstante c_0. Seien $u, v \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ mit*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - cu \quad &\leq \quad v_t - \Delta v - cv \qquad \textit{in } \Omega_T \\ u \quad &\leq \quad v \qquad\qquad\qquad \textit{auf } \partial_p \Omega_T. \end{aligned}$$

Dann gilt $u \leq v$ in Ω_T.

Beweis. Berachte $w = u - v$ und verwende Satz 7.18. $\square$

Vergleichen wir nun die Maximumprinzipen zwischen die elliptische Gleichungen und die parabolische Gleichungen Betrachte

$$-\Delta u - cu = 0 \quad \text{in } \Omega$$

und

$$Pu = u_t - \Delta u - cu \quad \leq \quad 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Sei $c \leq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} -Lu \quad &\leq 0 \quad \text{in } \Omega \quad\ \ \Rightarrow \quad u \text{ nimmt ihres nicht-negetive Maximum in } \partial\Omega \text{ an,} \\ Pu \quad &\leq 0 \quad \text{in } \partial_p\Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ nimmt ihres nicht-negetive Maximum in } \partial_p\Omega \text{ an} \end{aligned}$$

Sei $c = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} -Lu \quad &\leq 0 \quad \text{in } \Omega \quad\ \ \Rightarrow \quad u \text{ nimmt ihres Maximum in } \partial\Omega \text{ an,} \\ Pu \quad &\leq 0 \quad \text{in } \partial_p\Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ nimmt ihres Maximum in } \partial_p\Omega \text{ an} \end{aligned}$$

Für das Vergleichsprinzip, gilt: Sei $c \leq 0$

$$\begin{aligned} -Lu \quad &\leq -Lv \quad \text{in } \Omega, \quad u \leq v \quad \text{auf } \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad u \leq v \text{ in } \Omega, \\ Pu \quad &\leq Pv \quad \text{in } \Omega, \quad u \leq v \quad \text{auf } \partial_p\Omega \quad \Rightarrow \quad u \leq v \text{ in } \Omega_T. \end{aligned}$$

In dem Vergleichsprinzip braucht man für die parabolische Gleichung nur die Bedingung $c \leq c_0$ für eine positive Konstante c_0.

Nun betrachten wir das starke Maximumprinzip.

Lemma 7.21. *Seien $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $R, T > 0$. Setze*

$$Q = B_R(x_0) \times (t_0 - T, t_0].$$

Ist c eine stetige Funktion in $\overline{Q}$. Gelte $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$

$$u_t - \Delta u - cu \geq 0 \quad \textit{in } Q.$$

Falls $u \geq 0$ in Q und

$$u(x_0, t_0 - T) > 0,$$

dann gilt

$$u(x,t) > 0, \quad \forall (x,t) \in Q.$$

Lemma 7.21 besagt: Für eine nicht-negative Oberlösung u gilt: falls u irgendwann positiv ist, ist u immer positive nachher.

Beweis. Sei $t_* \in (t_0 - T, t_0]$ beliebig. Wir zeigen dass

$$u(x, t_*) > 0 \quad \forall x \in B_R(x_0).$$

OBdA nehmen wir an, dass $x_0 = 0$ und $t_* = 0$. Wähle $\alpha < 0$ derart, so dass $t_0 - T = -\alpha R^2$ und setze

$$D := B_R \times (-\alpha R^2, 0].$$

Unsere Voraussetzungen sind $u \geq 0$ und $u(0, -\alpha R^2) > 0$. Da u stetig ist, können wir annehmen, dass

$$u(x, -\alpha R^2) \geq m > 0 \quad \forall x \in \overline{B}_{\varepsilon R},$$

für $m > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$. Wir nehmen m das positive Minimum von $u(\cdot, -\alpha R^2)$ in $\overline{B}_{\varepsilon R}$. Betrachte

$$D_0 := \left\{(x, t) \in B_R \times (-\alpha R^2, 0] \big| |x|^2 - \frac{1 - \varepsilon^2}{\alpha} t < R^2\right\} \subset D.$$

Es ist klar dass

$$D_0 \cap \{t = 0\} = B_R, \quad D_0 \cap \{t = -\alpha R^2\} = B_{\varepsilon R}.$$

Setze

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= \frac{1 - \varepsilon^2}{\alpha} t + R^2, \\
w_2(x, t) &= w_1(t) - |x|^2 = \frac{1 - \varepsilon^2}{\alpha} t + R^2 - |x|^2,
\end{aligned}$$

und für eine β, die wir spät fixieren werden,

$$w = w_1^{-\beta} w_2^2.$$

Wir betrachten w_1, w_2 und w in den Gebiet D_0. Wir bemerken, dass $\varepsilon^2 R^2 \leq w_1 \leq R^2$ und $w_2 \geq 0$ in D_0. Eine direkte Berechnung liefert

$$\begin{aligned}
w_t &= -\beta w_1^{-\beta-1} \partial_t w_1 w_2^2 + 2 w_1^{-\beta} w_2 \partial_t w_2 \\
&= w_1^{-\beta-1} \left(-\frac{\beta(1 - \varepsilon^2)}{\alpha} w_2^2 + \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{\alpha} w_1 w_2 \right),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta w &= w_1^{-\beta} (2 w_2 \Delta w_2 + 2 |\nabla w_2|^2) \\
&= w_1^{-\beta} (-4 n w_2 + 8 |x|^2) \\
&= w_1^{-\beta} (8 w_1 - (4n + 8) w_2) \quad (\text{da } |x|^2 = w_1 - w_2) \\
&= w_1^{-\beta-1} (8 w_1^2 - (4n + 8) w_1 w_2).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
w_t - \Delta w - c w &= w_1^{-\beta-1} \left\{ \left(-\frac{\beta(1 - \varepsilon^2)}{\alpha} - c w_1 \right) w_2^2 \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{2(1 - \varepsilon^2)}{\alpha} + 4n + 8 \right) w_1 w_2 - 8 w_1^2 \right\}. \\
&\leq -w_1^{-\beta-1} \underbrace{\left\{ \left(\frac{\beta(1 - \varepsilon^2)}{\alpha} - |c| R^2 \right) w_2^2 - \left(\frac{2(1 - \varepsilon^2)}{\alpha} + 4n + 8 \right) w_1 w_2 + 8 w_1^2 \right\}}_{\geq 0, \text{ für } \beta \text{ groß}}.
\end{aligned}$$

Also wir haben

$$w_t - \Delta w - cw \leq 0 \quad \text{in } D_0.$$

Nun betrachten wir den parabolischen Rand $\partial_p D_0$ von D_0:

$$\partial_p D_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

mit

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \{(x,t) : |x| < \varepsilon R,\, t = -\alpha R^2\}, \\
\Sigma_2 &= \{(x,t) : |x|^2 - \frac{1-\varepsilon^2}{\alpha} t = R^2,\, -\alpha R^2 \leq t \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Für $(x,t) \in \Sigma_2$ gilt $w = 0$ und für $(x,t) \in \Sigma_1$ gilt

$$w(x,t) = w(x, -\alpha R) = (\varepsilon^2 R^2)^{-\beta}(\varepsilon^2 R^2 - |x|^2)^2 \leq (\varepsilon^2 R^2)^{-2\beta+4}.$$

Setze

$$v = m(\varepsilon R)^{2\beta-4} w \quad \text{in } , D_0$$

wobei m das positive Minimum von u in $\overline{\Sigma}_1$ ist. Nun ist es klar

$$\begin{aligned}
v_t - \Delta u - cv &\leq 0 \quad \text{in } D_0, \\
v &\leq u \quad \text{auf } \partial_p D_0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
v_t - \Delta u - cv &\leq u_t - \Delta u - cu \quad \text{in } D_0, \\
v &\leq u \quad \text{auf } \partial_p D_0.
\end{aligned}$$

Nach dem Vergleichsprizip, Satz 7.20, und Bemerkung 7.22 unten gilt

$$v \leq u \quad \text{in } D_0.$$

Es folgt am $t = 0$

$$u(x,0) \geq v(x,0) = m(\varepsilon R)^{2\beta-4} w(x,0) = m\varepsilon^{2\beta-4}\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)^2$$

für alle $x \in B_R$. □

Bemerkung 7.22. In den Beweis benutzen den parabolischen Rand für einen Gebiet D in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Für solchen Gebiet ist der parabolischen Rand die Menge aller Punkte $(x,t) \in \partial D$ mit der Eigenschaft

$$B_r(x_0) \times (t_0 - r^2, t_0] \cap ((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \backslash D) \neq \emptyset, \quad \forall r > 0.$$

Falls $D = \Omega \times (0,T]$ ist die Definition gleich als die, die in Seit 42 gegeben ist. Das Maximumprinzip gilt für solche Gebiete D.

Nun haben wir das starke Maximumprinzip. Sie vergleichen ihn mit Satz 7.7.

Satz 7.23 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $T > 0$. Sei c eine stetige Funktion in $\Omega \times (0,T]$ mit $c \leq 0$ und gelte $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T])$*

$$u_t - \Delta u - cu \leq 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T].$$

Existierte $(x_*, t_*) \in \Omega \times (0,T]$ mit

$$u(x_*, t_*) = \sup_{\Omega \times T]} u \geq 0,$$

Dann gilt

$$u(x,t) = u(x_*, t_*), \quad \forall (x,t) \in \Omega_{t_*}.$$

Beweis. Setze

$$M = \sup_{\Omega_T} u \geq 0$$

und $v = M - u$. Dann gilt $v(x_*, t_*) = 0$, $v \geq 0$ in Ω_T und

$$v_t - \Delta v - cv \geq 0 \quad \text{in } \Omega_T.$$

(Hier benutzen wir die Bedingung $c \leq 0$ in Ω_T

$$v_t - \Delta v - cv = -(u_t - \Delta u - cu) - cM \geq -cM \geq 0.$$

) Wir zeigen, dass $v(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \Omega_{t_*}$.

1. Für $(x_0, t_0) \in Q_R(x_*, t_*) = B_R(x_*) \times (t_* - R, t_*] \subset \Omega \times (0, T]$, zeigen wir $u(x_0, t_0) = 0$. Wäre $u(x_0, t_0) > 0$. Wir verwenden Lemma 7.21 und erhalten ein Widerspruch.

2. Für beliebigen Punkt $(x,t) \in \Omega_{t_*}$ finden wir eine Folge $(x_0, t_0) = (x,t), (x_1, t_1), \cdots, (x_m, t_m) = (x_*, t_*)$ mit folgender Eigenschaften für alle $i = 1, 2, \cdot$ (i) $t_{i-1} < t_i$, (ii) $Q_{R_i} \subset \Omega \times (0, T]$, und (iii)

$$(x_{i-1}, t_{i-1}) \in Q_{R_i}(x_i, t_i).$$

Nach (i) folgt $0 = u(x_{m-1}, t_{m-1}) = u(x_{m-2}, t_{m-2}) = \cdots = u(x_1, t_1) = u(x_0, t_0) = u(x, t)$. □

7.4. **Die Abschätzungen.** Als gute Anwendungen des Maximumprinzips zeigen wir folgende Abschätzungen.

Sei Ω ein beschränkte Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $T > 0$.

Satz 7.24. *Sei c stetig in Ω_T mit $c \le c_0$ für eine nicht negative Konstante c_0. Sei $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - cu &= f \quad \text{in } \Omega_T \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \quad \text{auf } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \end{aligned}$$

für $f \in C(\overline{\Omega}_T)$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in C(\partial\Omega \times [0,T])$. Dann gilt

$$\sup_{\Omega_T} |u| \le e^{c_0 T} \left(\max\{\sup_{\Omega} |u_0|, \sup_{\partial\Omega\times(0,T)} |\varphi|\} + T \sup_{\Omega_T} |f| \right).$$

Beweis. Setze Setze

$$B = \max\left\{ \sup_{\Omega} |u_0|, \sup_{\partial\Omega\times(0,T)} |\varphi| \right\} \quad \text{und} \quad F = \sup_{\Omega_T} |f|$$

und $Pu = u_t - \Delta u - cu$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(\pm u) &\le F \quad \text{in } \Omega_T, \\ \pm u &\le B \quad \text{auf } \partial_p\Omega_T. \end{aligned}$$

Setze

$$v(x,t) = e^{c_0 t}(B + Ft).$$

Da $c_0 - c \ge 0$ und $e^{c_0 t} \ge 1$ in Ω_T haben wir

$$Pv = (c_0 - c)e^{c_0 t}(B + Ft) + e^{c_0 t} F \ge F \quad \text{in } \Omega_T$$

und

$$v \ge B \quad \text{auf } \partial_p\Omega_T.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} P(\pm u) &\le Pv \quad \text{in } \Omega_T, \\ \pm u &\le v \quad \text{auf } \partial_p\Omega_T. \end{aligned}$$

Nach dem Maximumprinzip gilt

$$\pm u \le v \quad \text{in } \Omega_T$$

Es folgt

$$|u(x,t)| \le e^{c_0 t}(B + Ft) \le e^{c_0 T}(B + FT) \quad \forall (x,t) \in \Omega_T.$$

□

Nun betrachten wir $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Satz 7.25. *Sei c stetig in Ω_T mit $c \le c_0$ für eine nicht negative Konstante c_0. Sei $u \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^n_T) \cap C(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u - cu &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n_T \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

für $f \in C_b(\overline{\mathbb{R}}^n_T)$ und $u_0 \in C_b(\overline{\mathbb{R}}^n)$. Dann gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n_T} |u| \le e^{c_0 T} \left(\sup_{\mathbb{R}^n_T} |u_0| + T \sup_{\mathbb{R}^n_T} |f| \right).$$

Beweis. Wie oben setze $Pu = u_t - \Delta u - cu$ und

$$B = \sup_{\mathbb{R}^n} |u_0| \quad \text{und} \quad F = \sup_{\mathbb{R}^n_T} |f|.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} P(\pm u) &\leq F \quad \text{in } \mathbb{R}^n_T, \\ \pm u &\leq B \quad \text{auf } \partial_p \mathbb{R}^n_T. \end{aligned}$$

Da u beschränkt ist, nehmen wir an dass $|u| \leq M$ in $\mathbb{R}^n_T$ mit $M > 0$. Für ein $R > 0$ betrachte

$$w(x,t) = e^{c_0 t}(B + Ft) + v_R(x,t) \qquad \text{in } B_R \times (0,T],$$

wobei v_R eine Funktion ist, die wir spät wählen werden. Da $c_0 - c \geq 0$ und $e^{c_0 t} \geq 1$ in Ω_T, haben wir

$$Pw = (c_0 - c)e^{c_0 t}(B + Ft) + e^{c_0 t} + Pv_R \geq F + P(v_R) \quad \text{in } B_R \times (0,T].$$

Am parabolischen Rand gilt gilt

$$w(\cdot, 0) = B + v_R(\cdot, 0) \quad \text{in } B_R,$$

und

$$w \geq v_R \qquad \text{auf } \partial B_R \times (0,T).$$

Wir wählen v_R derart, so dass

$$\begin{aligned} P(v_R) &\geq 0 \qquad \text{in } B_R \times (0,T], \\ v_R(\cdot, 0) &\geq 0 \qquad \text{in } B_R \\ v_R &\geq \pm u \quad \text{auf } \partial B_R \times (0,T). \end{aligned}$$

Nun konstruieren wir v_R

$$v_R(x,t) = \frac{M}{R^2} e^{c_0 t}(2nt + |x|^2).$$

Es ist klar dass $v_R \geq 0$ in $B_R \times \{0\}$ und $v_R \geq M \geq |u|$ in $\partial B_R \times (0,T]$. Man kann nachprüfen, dass

$$P(v_R) = \frac{M}{R^2} e^{c_0 t}(c_0 - c)(2nt + |x|^2) \geq 0 \quad \text{in } B_R \times (0,T].$$

Mit solcher Funktion v_R haben wir

$$\begin{aligned} P(\pm u) &\leq Pw \qquad \text{in } B_R \times (0,T], \\ \pm u &\leq w \qquad \text{auf } \partial_p(B_R \times (0,T]). \end{aligned}$$

Nach den Maximumprinzip gilt $\pm u \leq w$ in $B_R \times (0,T]$. Also für alle $(x,t) \in B_R \times (0,T]$,

$$|u(x,t)| \leq e^{c_0 t}(B + Ft) + \frac{M}{R^2} e^{c_0 t}(2nt + |x|^2).$$

Nun fixieren wir beliebigen Punkt $(x,t) \in \mathbb{R}^n_T$. Wähle R mit $R > |x|$ und lasse $R \to \infty$. Wir erhalten

$$|u(x,t)| \leq e^{c_0 t}(B + Ft) \leq e^{c_0 T}(B + FT).$$

□

Nun geben wir einen neuen Beweis für die innere Gradienten Abschätzung. Sehen Satz 7.15.

Satz 7.26. *Sei $u \in C^{2,1}(Q_1) \cap C\overline{Q}_1)$ eine Lösung von*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{in } Q_1.$$

Dann gilt

$$\sup_{Q_{1/2}} |\nabla_x u| \leq C \sup_{\partial_p Q_1} |u|,$$

wobei C eine positive Konstante ist, die nur von n abhängt.

Beweis. Erste bemerken wir dass u nach Satz 7.14 glatt ist. Eine direkt Berechnung liefert
$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)|\nabla_x u|^2 &= -2|\nabla^2 u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla(u_t - \Delta u)\\ &= -2|\nabla^2 u|^2,\end{aligned}$$
wobei $|\nabla^2 u|^2 = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2$ ist. (vgl. Aufgabe 7.1. b)). Wähle eine glatte Abschneide-Funktion $\varphi = \eta^2$ mit $\operatorname{supp}\eta \in Q_{3/4}$, $\eta \geq 0$ und $\eta = 1$ in $Q_{1/2}$. Eine direkt Berechnung liefert
$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)(\varphi|\nabla_x u|^2) &= (\varphi_t - \Delta\varphi)|\nabla u|^2 - 4\nabla^2 u(\nabla u, \nabla\varphi) - 2\varphi|\nabla^2 u|^2\\ &= (2\eta\eta_t - 2\eta\Delta\eta - 2|\nabla\eta|^2)|\nabla u|^2 - 8\eta\nabla^2 u(\nabla u, \nabla\eta) - 2\eta|\nabla^2 u|^2,\end{aligned}$$
wobei $\nabla^2 u(a,b) = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} a_i b_j$ für 2 Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$. Nach CSU haben wir
$$8|\eta\nabla^2 u(\nabla u, \nabla\eta)| \leq 8|\nabla\eta|^2|\nabla u|^2 + 2\eta|\nabla^2 u|^2,$$
und bzw.
$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)(\eta^2|\nabla_x u|^2) &= (2\eta\eta_t - 2\eta\Delta\eta + 6|\nabla\eta|^2)|\nabla u|^2\\ &\leq C|\nabla u|^2,\end{aligned}$$
wobei $C > 0$ eine Konstante, die nur von η und n abhängt. Wir benutzen auch die Gleichung für u^2
$$(\partial_t - \Delta)(u^2) = -2|\nabla u|^2 + 2u(u_t - \Delta u) = -2|\nabla u|^2.$$
Es folgt
$$(\partial_t - \Delta)\left(\eta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}Cu^2\right) \leq 0.$$
Nach Maximumprinzip gilt
$$\sup_{Q_1}\left(\eta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}Cu^2\right) \leq \sup_{\partial_p Q_1}\left(\eta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}Cu^2\right).$$
Es folgt für $(x,t) \in Q_{1/2}$
$$|u(x,t)|^2 \leq \sup_{Q_1}\left(\eta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}Cu^2\right) \leq \sup_{\partial_p Q_1}\left(\eta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}Cu^2\right) \leq \frac{1}{2}C \sup_{\partial_p Q_1} u^2.$$
□

Die letzte Abschätzung ist die Harnack Ungleichung.

Satz 7.27 (Harnack)**.** *Sei eine positive Funktion $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_T)$ eine Lösung von*
$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n_T.$$
Dann für alle $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \mathbb{R}^n_T$ mit $t_2 > t_1 > 0$ gilt
$$\frac{u(x_1,t_1)}{u(x_2,t_2)} \leq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{|x_1 - x_2|^2}{4(t_2 - t_1)}\right).$$

Sie vergleichen den Satz mit der elliptischen Harnack-Ungleichung. Wir erste prüfen den Satz an der fundamentallösung
$$\gamma(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}},$$
die $\gamma_t - \Delta\gamma = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ erfüllt. Für alle $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \mathbb{R}^n_T$ mit $t_2 > t_1 > 0$ gilt
$$\frac{\gamma(x_1,t_1)}{\gamma(x_2,t_2)} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{|x_2-\xi|^2}{4t_2} - \frac{|x_1-\xi|^2}{4t_1}}.$$
Wir benutzen die folgende Ungleichung
$$\frac{(p+q)^2}{a+b} \leq \frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b},$$

für alle $a, b > 0$ und $p, q \in \mathbb{R}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\frac{p}{a} = \frac{q}{b}$. Damit haben wir für alle $t_2 > t_1 > 0$

$$\frac{|x_2 - \xi|^2}{t_2} \leq \frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1} + \frac{|x_1 - \xi|^2}{t_1},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn

$$\xi = \frac{t_2 x_1 - t_1 x_2}{t_2 - t_1}.$$

Also haben wir

$$\frac{\gamma(x_1, t_1)}{\gamma(x_2, t_2)} \leq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{|x_2 - x_1|^2}{4(t_2 - t_1)}}.$$

Für den Beweis von Satz 7.27 brauchen wir ein wichtiges Lemma, die so-genannte Differential-Harnack-Ungleichung

Lemma 7.28. *Sei $0 < u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n_T)$ eine Lösung von*

$$u_t = \Delta u \quad \mathbb{R}^n_T.$$

Dann $v = \log u$ genügt die Differential-Harnack-Ungleichung

$$v_t + \frac{n}{2t} \geq |\nabla v|^2 \qquad \textit{in } \mathbb{R}^n_T.$$

Der Beweis von Lemma 7.28 ist schwer. Für den Beweis bitte sehen Sie Qing Han's Buch, s. 193.

Beweis von Satz 7.27. Setze $v = \log u$ wie in Lemma 7.28 und nehme eine beliebige Kurve $x(t) : [t_1, t_2] \in \mathbb{R}^n$ mit $x(t_i) = x_i$ für $i = 1, 2$. Nach Lemma 7.28 haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(x(t), t) &= v_t + \nabla v \cdot \frac{dx}{dt} \geq |\nabla v|^2 + \nabla v \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{n}{2t} \\ &= \left|\nabla v + \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}\right|^2 - \frac{1}{4}\left|\frac{dx}{dt}\right|^2 - \frac{n}{2t} \\ &\geq -\frac{1}{4}\left|\frac{dx}{dt}\right|^2 - \frac{n}{2t} \end{aligned}$$

Integriere und erhalte

$$v(x_1, t_1) \leq v(x_2, t_2) + \frac{n}{2} \log \frac{t_2}{t_1} + \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt.$$

Finde eine Kurve mit minimaler Wert von $\int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt$. Es ist die Kurve mit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

Die Lösungen sind

$$x(t) = at + b,$$

für $a, b \in \mathbb{R}^n$. Da $x_i = a_i t + b$ für $i = 1, 2$, haben wir $a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, b = \frac{t_2 x_1 - t_1 x_2}{t_2 - t_1}$. Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt = \frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1}.$$

Damit haben wir

$$v(x_1, t_1) \leq v(x_2, t_2) + \frac{n}{2} \log \frac{t_2}{t_1} + \frac{1}{4} \frac{|x_2 - x_1|^2}{t_2 - t_1},$$

bzw.

$$\frac{u(x_1, t_1)}{u(x_2, t_2)} \leq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{|x_1 - x_2|^2}{4(t_2 - t_1)}\right).$$

□

8. Die einfachste partielle Differentialgleichung erster Ordnung

Trotz der Einfachheit des folgenden Problems und seiner Lösung wird dieses wichtige Einsichten in hyperbolische Gleichungen und die Ausbreitungsmechanismen von anfänglichen Störungen liefern.

8.1. **Das Cauchyproblem für die lineare homogene Transportgleichung.** Gegeben sei ein konstanter Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, eine geeignete Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als Anfangsdatum. Gesucht ist $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ als Lösung des folgenden Cauchy-Problems:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + \langle b, \nabla u(x,t)\rangle &= 0, && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Ähnlich wir früh wollen wir hier so vorgehen: Angenommen, es existiert bereits eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Daraus sollen notwendige Bedingungen an φ und die Gestalt von u (Darstellungsformel) hergeleitet werden, wobei direkt ein Eindeutigkeitsresultat mit abfällt.

Betrachte die Linien

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto (x + sb, t + s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \tag{8.2}$$

und die Funktion $\mathbb{R} \ni s \mapsto u(x + sb, t + s) \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u(x + sb, t + s) &= u_t(x + sb, t + s) + \langle \nabla_x u(x + sb, t + s), b\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir notwendigerweise durch die Betrachtung von $s = 0$ und $s = -t$:

$$u(x,t) = u(x - tb, t - t) = u(x - tb, 0) = \varphi(x - tb).$$

Für $t = 0$ sieht man außerdem, dass $u \in C^1$ zwingend $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ erfordert.

Satz 8.1. *Sei $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (8.1) *für die Transportgleichung mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösungu $\in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Diese ist durch die Formel*

$$u(t,x) = \varphi(x - tb), \tag{8.3}$$

gegeben.

Beweis. Eindeutigkeit: Herleitung von φ.

Existenz: Definiere u gemäß (8.3) und verifiziere (8.1). □

Bemerkung 8.2. i) Im Gegensatz zu parabolischen Problemen haben wir hier auch eine Lösung *rückwärts in der Zeit* sowie *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.*

ii) Positive und negative Zeiten sind gleichberechtigt; die Funktion $(x,t)) \mapsto u(x, -t)$ löst (8.1) mit $-b$, und das Vorzeichen von b spielt bei Satz 8.1 keine Rolle. Bei nichtlinearen Erhaltungsgleichungen können in Abhängigkeit von der Gestalt des Anfangsdatums für $t > 0$ und $t < 0$ verschiedene Effekte auftreten; dadurch wird aber die grundsätzliche Gleichberechtigung von $t > 0$ und $t < 0$ nicht aufgehoben.

iii) Man beachte, dass Lösungsformel (8.3) auch für lediglich stetige Anfangsdaten Sinn macht. Man erhält dann $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, welches (8.1) in einem schwachen Sinne löst.

8.2. **Die inhomogene Transportgleichung.** Nun betrachten wir die inhomogene Transportgleichung. Gegeben seien konstantes $b \in \mathbb{R}^n$ und geeignete Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gesucht ist $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ als Lösung von

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) + \langle b, \nabla u(x,t)\rangle &= f(x,t), && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\
u(x,0) &= \varphi, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

Wir gehen wieder davon aus, dass bereits eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ vorliegt. Notwendigerweise ist dann $\varphi \in C^1$, $f \in C^0$. Wie oben betrachten wir wieder die Lösung auf der Geraden (8.2):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds} u(x+sb, t+s) &= u_t(x+sb,t+s) + \langle \nabla_x u(x+sb,t+s), b\rangle \\
&= f(x+sb, t+s).
\end{aligned}
$$

Immerhin reduziert sich so das Auflösen von (8.4) auf das direkte Integrieren einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - u(x-tb,0) &= \int_{-t}^{0} \frac{d}{ds} u(x+sb,t+s)ds \\
&= \int_{-t}^{0} f(x+sb,t+s)dt \\
&= \int_{0}^{t} f(x-(t-\tau)b,\tau)d\tau, \quad (\tau = s+t)
\end{aligned}
$$

notwendigerweise gilt also

$$
u(x,t) = \varphi(x-tb) + \int_0^t f(x-(t-\tau)b,\tau)d\tau,
$$

die Ähnlichkeit mit der Formel der Variation der Konstanten aus Satz 6.18 ist unübersehbar. Um im folgenden Satz Differenzierbarkeit von u erhalten zu können, müssen wir die Voraussetzungen an f noch verschärfen; wozu die Notwendigkeit außer im Fall $b = 0$ zunächst nicht unmittelbar auf der Hand liegt.

Satz 8.3. *Seien $b \in \mathbb{R}^n$,$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass die partiellen $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ existieren. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (8.4) *für die inhomogene Transportgleichung mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit b genau eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Für diese gilt*

$$
u(x,t) = \varphi(x-tb) + \int_0^t f(x-(t-\tau)b,\tau)d\tau,
\tag{8.5}
$$

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, aus (8.5).

Existenz: Man definiere u gemäß (8.5). Da die $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ existieren, ergibt die Anwendung der parameterabhängigen Riemann-Integrale auf relativ-kompakten (x,t)-Bereichen $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Außerdem ist unter Verwendung der Kettenregel

$$
\begin{aligned}
u_t - \langle b, \nabla u\rangle &= -\langle \nabla\varphi(\cdot - tb), b\rangle + f + \int_0^t \nabla_x f(x-(t-s)b), s) \cdot (-b)ds \\
&\quad + \langle b, \nabla\varphi(x-tb)\rangle + \langle b, \int_0^t \nabla_x f(x-(t-s)b,s)ds\rangle \\
&= f.
\end{aligned}
$$

Bemerkung 8.4. Die Lösung u von (8.4) liegt im Punkte (x,t) fest, wenn f auf der Geraden

$$
C_{(t,x)} = \{(s+t, x+sb) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}
$$

bzw. genauer auf deren Teil mit $0 \le -s \cdot \operatorname{sgn}(t) \le t \cdot \operatorname{sgn}(t)$ und φ auf dem Schnittpunkt dieser Geraden mit $\{s = 0\} = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ bekannt ist. Das steht im krassen Gegensatz zu Lösungen parabolischer Gleichungen, wo man alle Daten für $s \leq t, \xi \in \mathbb{R}^n$ benötigt. (Hier endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit; unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit bei parabolischen Gleichungen.)

Man nennt die Geraden $C_{(t,x)}$ *Charakteristiken*. Dieses Konzept wird sich auch in verallgemeinerter Form bei nichtlinearen Erhaltungsgleichungen 1.Ordnung als grundlegend erweisen: Es reduziert die partielle Differentialgleichung erster Ordnung auf eine Schar gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme. Man beachte auch: Eindeutigkeitsverhalten ist hier einfacher als bei parabolischen Gleichungen.

Beispiel 8.5. Zur Notwendigkeit der Differenzierbarkeitsbedingung an f in Satz 8.3. Wir betrachten dazu das Cauchyproblem:

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= |x-t| \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) &= 0, \qquad \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Angenommen, wir hätten eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ von (8.5), so wäre diese gemäß der Herleitung von Satz 8.3 gegeben durch die Formel (8.5):

$$u(x,t) = \int_0^t |s - (x-(t-s))| ds = \int_0^t |x-t| ds = t|x-t|.$$

Diese Funktion ist aber für $t \neq 0$, $t = x$ nicht differenzierbar. (Man beachte den Gegensatz zum regularisierenden Verhalten elliptischer Gleichungen.)

9. Die eindimensionale Wellengleichung

9.1. **Die eindimensionale Wellengleichung auf $\mathbb{R}$.** Gegeben seien geeignete Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ als Lösung des Cauchyproblems für die homogene Wellengleichung:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx} &= 0, && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi, && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \psi, && \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Wir gehen wieder davon aus, dass eine C^2-Lösung u von (9.1) existiert und leiten notwendige Bedingungen und Darstellungsformeln her. Zunächst ist offenbar notwendig:

$$\varphi \in C^2, \quad \psi \in C^1.$$

Man könnte nun durch die Variationstransformation

$$(x,t) \mapsto (x-t, x+t)$$

herleiten, dass $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ existieren mit

$$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t) \tag{9.2}$$

und F, G an die Anfangsdaten φ, ψ anpassen. (Übung.) Aus (9.2) kann man leicht das folgende Lemma zeigen.

Lemma 9.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $u \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Sei $ABCD$ ein Parallelogramm in Ω mit

$$A = (x,t), \quad B = (x+h_1, t+h_1), \quad C = (x-h_2, t+h_2), \quad D = (x+h_1-h_2, t+h_1+h_2).$$

Dann gilt

$$u(A) + u(D) = u(B) + u(C). \tag{9.3}$$

Parallelogramm $ABCD$ ist ein Parallelogramm mit Seitenlinien, die entweder parallel zu $\{x = t\}$ oder zu $\{x = -t\}$. Wir bemerken, dass die Umkehrung gilt: Falls für jedes solches Parallelogramm $ABCD$ in Ω gilt (9.3), dass erfüllt u die Gleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$. (Übung)

Wir wollen hier anders verfahren und auf den Überlegungen aus dem vorhergehenden Kapital aufbauen. Grundlegend ist folgende Beobachtung (man vgl. die dritte binomische Formel):

$$0 = (\partial_t^2 - \partial_x^2)u = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u.$$

Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ als Lösung von (9.1) gegeben, wir setzen

$$v := (\partial_t + \partial_x)u \tag{9.4}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} v_t - v_x &= u_{tt} - u_{xx} = 0 && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ v(x,0) &= u_t(x,0) + u_x(x,0) = \psi(x) + \varphi'(x), && \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Dieses Anfangswertproblem lösen wir gemäß Satz 8.1 auf ($b = -1$):

$$v(x,t) = \psi(x+t) + \varphi'(x+t).$$

Definition (9.4) liefert damit nun folgendes Cauchyproblem für u:

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= v = \psi(x+t) + \varphi'(x+t) && \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi(x), && \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Dieses wiederum lösen wir mit Hilfe des Satzes 8.3 für die inhomogene Transportgleichung mit $f(x,t) = \psi(x+t) + \varphi'(x+t)$ auf: Notwendigerweise hat u die folgende Darstellung

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \varphi(x-t) + \int_0^t (\psi(s+x-(t-s)) + \varphi'(s+x-(t-s))ds \\
&= \varphi(x-t) + \int_0^t (\psi(x+2s-t)) + \varphi'(x+2s-t))ds \\
&= \varphi(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (\psi(\tau)) + \varphi'(\tau))d\tau \quad (\tau = x+2s-t) \\
&= \varphi(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau + \frac{1}{2}(\varphi(x+t) - \varphi(x-t)) \\
&= \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Satz 9.2 (D'Alembertsche Formel)**.** *Für alle $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ des Cauchyproblems* (9.1)*. Diese wird durch die d'Alembertsche Formel*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau. \tag{9.7}$$

gegeben.

Beweis.

□

Interpretation 9.3. . Um im Folgenden Verwirrung zu vermeiden, beschränken wir uns auf positive $t > 0$. Sei u die Lösung von (9.1) gemäß (9.7).

(a) Sei $t > 0, x \in \mathbb{R}$. Für die Berechnung von $u(x,t)$ ist erforderlich die Kenntnis von
   - φ in den Punkten $x-t, x+t$;
   - ψ im Intervall $[x-t, x+t]$

   Oder anders herum: Gegeben seien $\varphi|_{[a,b]}, \psi|_{[a,b]}$. Für welche $t > 0, x \in \mathbb{R}$ liegt dadurch u schon fest?

   Genau dann, wenn $x - t \geq a$ und $x + t \leq b$, d.h. auf

$$B_{[a,b]} := \left\{(x,t) : 0 \leq t \leq \frac{1}{2}(b-a), \quad a+t \leq x \leq b-t\right\},$$

   dem *Bestimmtheitsbereich* von $[a,b]$ oder Bestimmtheitskegel, (Für $t < 0$ muss man dieses Bild an der x-Achse spiegeln!)

(b) Eine etwas andere Fragestellung:

   Gegeben seien$\varphi|_{[a,b]}, \psi|_{[a,b]}$. Für welche $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ haben diese Daten Einfluss auf $u(x,t)$?
   - Zu φ: Genau dann, wenn $x - t \in [a,b]$ oder $x + t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x \in [a+t, b+t] \cup [a-t, b-t] \\
&\Leftrightarrow \quad (x,t) \in E^{\varphi}_{[a,b]}
\end{aligned}$$

     mit

$$E^{\varphi}_{[a,b]} := \{(x,t) : t \geq 0, x \in [t+a, t+b] \text{ oder } x \in [a-t, b-t]\}.$$

   - Zu ψ: Genau dann, wenn $[x-t, x+t] \cap [a,b] \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x + t \geq a \text{ und } x - t \leq b \\
&\Leftrightarrow \quad x \in [a-t, b+t] \\
&\Leftrightarrow \quad (x,t) \in E^{\psi}_{[a,b]}
\end{aligned}$$

mit

$$E^{\psi}_{[a,b]} := \{(x,t) : t \geq 0, x \in [a-t, b+t]\}.$$

Insgesamt nennt man

$$E_{[a,b]} := E^{\varphi}_{[a,b]} \cup E^{\psi}_{[a,b]}$$

den *Einflussbereich* des Intervalls $[a,b]$. Man beachte aber die unterschiedlichen Rollen von φ und ψ! Außerdem beachte man noch einmal den drastischen Unterschied zu parabolischen Problemen.

Bemerkung. Setzt man für $k \geq 2$, $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ voraus, so erhält man für die Lösung $u \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, aber i.A. keinen weiteren Regularitätsgewinn. Auch das ist ganz typisch für hyperbolische Problem.

9.2. **Die eindimensionale Wellengleichung auf dem Intervall** $[0,\infty)$**.** Gegeben seien geeignete Funktionen $\varphi,\psi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ und $\alpha:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, gesucht ist $u\in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$ als Lösung des Cauchyproblems für die homogene Wellengleichung:

$$\begin{array}{rcll} u_{tt}-u_{xx} &=& 0, & \text{für } (x,t)\in[0,\infty)\times\mathbb{R},\\ u(x,0) &=& \varphi, & \text{für } x\in[0,\infty),\\ u_t(x,0) &=& \psi, & \text{für } x\in[0,\infty),\\ u(0,t) &=& \alpha(t), & \text{für } t>0. \end{array} \tag{9.8}$$

Falls (9.8) eine C^2 Lösung u besitzt, dann müssen die folgende *Kompatibilitätsbedingungen* gelten:

$$\varphi(0)=\alpha(0),\quad \psi(0)=\alpha'(0),\quad \varphi''(0)=\alpha''(0), \tag{9.9}$$

sowie $\varphi\in C^2([0,\infty)),\psi\in C^1([0,\infty))$ und $\alpha\in C^2([0,\infty))$. Diese sind notwendige Bedingungen. Nun zeigen wir, dass diese auch hinreichende Bedingungen sind.

Zunächst betrachten wir den Fall $\alpha\equiv 0$. In diesem Fall haben die Kompatibilitätsbedingungen

$$\varphi(0)=0,\quad \psi(0)=0,\quad \varphi''(0)=0,$$

und können wir die Spiegelung-Methode benutzen. Wir setzen φ und ψ ungerade nach $\mathbb{R}$ fort. D.h., definiere

$$\tilde\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{für } x\ge 0\\ -\varphi(-x) & \text{für } x<0,\end{cases},\quad \tilde\psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{für } x\ge 0\\ -\psi(-x) & \text{für } x<0.\end{cases}$$

Mit der Kompatibilitätsbedingungen kann man leicht zeigen, dass $\tilde\varphi\in C^2(\mathbb{R})$ und $\tilde\psi\in C^1(\mathbb{R})$. Ist $\tilde u$ die C^2 Lösung in der D'Alembertschen Formeln mit $\tilde\varphi$ und $\tilde\psi$. Wir zeigen, dass $u:=\tilde u_{|[0,\infty)}$ eine Lösung von dem Problem (9.8) für $\alpha=0$ ist. D.h.

$$\begin{array}{rcll} \tilde u_{tt}-\tilde u_{xx} &=& 0, & \text{für } (x,t)\in \,\text{¸}R\times\mathbb{R},\\ \tilde u(x,0) &=& \tilde\varphi, & \text{für } x\in\mathbb{R},\\ \tilde u_t(x,0) &=& \tilde\psi, & \text{für } x\in\mathbb{R}. \end{array}$$

Wir sollen

$$\tilde u(0,t)=0,\quad \forall t>0$$

zeigen. Setze $v(x,t)=-\tilde u(-x,t)$. wir können leicht nachprüfen:

$$\begin{array}{rcll} v_{tt}-v_{xx} &=& 0, & \text{für } (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\\ v(x,0) &=& \tilde\varphi, & \text{für } x\in\mathbb{R},\\ v_t(x,0) &=& \tilde\psi, & \text{für } x\in\mathbb{R}. \end{array}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung impliziert, dass $\tilde u=v$. Es folgt $\tilde u(x,t)=v(x,t)=-\tilde u(-x,t)$, also $\tilde u(0,t)=0$, $\forall t>0$. Nach der d'Alembertschen Formeln haben wir

$$\tilde u(x,t)=\frac12(\tilde\varphi(x+t)+\tilde\varphi(x-t))+\frac12\int_{x-t}^{x+t}\tilde\psi(\tau)d\tau.$$

Die Einschränkung u von $\tilde u$ auf $[0,\infty)$ ist dann

$$u(x,t)=\frac12(\varphi(x+t)+\varphi(x-t))+\frac12\int_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)d\tau.$$

für $x\ge t\ge 0$. Für $t\ge x\ge 0$ ist u

$$u(x,t)=\frac12(\varphi(x+t)-\varphi(t-x))+\frac12\int_{t-x}^{x+t}\psi(\tau)d\tau, \tag{9.10}$$

da $\tilde\varphi$ und $\tilde\psi$ ungerade sind. Wir benutzen (9.10) im nächsten Kapitel.

Nun betrachten den Allgemeinem Fall ($\alpha\ne 0$) und benutzen andere Methode, die auf Lemma 9.1 basiert. Zunächst zerlege $[0,\infty)\times[0,\infty)$ durch die Linie $\{t=x\}$ in zwei Mengen:

$$\begin{array}{rcl} \Omega_1 &=& \{(x,t): x>t>0\},\\ \Omega_2 &=& \{(x,t): t>x>0\}. \end{array}$$

Sei u_1 ist die Lösung durch die Formel von d'Alembert mit Anfangsdata φ und ψ, d.h.,

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)d\tau.$$

Wir schränke u_1 auf Ω_1 und bezeichne auch mit u_1. Setze für $x > 0$

$$\gamma(x) := u_1(x,x) = \frac{1}{2}(\varphi(2x) + \varphi(0)) + \frac{1}{2}\int_0^{2x} \psi(\tau)d\tau.$$

Nun betrachten wir

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - u_{xx} & = & 0, & \text{in } \Omega_2,\\ u(x,x) & = & \gamma(x), & \text{für } x > 0,\\ u(0,t) & = & \alpha(t) & \text{für } t > 0 \end{array}$$

und bezeichnen die Lösung mit u_2, falls existiert. Wir benutzen Lemma 9.1 und betrachten für jeden $(t > x > 0)$ das Parallelgramm

$$A = (x,t), \quad B = (0, t-x), \quad C = (\frac{t+x}{2}, \frac{t+x}{2}), \quad D = (\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2}).$$

Nach (9.3) gilt

$$u_2(x,t) + u_2(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2}) = u_2(0, t-x) + u_2(\frac{t+x}{2}, \frac{t+x}{2}).$$

Es folgt

$$\begin{array}{rcl} u_2(x,t) & = & \alpha(t-x) + \gamma(\frac{t+x}{2}) - \gamma(\frac{t-x}{2})\\ & = & \alpha(t-x) + \frac{1}{2}(\varphi(x+t)) - \varphi(t-x)) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} \psi(\tau)d\tau. \end{array}$$

Man kann nachprüfen, dass u_2 die gesucht Lösung in Ω_2. Setze $u = u_1$ in Ω_1 und $u = u_2$ in Ω_2. Wir sollen zeigen, dass u die Lösung von (9.8) ist. Wir brauchen nur die Stetigkeit von $u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}$ entlang der Linien $\{t = x\}$ zu zeigen. Man kann leicht nachprüfen: entlang $\{t = x\}$

$$\begin{array}{rcl} u_1(x,t) - u_2(x,t) & = & \gamma(0) - \alpha(0) = \varphi(0) - \alpha(0),\\ \partial_x u_1(x,t) - \partial_x u_2(x,t) & = & -\psi(0) + \alpha'(0),\\ \partial_x^2 u_1(x,t) - \partial_x^2 u_2(x,t) & = & \varphi''(0) - \alpha''(0). \end{array}$$

Die Kompatibilitätsbedingungen (9.9) implizieren

$$u_1 = u_2, \quad \partial_x u_1 = \partial_x u_2, \quad \partial_x^2 u_1 = \partial_x^2 u_2.$$

Aus $u_1 = u_2$ und $\partial_x u_1 = \partial_x u_2$ auf $\{t = x\}$ folgt $\partial_t u_1 = \partial_t u_2$ auf $\{t = x\}$. Ähnlich gelten $\partial_{tx} u_1 = \partial_{tx} u_2$ und $\partial_{tt} u_1 = \partial_{tt} u_2$ auf $\{t = x\}$. Also haben wir $u \in C^2$ und auch

Satz 9.4. *Seied $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$ und $\alpha \in C^2([0,\infty))$. Weiter gelte die Kompatibilitätsbedingungen* (9.9). *Dann existiert eine Lösung $x \in C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$ von* (9.8).

9.3. **Die eindimensionale Wellengleichung auf dem Intervall** $[0, L]$**.** Mit den bereitgestellten Lösungsformeln gelingt es nun überraschend einfach, auch das Anfangsrandwertproblem fr̈ die (endliche) eingespannte Saite zu lösen; hier geht allerdings ganz wesentlich ein, dass wir räumlich eindimensional arbeiten können!

Sei im Folgenden $L > 0$ fest. Gegeben seien geeignete Funktionen $\varphi, \psi : [0, L] \to \mathbb{R}$, gesucht ist $u \in C^2([0, L] \times \mathbb{R})$ als Lösung des Cauchyproblems für die homogene Wellengleichung:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0, && \text{für } (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}, \\
u(x,0) &= \varphi, && \text{für } x \in [0,L], \\
u_t(x,0) &= \psi, && \text{für } x \in [0,L], \\
u(0,t) = u(L,t) &= 0, && \text{für } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{9.11}
$$

Unter den geforderten Qualitätsmerkmalen an (9.11) und u ergibt die gemeinsame Betrachtung von Rand- und Anfangsdaten und der Differentialgleichung notwendigerweise folgende *Kompatibilitätsbedingungen*:

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \varphi''(0) = \varphi''(L) = 0 \tag{9.12}$$

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \tag{9.13}$$

sowie $\varphi \in C^2([0, L]), \psi \in C^1([0, L])$.

Man definiere Fortsetzungen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von φ, ψ indem man diese erst ungerade nach $[-L, L]$ und dann $2L$-periodisch fortsetzt. Die Kompatibilitätsbedingungen stellen sicher:

$$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in C^2(\mathbb{R}).$$

Die d'Alembertschen Formeln können also Anwendung finden und wir können beweissen

Satz 9.5. *Seien $\varphi \in C^2([0, L]), \psi \in C^1([0, L])$; es seien die Kompatibilitätsbedin- gungen* (9.12)*,* (9.13) *erfüllt. Dann besitzt das Anfangswertproblem* (9.11) *genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, L])$. Diese erhält man aus den d'Alembertschen Formeln, indem man dort die ungeraden und $2L$-periodischen Fortsetzungen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ von φ und ψ einsetzt.*

Diese erhält man aus den d'Alembertschen Formeln, indem man dort die ungeraden und $2L$-periodischen Fortsetzungen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ (Übung)

10. Die Wellengleichung in höherer Raumdimensionen

Für geeignet zu spezifizierende Anfangsdaten $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suchen wir eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ des Cauchyproblems

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta u &= 0, && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\
u(x,0) &= \varphi, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\
u_t(x,0) &= \psi, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

Wir legen wieder eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ zu Grunde, und wollen eine notwendigerweise erfüllte Darstellungsformel für u herleiten.

Im vorhergehenden Paragraphen spielten (sphärische) Mittelwerte eine grundlegende Rolle.

Definition 10.1. Für $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ist

$$M_f(x,r) := \frac{1}{|\partial B_r(0)|} \int_{|\xi|=r} f(x+\eta) dS(\eta) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{|\xi|=1} f(x+r\xi) dS(\xi)$$

das *sphärische Mittel* von f um x zum Radius r. Entsprechend definiert man für zeitabhängige Funktionen $g \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $x \in R^n$, $t \in \mathbb{R}, r > 0$:

$$M_g(t;x,r) := \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{|\xi|=1} g(x+r\xi,t) dS(\xi).$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden auf $t \geq 0$; man be- achte, dass man durch Betrachtung von $u(-t,x)$ den Fall $t \leq 0$ auf den ersteren Zurückführen kann.

Am Anfang steht die Beobachtung, dass Bildung von sphärischen Mittel und Bildung des Laplace-Operators vertauschen; man beachte, dass

$$\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r$$

die radialsymmetrische Version des Laplace-Operators ist.

Satz 10.2 (Euler-Poisson-Darboux-Gleichung)**.** *Sei $u \in C^k(\mathbb{R}^n \times [0,t))$, $k \geq 2$ eine Lösung von* (10.1)*, sei $x \in \mathbb{R}^n$ im Folgenden beliebig, aber fest. Für $t \geq 0, r > 0$ sei*

$$v(r,t) := M_u(t;x,r).$$

Dann ist $v \in C^k([0,\infty) \times [0,\infty)$ und löst das folgende Cauchy-Problem:

$$
\begin{aligned}
v_{tt} - (v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r) &= 0, && \textit{für } r > 0, t \geq 0 \\
v(r,0) &= M_\varphi, && \textit{für } r > 0, \\
v_t(r,0) &= M_\psi, && \textit{für } r > 0.
\end{aligned}
\tag{10.2}
$$

Proof. Parameterabhängige Riemann-Integrale zeigen direkt $v \in C^k([0,\infty) \times [0,\infty))$ und die Vertauschbarkeit von $M_u(t;x,r)$ mit ∂_t, ∂_x.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} M_u &= M_{u_t}(t,x,r), \\
\frac{\partial}{\partial x} M_u &= M_{u_x}(t,x,r).
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich die Anfangsdaten in (10.2) direkt aus denen in (10.1). Es sei an die Rechnungen aus dem Beweis von Satz 2.10 (genauer (2.4)) erinnert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}v(r,t) &= \frac{\partial}{\partial r}M_u(t;x,r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{|\partial B_1(0)|}\int_{|\xi|=1} u(x+r\xi,t)dS(\xi)\right) \\
&= \cdots \overset{(2.4)}{=} \frac{1}{|\partial B_1(0)|}\int_{|\xi|\leq 1}\Delta u(x+r\xi,t)d\xi \\
&= \frac{r}{n|B_r(0)|}\int_{|\xi|\leq r}\Delta u(x+\xi,t)d\xi
\end{aligned}$$

Das zeigt

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\partial}{\partial r}v(r,t) = 0.$$

Mit Fubini gilt

$$\frac{\partial}{\partial r}v(r,t) = \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1(0)|}\int_0^r\int_{|\xi|=\rho}\Delta u(x+\xi,t)dS(\xi)d\rho.$$

Also kann man $\frac{\partial}{\partial r}v(r,t)$ noch mal nach r ableiten und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(r,t) &= -\frac{n-1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1(0)|}\int_{|\xi|=r}\Delta u(x+\xi,t)dS(\xi) \\
&\overset{(10.1)}{=} -\frac{n-1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1(0)|}\left(\int_{|\xi|=r}u_{tt}(x+\xi,t)dS(\xi)\right) \\
&= -\frac{n-1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(t;x,r),
\end{aligned}$$

D.h.,

$$v_{rr} + \frac{n-1}{r}v_r = v_{tt},$$

die behauptete Dgl.

Den Rechnungen oben entnimmt man auch:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(r,t) = -\frac{n-1}{r}\frac{r}{n|B_r(0)|}\int_{|\xi|\leq r}\Delta u(x+\xi,t)d\xi + \frac{1}{r^{n-1}|\partial B_1(0)|}\int_{|\xi|=r}\Delta u(x+\xi,t)dS(\xi).$$

Es folgt

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(r,t) = -\frac{n-1}{n}\Delta u(x,t) + \Delta u(x,t) = \frac{1}{n}\Delta u(x,t).$$

□

Durch eine geschickte Manipulation an diesem v soll nun eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung erreicht werden. Z.B. für $n = 3$ hat man:

$$v_{tt} = v_{rr} + \frac{2}{y}v_r = r^{-1}(rv)_{rr},$$

also

$$(rv)_{tt} = (rv)_{rr},$$

und man kann auf die d'Alembertsche Formel zurčkgreifen.

Zur Vorbereitung des Falles allgemeinen ungeraden n's brauchen wir einen Hillssatz:

Lemma 10.3. *Sei $k \in \mathbb{N}$, $v \in C^{k+1}((0,\infty),\mathbb{R})$,*

(a) *dann gilt:*

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}((r^{2k-1}v(r)) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k((r^{2k}v'(r))$$

(b) *mit geeigneten Konstanten* $\beta_j^k (j = 0, ..., k-1)$:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} v(r)\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} \frac{d^j}{dr^j} v(r).$$

Dabei ist $\beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$.

Proof. Beweis durch Induktion nach k.

(a) Induktionsanfang: $k = 1$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)(rv) = rv'' + 2v' = \frac{1}{r}(r^2 v')' = \left(\frac{d}{dr}\right)(r^2 v).$$

Induktionsschritt: $k \to k+1$: (Übung)

(b) Induktionsanfang: $k = 1$. Trivial mit $\beta_0^1 = 1$.

Induktionsschritt: $k \to k+1$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k} (r^{2k+1} v) &= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) (r^{2k+1} v) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1} \left((2k+1) r^{2k-1} v + r^{2k-1}(rv')\right) \\
&\overset{I.A.}{=} (2k+1) \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} v^{(j)} + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} (rv')^{(j)} \\
&= (2k+1) \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+1} v^{(j)} + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^k r^{j+2} v^{(j+1)} + \sum_{j=0}^{k-1} j \beta_j^k r^{j+1} v^{(j)} \\
&= (2k+1)\beta_0^k r v + \cdots .
\end{aligned}$$

Für β_0^k liest man die Rekursionsformel $\beta_0^{k+1} = (2k+1)\beta_0^k$ an. Mit $\beta_0^1 = 1$ folgt $\beta_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$. $\square$

10.1. $n = 2k+1$.. Wir halten nun für die folgende Herleitung Bezeichnungen und Folgendes fest: Sei $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ Lösung von (10.1), wobei zumindest $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n), \psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Wir fixieren für das Folgende ein $x \in \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
v(r,t) &:= M_u(t;x,r), \\
w(r,t) &:= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} v(r)\right) \\
\Phi(r,t) &:= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} M_\varphi(x,r)\right) \\
\Psi(r,t) &:= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} M_\psi(x,r)\right)
\end{aligned}
\tag{10.3}
$$

Mit diesem Kunstgriff gelingt in der Tat die Rückführung von (10.1) auf ein eindimensionales: Cauchyproblem:

Lemma 10.4. *Sei u außerdem so glatt* ($u \in C^2$)*, dass* w, Φ, Φ *aus* (10.3) *für* $t \geq 0, r \geq 0$ *zweimal bzw. einmal stetig differenzierbar sind. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
w_{tt} - w_{rr} &= 0, && \text{für } r > 0, t \geq 0 \\
w(r,0) &= \Phi(r), && \text{für } r > 0, \\
w_t(r,0) &= \Psi(r), && \text{für } r > 0.
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

Beweis. Die Anfangswertvorgabe ergibt sich direkt aus der Definition (10.3) und den Anfangsdaten in (10.1). Beachte parameterabhängige Integrale zum Erfülltsein der eindimensionalen Wellengleichung.

$$
\begin{aligned}
w_{rr} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} v(r,t)\right) \\
&\overset{\text{Lemma 10.3}}{=} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k} \left(r^{2k} \frac{\partial v}{\partial r}(r,t)\right) \qquad (n = 2k+1) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial v}{\partial r}(r,t)\right) \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{n-2} \left(v_{rr} + \frac{n-1}{r} v_r\right)\right) \\
&\overset{\text{Satz 10.2}}{=} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} v_{tt}) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} (r^{2k-1} v) \qquad (n = 2k+1) \\
&= w_{tt}
\end{aligned}
$$

□

Das Problem auf der halben Linie $[0, \infty)$ haben wir schon in Abschnitt 9.2 gelöst. Für $0 < r < t$ mit (9.10) haben wir

$$
w(r,t) = \frac{1}{2}\Phi(r+t) - \frac{1}{2}\Phi(t-r) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{r+t} \Psi(\tau) d\tau. \tag{10.5}
$$

Frage: Wie erhält man nun aber $u(x,t)$ aus w zurück? Wir wissen: von $v = M_u(t;x,r)$ folgt

$$\lim_{r \to 0^+} v(r,t) = u(x,t).$$

Nach Definition ist

$$w(r,t) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1} \left(r^{2k-1} v(r)\right)$$

Nach Lemma 10.3 (b) ist

$$v(r,t) = \frac{1}{\beta_0^k r} w(r,t) - \frac{1}{\beta_0^k} \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j^k r^j \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^j v(r,t).$$

Also

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} v(r,t) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\beta_0^k r} w(r,t)$$

Damit erhalten aus (10.5)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r\to 0^+} \frac{\Phi(r+t) - \Phi(t-r)}{2r} + \frac{1}{\beta_0^k} \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{r+t} \Psi(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\beta_0^k} (\Phi'(t) + \Psi(t)). \end{aligned}$$

Sofern man also voraussetzt, dass u eine hinreichend glatte Lösung des Cauchyproblems (10.1) ist, erhält man notwendigerweise folgende Darstellungsformel für $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} (t^{n-2} M_\varphi(x,t)) + \frac{1}{\gamma_n} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} (t^{n-2} M_\psi(x,t)), \tag{10.6}$$

wobei n ungerade, $\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)$.

Wir bemerken, dass wir in der Anwendung der (9.10) die Kompatibilitätsbedingungen $w(0,t) = 0$, $t > 0$ noch nicht bewiesen haben. Wir zeigen das nicht, sondern zeigen direkt, dass die durch (10.6) definierte Funktion u eine Lösung von (10.1) ist.

Satz 10.5. *Sei $n \geq 3$ ungerade, $\varphi \in C^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n), \psi \in C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das Cauchyproblem* (10.1) *genau eine Lösung $u \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Diese ist durch* (10.6) *gegeben.*

Ist speziell $n = 3$, so ist $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ vorauszusetzen, und es gilt die Kirchhoffsche Formel*:*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(t M_\varphi(x,t)) + M_\psi(x,t).$$

Proof. Eindeutigkeit: Obwohl wir die Lösungsformel (10.6) direkt aus der Lösungseigenschaft von ((10.1) hergeleitet haben, haben wir dennoch den Eindeutigeitsnachweis nicht erbracht: Im Laufe der Herleitung hatten wir stärke Differenzierbarkeitseigenschaften an u vorausgesetzt. Wir tragen den Eindeutigkeitsteil unten ganz allgemein nach.

Existenz: Wir verifizieren zunächst die Dgl. und betrachten zunächst den φ-Anteil, d.h. $\psi \equiv 0$, so dass

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} (t^{n-2} M_\varphi(x,t))$$

Mit Lemma 10.3 haben wir

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{1}{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{\overbrace{n-3}^{k-1}}{2}} (t^{\overbrace{n-2}^{2k-1}} M_\varphi(x,t)) \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) (t^{\overbrace{n-1}^{2k}} \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t)) \end{aligned}$$

Noch mal benutzen wir die Rechnung in (2.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t) = \frac{t}{n|B_t(0)|} \int_{|\xi|\leq t} \Delta\varphi(x+\xi) d\xi$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)(t^{n-1}M_\varphi(x,t)) &= \frac{1}{|\partial B_1|}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_0^t\int_{|\xi|=t}\Delta\varphi(x+\xi)dS(\xi)d\rho \\ &= \frac{1}{|\partial B_1|}\frac{1}{t}\int_{|\xi|=t}\Delta\varphi(x+\xi)dS(\xi) \\ &= \Delta(t^{n-2}M_\varphi(x,t))\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}u_{tt} &= \frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\Delta(t^{n-2}M_\varphi(x,t)) \\ &= \Delta\frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}M_\varphi(x,t)) = \Delta u.\end{aligned}$$

Ganz entsprechend verifiziert man die Dgl. für den ψ-Anteil, d.h. $\varphi = 0$, so dass

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}M_\psi(x,t)).$$

Da die Wellengleichung linear ist, ergeben beide Teilbehauptungen zusammen, dass stets die Wellengleichung erfüllt ist.

Zu den Anfangswerten. Laut Lemma 10.3 ist

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}M_\varphi(x,t))\Big|_{t=0} \\ =& \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{1}{\gamma_n}\beta_j^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{j+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j M_\varphi(x,t)\right)\Big|_{t=0} \\ =& \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{1}{\gamma_n}\beta_j^{\frac{n-1}{2}}\left((j+1)t^j\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j M_\varphi(x,t) + t^{j+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j+1} M\varphi(x,t)\right)\Big|_{t=0} \\ =& \frac{1}{\gamma_n}\beta_0^{\frac{n-1}{2}}\lim_{t\to 0^+} M_\varphi(x,t) = \varphi(x).\end{aligned}$$

Ganz genau haben wir

$$\frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}M_\psi(x,t))\Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Weiter analog:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}M_\varphi(x,t))\Big|_{t=0} \\ \overset{s.o.}{=}& \frac{2}{\gamma_n}\beta_0^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(x,t)\Big|_{t=0} + \frac{2}{\gamma_n}\beta_1^{\frac{n-1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(x,t)\Big|_{t=0} = 0,\end{aligned}$$

denn

$$\frac{\partial}{\partial t}M_\varphi(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{t}{n|B_t(0)|}\int_{|\xi|\le t}\Delta\varphi(x+\xi)d\xi\Big|_{t=0} = 0.$$

Es ist leicht to sehen

$$\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}M_\psi(x,t))\Big|_{t=0} = 0,$$

da

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}M_\varphi(x,t)\right)\Big|_{t=0}\\ = \;&\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}}\frac{1}{\gamma_n}\beta_j^{\frac{n-1}{2}}\left(t^{j+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j M_\varphi(x,t)\right)\Big|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$\begin{aligned}u(x,0) &= \frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}M_\varphi(x,t)\right)\Big|_{t=0} + \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}M_\psi(x,t)\right)\Big|_{t=0}\\ &= \varphi(x)+0=\varphi(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}u_t(x,0) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}M_\varphi(x,t)\right)\Big|_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}M_\psi(x,t)\right)\Big|_{t=0}\\ &= 0+\psi(x)=\psi(x).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 10.6. *Bestimmtheitsbereich und Einflussbereich* einer Kugel $B_R(a)$ und von $\varphi_{|_{B_r(a)}}$, $\psi_{|_{B_r(a)}}$

Gehen wir zunächst umgekehrt vor. Gegeben $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$. Zur Bestimmung von u in (x,t) benötigen wir φ, ψ (in einer Umgebung von) $\partial B_t(x)$.

Bezeichnet $B_{B_R(a)}$ den *Bestimmtheitsbereich*, so ist

$$\begin{aligned}(x,t)\in B_{B_R(a)} &\Leftrightarrow \partial B_t(x)\subset B_R(a)\\ &\Leftrightarrow |x-a|<R-t,\ 0<t<R.\end{aligned}$$

Wir erhalten also den *Bestimmtheitskegel*:

$$B_{B_R(a)} = \{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) : |a-x|<R-t, 0<t<R\}.$$

(Ausbreitungsgeschwindigkeit 1)

Bezeichnet $E^+_{B_R(a)}$ den *Einflussbereich*, so ist

$$\begin{aligned}(x,t)\in E^+_{B_R(a)} &\Leftrightarrow \partial B_t(x)\cap B_R(a)\neq\emptyset\\ &\Leftrightarrow |x-a|<R+t,\ \text{und, falls } t>R; t-|x-a|<R\\ &\Leftrightarrow |x-a|<R+t,\ \text{und } |x-a|>t-R\end{aligned}$$

Also

$$E^+_{B_R(a)} = \{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) : t>0\ \&\ t-R<|x-a|<R+t\}.$$

D.h. Anfangsströmungen aus $B_R(a)$ werden bestenfalls für

$$|x-a|-R<t<|x-a|+R$$

wahrgenommen, für $R\sim 0$ also eigentlich nur zur Zeit $t\sim|x-a|$: *Prinzip der scharfen Wellenfronten, Huygenssches Prinzip*: gilt nur in ungerade $n\geq 3$. Dazu vgl. man für gerades n unten; bei $n=1$ verhält sich φ "gerade" und ψ "ungerade".

Der Nachweis der Eindeutigkeit für das Cauchyproblem (10.1) gelingt un- abhängig von der Dimension auf vergleichsweise elegante Art mit Hilfe der *Energiemethode*; gleichzeitig wird die Rolle des Bestimmtheitskegels unterstrichen.

Satz 10.7. *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$,*

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)) : 0 \le t < R, |x-a| < R-t\},$$

$u \in C^2(\Omega)$ Lösung von

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, && \text{für } (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) &= 0, && \text{für } x \in B_R(a), \\ u_t(x,0) &= 0, && \text{für } x \in B_R(a). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$u \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

(Man beachte: Beim Cauchyproblem sind, im Gegensatz zu Korollar (6.15) für die Wärmeleitungsgleichung, keine Bedingungen an u in ∞ erforderlich!)
*Beweis.*Wir betrachten die Energie in $B_R(a)$, $0 \le t < R$

$$\begin{aligned} e(t) &:= \frac{1}{2}\int_{B_{R-t}(a)} \left(u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{R-t}\int_{|\xi|=\rho} \left(u_t^2(a+\xi,t) + |\nabla u(a+\xi,t)|^2\right) dS(\xi) d\rho. \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel und der Theorie parameterabhängiger Integrale erhalten wir $e \in C^1([0,R))$ und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) &= -\frac{1}{2}\int_{|\xi|=\rho} \left(u_t^2(a+\xi,t) + |\nabla u(a+\xi,t)|^2\right) dS(\xi) d\rho \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{B_{R-t}(a)} \left(2u_t u_{tt} + 2\langle \nabla u, \nabla u_t\rangle\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{|\xi|=\rho} \left(u_t^2(a+\xi,t) + |\nabla u(a+\xi,t)|^2\right) dS(\xi) d\rho \\ &\quad + \int_{B_{R-t}(a)} u_t(u_{tt} - \Delta u) dx + \int_{|\xi|=R-t} \langle \nabla u(a+\xi,t), \frac{\xi}{|\xi|}\rangle u_t(a+\xi,t) dS(\xi) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{|\xi|=\rho} \left(u_t^2(a+\xi,t) + |\nabla u(a+\xi,t)|^2\right) dS(\xi) d\rho \\ &\quad + \int_{|\xi|=R-t} |\nabla u(a+\xi,t)||u_t(a+\xi,t)| dS(\xi) \le 0, \end{aligned}$$

mit der CSU $|\nabla u(a+\xi,t)||u_t(a+\xi,t)| \le \frac{1}{2}(u_t^2(a+\xi,t) + |\nabla u(a+\xi,t)|)$. Es folgt $e(t) = 0$ für alle $0 \le t < R$, da $e(0) = 0$ und $e(t) \ge 0$. Da der Integrand stetig und ≥ 0 ist, folgt

$$u_t = 0, \nabla u = 0 \text{ in } \Omega.$$

Alos ist u in Ω konstant. $u(\cdot,0)_{|B_R(a)} = 0$, folgt schließlich $u \equiv 0$ in Ω. □

Für den Rest dieses Abschnitts spezialisieren wir uns auf $n = 3$. Wir zeigen rigoros die von der physikalischen Erfahrung her naheliegende Tatsache, dass Störungen weiter weg immer "leiser" werden bzw. eine Anfangsstörung im Maximum der Amplitude mit zunehmender Zeit abklingt (nicht in $n = 1$, dort fehlt der Platz!).

Satz 10.8. *Sei $n = 3$, $\varphi \in C_0^3(\mathbb{R}^3), \psi \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$, $R > 0$ so, dass $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\psi \subset B_R(0)$. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ die Lösung des Cauchyproblems* (10.1). *Dann gilt für $t > \max\{R, 1\}$*

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^0(\mathbb{R}^3)} \le \frac{R^2}{2t}\{\|\varphi\|_{C^1(\mathbb{R}^3)} + \|\psi\|_{C^0(\mathbb{R}^3)}\}.$$

Beweis. Zur Abschätzung von u betrachten wir die Kirchhoffschen Formeln

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\varphi(x+t\xi)dS(\xi)\right)+\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\psi(x+t\xi)dS(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{S(x,t)}\varphi(x+t\xi)dS(\xi)+\frac{t}{4\pi}\int_{S(x,t)}\langle\nabla\varphi(x+t\xi),\xi\rangle dS(\xi) \\ &\quad +\frac{t}{4\pi}\int_{S(x,t)}\psi(x+t\xi)dS(\xi), \end{aligned}$$

wobei

$$S(x,t) := \{\xi : |\xi| = 1 \text{ und } x+t\xi \in B_R(0)\} = \mathbb{S}^2 \cap B_{R/t}(-\frac{1}{t}x).$$

Wir behaupten dass die Flächeninhalt von $S(x,t)$

$$Area(S(x,t)) \le 2\pi(R/t)^2, \quad \text{für } R/t < 1.$$

Daraus folgt für $t > R$ und $t > 1$

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_{C^0(\mathbb{R}^3)} &\le \frac{t}{4\pi}\{\|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^3)}+\||\nabla\varphi|\|_{C^0(\mathbb{R}^3)}+\|\psi\|_{C^0(\mathbb{R}^3)}\}Area(S(x,t)) \\ &\le \frac{R^2}{2t}\{\|\varphi\|_{C^1(\mathbb{R}^3)}+\|\psi\|_{C^0(\mathbb{R}^3)}\}, \end{aligned}$$

die gewünschte Aussage.

Die Behauptung folgt aus: Oberfläche der Durchschnitt der Sphäre $\mathbb{S}^2$ und einer beliebigen Kugel mit Radius $r < 1$ ist kleiner oder gleich $2\pi r^2$. (Übung). □

Die Kirchhoffschen Formel hat folgende Form:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\varphi(x+t\xi)dS(\xi)\right)+\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\psi(x+t\xi)dS(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\varphi(x+t\xi)dS(\xi)+\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\langle\nabla\varphi(x+t\xi),\xi\rangle dS(\xi) \\ &\quad +\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\psi(x+t\xi)dS(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B_t(x)}\left(\varphi(y)+\langle\nabla_y\varphi(y),(y-x)\rangle+t\psi(y)\right)dS(y), \end{aligned}$$

wobei wir die Transformationssatz mit $\xi = \frac{y-x}{t}$ benutzt haben. (Vergleichen Sie die Aufgabe 10.4)

10.2. n **gerade,** $n = 2k$**.** Nun betrachten wir das Cauchy-Problem (10.1) für $n = 2k$.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) &= \psi, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Idee: (*Hadamardsche Abstiegsmethode*) Wir führen eine zusätzliche Variable x_{n+1} ein, von der φ, ψ dann gar nicht abhängen, lösen die Wellengleichung in der ungeraden Raumdimension $n+1$ und zeigen, dass auch die Lösung nicht von $x_n + 1$ abhängt. Um Anschluss an Satz 10.5 zu bekommen, müssen (!) wir also voraussetzen:

$$\varphi \in C^{\frac{n}{2}+2}, \quad \psi \in C^{\frac{n}{2}+1}. \tag{10.7}$$

Wir setzen dann

$$\tilde{\varphi}(x, x_{n+1}) := \varphi(x), \quad \tilde{\psi}(x, x_{n+1}) := \psi(x), \tag{10.8}$$

wir haben

$$\tilde{\varphi} \in C^{\frac{(n+1)+3}{2}}, \quad \tilde{\psi} \in C^{\frac{(n+1)+1}{2}},$$

und Satz 10.5 liefert die Lösung $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^{n+1} \times [0,\infty))$ des Cauchyproblems zu $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$. Diese ist gegeben durch

(10.9)

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n}{2}-1} (t^{n-1} M_{\tilde{\varphi}}(x, x_{n+1}, t)) + \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n}{2}-1} (t^{n-1} M_{\tilde{\psi}}(x, x_{n+1}, t)),$$

wobei n ungerade, $\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)$, und Sphärische Mittelwertbildung in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lemma 10.9. *$\tilde{u}$ hängt von x_{n+1} nicht ab, d.h. stets gilt:*

$$\tilde{u}(x, x_{n+1}, t) = \tilde{u}(x, 0, t) \qquad \textit{für all } t, x, x_{n+1}$$

Setzt man nun für $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x,t) := \tilde{u}(x, 0, t), \tag{10.10}$$

so erhält man mit $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ die nach Satz 10.5 eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems (10.2).

Beweis. In (10.9) ablesen, oder mit der Idee, die wir mehr mal genutzt haben:

Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$v_a(x, x_{n+1}, t) = \tilde{u}(x, x_{n+1} + a, t)$$

v_a löst dasselbe Cauchyproblem, also ist laut der Eindeutigkeit, Satz 10.7:

$$v_a = \tilde{u},$$

d.h. $\tilde{u}(x, x_{n+1} + a, t) = \tilde{u}(x, x_{n+1}, t)$, für alle $a \in \mathbb{R}$. □

Es bleibt noch, die Formeln (10.9), (10.10) etwas griffiger zu schreiben:

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\varphi}}(x,0,t) &= \frac{1}{|\partial B_1^{n+1}|} \int_{|y|^2 + y_{n+1}^2 = 1} \varphi(x + ty) dS(y, y_{n+1}) \\ &= \frac{2}{|\partial B_1^{n+1}|} \int_{|y| \leq 1} \frac{\varphi(x+ty)}{\sqrt{1 - |y|^2}} dy \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \Phi(y) := \sqrt{1 - |y|^2} \\ \nabla \Phi &= -\frac{y}{\sqrt{1 - |y|^2}} \\ \sqrt{1 + |\nabla \Phi|^2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - |y|^2}}. \end{aligned}$$

Aus Analysis III wissen wir

$$|\partial B_1^{n+1}| = (n+1)|B_1^{n+1}| = (n+1)\cdot \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(\frac{n+1}{2})!}, & \text{falls } n+1 = 2k \text{ gerade} \\ \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\dots\cdot(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}, & \text{falls } n+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Daraus haben wir (n is gerade)

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}|\partial B_1^{n+1}| &= 1\cdot 3\cdot\dots\cdot(n-1)\cdot(n+1)\cdot\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\dots\cdot(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})} \\ &= 2(2\pi)^{\frac{n}{2}} \\ \gamma_n|B_1^n| = \gamma_n\tfrac{1}{n}|\partial B_1^n| &= 2\cdot 4\cdot\dots\cdot n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma_n = 2\cdot 4\cdot\dots\cdot n, \quad \text{für } u \text{ gerade.}$$

Also

$$\gamma_{n+1}|\partial B_1^{n+1}| = 2\gamma_n|B_1^n|$$

und

$$\tfrac{1}{\gamma_{n+1}}M_{\tilde\varphi}(x,0,t) = \frac{1}{\gamma_n}\frac{1}{|B_1^n|}\int_{|y|\le 1}\frac{\varphi(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy.$$

Zusammenfassend erhalten wir

Satz 10.10. *. Sei $n\in\mathbb{N}$ gerade, $\varphi\in C^{\frac{n}{2}+2}(\mathbb{R}^n), \psi\in C^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das Cauchyproblem (10.10) genau eine Lösung $u\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Diese ist durch folgende Formel gegeben:*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(t^{n-1}\frac{1}{|B_1^n|}\int_{|y|\le 1}\frac{\varphi(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right) \\ &\quad +\frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(t^{n-1}\frac{1}{|B_1^n|}\int_{|y|\le 1}\frac{\psi(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right), \end{aligned} \tag{10.11}$$

mit $\gamma = 2\cdot 4\cdot\dots\cdot n$, n gerade.

Ist speziell $n=2$, so hat man $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^2), \psi\in C^2(\mathbb{R}^2)$ zu verlangen, und es gilt die Poissonsche Formel:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{|y|\le 1}\frac{\varphi(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right) + \frac{t}{2\pi}\int_{|y|\le 1}\frac{\psi(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy. \tag{10.12}$$

Interpretation. Hinsichtlich des Bestimmtheitsbereichs von $\varphi_{|B_R(a)}, \psi_{|B_R(a)}$ gilt - nicht zuletzt mit Blick auf das Eindeutigkeitsresultat Satz 10.7- dieselbe Bemerkung wie in Bemerkung 10.6.

$$B_{B_R(a)} = \{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) : |a-x| < R-t, 0<t<R\}.$$

Da wir in geraden Dimensionen aber volumenhafte Mittelwerte bilden, ergibt sich hinsichtlich des Einflussbereichs ein ganz anderes Bild:

$$\begin{aligned} (x,t)\in E^+_{B_r(a)} &\Leftrightarrow B_t(x)\cap B_R(a)\ne\emptyset \\ &\Leftrightarrow |x-a| < R+t. \end{aligned}$$

Also

$$E^+_{B_R(a)} = \{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty) : |a-x| < R+t\}.$$

Selbst eine Anfangsstörung mit kompaktem Träger kann an einem Punkt, hat diese die Wellenfront erst einmal erreicht, für alle nachfolgenden Zeiten wahrgenommen werden. In geraden Dimensionen hat man Nachhall, das Huygenssche Prinzip der scharfen Wellenfronten gilt nicht! In

$n = 1$ spielt das Anfangsdatum ψ eine Rolle wie in geraden Raumdimensionen. (Wiederholung: In $n = 1$ spielt das Anfangsdatum φ eine Rolle wie in ungeraden Raumdimensionen.)

11. Das Cauchyproblem für die inhomogene Wellengleichung, das Duhamelsche Prinzip

Für geeignet Anfangsdaten $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und geeignetes $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ suchen wir eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ des Cauchyproblems für die inhomogene Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) &= \psi, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Wegen der Linearität reicht es indem man ggfs. die Lösung aus Kapitel 10 dazu addiert, hier homogene Anfangsdaten zu betrachten.

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t), && \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= 0, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,0) &= 0, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Zur Motivation des weiteren Vorgehens vgl. man auch Abschnitt 6.3 über die inhomogene Wärmeleitungsgleichung.

Betrachten wir zunächst eine analoge gewöhnliche Differentialgleichung:

$$u''(t) + u(t) = f(t), \quad u(0) = u'(0) = 0.$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten erhält man

$$u(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t u(t;\tau) d\tau,$$

wenn wir die Bezeichnung

$$u(t;\tau) := \sin(t-\tau) f(\tau)$$

einführen. Diese Funktion gestattet für $0 \le \tau \le t$ die Interpretation als Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u''(t;\tau) + u(t;\tau) &= 0, \text{ für } t \ge \tau, \\ u(\tau;\tau) &= 0, \\ u_t(\tau;\tau) &= f(\tau). \end{aligned}$$

Dieser Ansatz wird sich übertragen, wenn man die Identität durch den "positiv definierten" Laplace-Operator $(-\Delta)$ ersetzt.

Mit Blick auf die vorhergehenden Paragraphen setzen wir also für das Folgende stets voraus:

$$f \in \begin{cases} C^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)), & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \\ C^{\frac{n}{2}+1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)), & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \end{cases} \tag{11.3}$$

Definition 11.1. . Für $\tau \ge 0$ $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ sei $u(x,t;\tau)$ die Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t;\tau) - \Delta u(x,t;\tau) &= 0, && \text{für } t \ge \tau, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,\tau;\tau) &= 0, && \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x,\tau;\tau) &= f(x,\tau) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

.

Lemma 11.2. *Unter der Voraussetzung* (11.3) *gilt für jedes* $\tau \ge 0$*, dass* $u(\cdot,\cdot;\tau) \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$*; diese Lösung sowie alle* (x,t)*-Ableitungen bis zur Ordnung 2 sind stetig in* $(x,t;\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0,\infty)$*.*

Beweis. Die Existenz, die Eindeutigkeit und zweimalige Differenzierbarkeit in (x,t) folgen direkt aus den Kapitel 9 und den Kapitel 10. Es bleibt die simultane Stetigkeit in $(x,t;\tau)$ zu untersuchen.

Betrachten wir etwa $\tau_0 \ge 0$ beliebig, $f_{|[\tau_0-1,\tau_0+1]} \times B_{R+1}(a)$; dadurch liegen für alle $\tau \ge 0, \tau \in [\tau_0-1, \tau_0+1], u(\cdot,\cdot;\tau)$ fest auf

$$B = \{(x,t) : |t-\tau_0| < R, |x-a| < R - |t-\tau_0|\},$$

$$\|u(\cdot,\cdot;\tau)\|_{C^2(B)} \le C\|f(\cdot,\tau)\|_{C^k(B)},$$

wobei

$$k = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade,} \\ \frac{n}{2}+1 & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \end{cases}$$

Die Abschätzung liest man aus den Lösungsformeln einfach ab, außderm für $\tau, \tau' \in [\tau_0 - 1, \tau_0 + 1]$

$$\|u(\cdot,\cdot;\tau) - u(\cdot,\cdot;\tau')\|_{C^2(B)} \leq \omega(|\tau - \tau'|)$$

mit einem Stetigkeitsmodul ω, abhängig von f und $\lim_{\delta\to 0^+} \omega(\delta) = 0$.

Die Behauptung folgt aus dieser gleichmäßigen Stetigkeitsaussage in τ und der Stetigkeit der Lösungen bei festem τ in (x,t). □

Satz 11.3. *Für* $: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *gelte Voraussetzung* (11.3), *weiter sei* $u(\cdot,\cdot;\tau)$ *wie in Definition 11.5. Dann ist*

$$u(x,t) := \int_0^t u(x,t;\tau)d\tau$$

in $C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ *und die eindeutig bestimmte Lösung des Cauchyproblems* (11.2) *für die inhomogene Wellengleichung.*

Beweis. Eindeutigkeit: Satz 10.7.

Existenz: Lemma 11.2 und die Theorie parameterabhängiger Integrale zeigen $u \in C^2$ und gestatten die Vertauschung von Differentiation und Integration:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u(x,t;t) + \int_0^t u_t(x,t;\tau)d\tau = \int_0^t u_t(x,t;\tau)d\tau \\ u_t(x,t) &= u_t(x,t;t) + \int_0^t u_{tt}(x,t;\tau)d\tau \\ &= f(x,t) + \Delta\left(\int_0^t u(x,t;\tau)d\tau\right) \\ &= f(x,t) + \Delta u(x,t). \end{aligned}$$

Das u homogene Anfangswerte hat, liegt nach der vorstehenden Rechnung auf der Hand. □

Beispiele 11.4. (a) $n = 1$. D'Alembertsche Formel:

$$u(x,t;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi.$$

Es liefert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Der Integrationsbereich ist der Bestimmtheitsbereich zu $(x-t, x+t)$.

(b) $n = 2$. Die Poissonsche Formel liefert für $t \geq \tau \geq 0$:

$$\begin{aligned} u(x,t;\tau) &= \frac{t-\tau}{2\pi}\int_{|\xi|\leq 1} \frac{f(x+(t-\tau)\xi,\tau)}{\sqrt{1-|y|^2}}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|\leq t-r} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-|x-y|^2}}dy \end{aligned}$$

mit der Substitution $\xi = \frac{1}{t-\tau}(y-x) \Leftrightarrow y = x + (t-\tau)\xi$. Damit haben wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{|y-x|\leq t-r} \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-|x-y|^2}}dyd\tau.$$

Der Integrationsbereich ist der Bestimmtheitsbereich zu $B_t(x)$.

(c) $n = 3$. Laut Kirchhoffschen Formeln ist für $t \geq \tau \geq 0$:

$$\begin{aligned} u(x,t;\tau) &= (t-\tau)M_{f(\cdot,\tau)}(x,t-\tau) \\ &= \frac{t-\tau}{4\pi}\int_{|\xi|=1} f(x+(t-\tau)\xi,\tau)dS(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi(t-\tau)}\int_{|y-x|=t-r} f(y,\tau)dS(y) \end{aligned}$$

mit der Substitution $\xi = \frac{1}{t-\tau}(y-x) \Leftrightarrow y = x+(t-\tau)\xi$. Die Lösung u ist

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{|y-x|=t-r} \frac{f(y,\tau)}{t-\tau}dS(y)d\tau.$$

Hier wird nur über den Mantel des Bestimmtheitskegel zu $B_t(x)$ integriert.

Beispiel 11.5. Wir wollen lösen:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= xe^t, && \text{auf } \mathbb{R}\times[0,\infty) \\ u(x,0) &= x, && \text{für } x\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= x && \text{für } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wer zerlegen das Problem zur 2 Probleme: ein homogenes Problem

$$\begin{aligned} v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) &= 0, && \text{auf } \mathbb{R}\times[0,\infty) \\ v(x,0) &= x, && \text{für } x\in\mathbb{R}, \\ v_t(x,0) &= x && \text{für } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

und ein in homogenes Problem

$$\begin{aligned} w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) &= xe^t, && \text{auf } \mathbb{R}\times[0,\infty) \\ w(x,0) &= 0, && \text{für } x\in\mathbb{R}, \\ w_t(x,0) &= 0 && \text{für } x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für das erste Problem haben wir nach der d'Alembert-Formel

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \tfrac{1}{2}((x+t)+(x-t)) + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tau d\tau \\ &= x+xt = (1+t)x. \end{aligned}$$

Für das zweite Problem haben wir nach Beipiele 11.4 (a)

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi e^\tau d\xi dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^t e^\tau(4x(t-\tau))d\tau \\ &= x(e^t-t-1) \end{aligned}$$

Also löst

$$u = v+w = xe^t$$

das Ausgangsproblem.

12. Verschiedene Lösungsmethoden

In diesem Kapitel führen wir ein Paar Lösungsmethode für lineare PDEs ein.

12.1. **Separationsansatz.** Wir fingen von der Trennungsmethode an.

Gehen wir z.B. von der Wellengleichung:

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - \Delta u & = & 0, & \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) & = & \varphi, & \text{für } x \in \Omega, \\ u_t(x,0) & = & \psi, & \text{für } x \in \Omega \\ u(x,t) & = & 0, & \text{für } x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{12.1}$$

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \tag{12.2}$$

aus, und versuchen (!), die Lösung u in der separierten Form zu finden:

Ansatz:

$$u(x,t) = w(x)v(t). \tag{12.3}$$

In dieser Form löst u (12.2) genau dann, wenn

$$v''(t)w(x) - v(t)\Delta_x w(x) = 0.$$

Ist u eine nichttriviale Lösung, so wird v für fast alle t und w für fast alle x ungleich 0 sein. Für derartige x, t hat man also

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)}.$$

Da man x und t unabhängig von einander variieren kann, ist diese Identität also gleichwertig zur Existenz einer Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)} = -\lambda, \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R},$$

bzw.

$$-\Delta w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \Omega \tag{12.4}$$

und

$$-v''(t) = \lambda v(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.5}$$

Man nimmt zu (12.4) noch die Randwertvorgabe aus (12.2) hinzu und erhält das Eigenwertproblem für den Laplace-Operator unter Dirichletrandbedingungen, die sogenannte *Helmholtzgleichung*:

$$\begin{array}{rcll} -\Delta w(x) & = & \lambda w(x), & \text{für } x \in \Omega, \\ w(x) & = & 0, & \text{für } x \in \partial\Omega \\ w & \not\equiv & 0 & \end{array} \tag{12.6}$$

Bei beschränktem Ω wissen wir, dass (12.6) genau für eine Folge $\lambda_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$ nichttriviale Lösungen w_k besitzt. Für diese λ_k bilden $\cos(\sqrt{\lambda_k}t), \sin(\sqrt{\lambda_k}t)$ ein Fundamentalsystem von (12.5). Also ist

$$u_k = (a\cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b\sin(\sqrt{\lambda_k}t))w_k(x)$$

eine spezielle Lösung von $u_{tt} - \Delta u = 0$ mit $u(x,t) = 0$ für $x \in \partial\Omega$, $t \in \mathbb{R}$. Aber u_k erfüllt die Anfangsdaten allgemeine nicht, da

$$u_k(x) = aw_k(x), \quad u_{k,t}(x,0) = b\sqrt{\lambda_k}w_k(x).$$

Ausweg wird sein: Reihenentwicklungen nach Orthonormalsystemen $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ von Eigenfunktionen von (12.6). Betrachten wir

$$u = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t))w_k(x)$$

und bestimmen die Koeffizienten a_k, b_k durch die Anfangsdaten φ und ψ. Da $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ eine Orthonormalsystemen von $L^2(\Omega)$ ist, haben φ und ψ (formale) Reihenentwicklungen

$$\varphi(x) = \sum_{k}^{\infty} c_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k}^{\infty} d_k w_k(x).$$

Wir setzen $u(x,0) = \psi(x)$ unf $u_t(x,0) = \psi(x)$ und erhalten

$$a_k = c_k, \quad \sqrt{\lambda_k} b_k = d_k,$$

bzw

$$u = \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} d_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t)\right) w_k(x).$$

Wir erhälten eine formale Lösung von (12.2). Unter geeigneter Reguläritätsbedingung kann man eigentlich zeigen, dass das eine Lösung ist.

Ganz analog gelangt man mit dem Separationsansatz (12.3) von dem für die homogene Wärmeleitungsgleichung und homogenen Dirichletrandbedingungen zur Helmholtzgleichung (12.6), wobei man anstelle von (12.5)

$$v'(t) = -\lambda_k v(t)$$

zu lösen hat. Die mit diesem Ansatz gewonnenen Lösungen sind also von der Form

$$u_k(x,t) = \exp(-\lambda_k t) w_k(x).$$

Die allgemeine Lösung ist

$$u = \sum_{k=1} a_k \exp(-\lambda_k t) w_k(x).$$

Die Koeffizienten a_k werden durch die Anfangsbedingung $u(x,t) = \varphi(x)$ bestimmen. Natürlich müss man die Konvergenz untersuchen.

Als das zweite Beispiel untersuchen wir das Dirichletproblem für die harmonische Funktionen in $n = 2$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \quad \text{in } B_1 \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= \varphi, \quad \text{auf } \partial B_1 \end{aligned}$$

Wir benutzen die Polarkoordinaten

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

in $\mathbb{R}^2$ und den Separationsansatz

$$u(r,\vartheta) = f(r)g(\vartheta),$$

wobei f definiert für $r > 0$ ist und $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. (Oder wir sehen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion.) Wir wissen in der Polarkoordinaten, dass die Laplace-Gleichung ist:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta} = 0.$$

Also ist u genau dann harmonisch, wenn es gilt

$$\left(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)\right) g(\vartheta) + \frac{1}{r^2} f(r) g''(\vartheta) = 0.$$

Falls $u(r,\vartheta) \neq 0$, die Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{r^2}{f(r)}\left(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)\right) = -\frac{g''(\vartheta)}{g(\vartheta)}.$$

Also existiert es eine Konstante λ mit

$$\frac{r^2}{f(r)}\left(f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)\right)=-\frac{g''(\vartheta)}{g(\vartheta)}=\lambda,$$

bzw.

$$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)-\frac{\lambda}{r^2}f(r)=0,\qquad \text{für } r>0$$

und

$$g''(\vartheta)+\lambda g(\vartheta)=0\qquad \text{für } \vartheta\in\mathbb{S}^1.$$

Wir zunächst untersuchen die Gleichung für g. Man kann zeigen, dass die Gleichung nicht-trivial Lösungen genau dann existiert, wenn $\lambda=k^2$, $k=0,1,2,\cdots$. Für $\lambda=0$ ist die allgemeine Lösung $g(\vartheta)=a_0\in\mathbb{R}$. Für $\lambda=k^2$, $k=1,2,\cdots$, ist die allgemeine Lösung

$$g(\vartheta)=a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta,$$

wobei $a_k,b_k\in\mathbb{R}$. Weiter bilden die normalisierte Eigenfunktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos k\vartheta,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin k\vartheta,$$

eine orthonormale Basis für $L^2(\mathbb{S}^1)$. In anderen Worte, für alle $v\in L^2(\mathcal{S}^1)$,

$$v(\vartheta)=a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta),$$

wobei

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{S}^1}v(\vartheta)d\vartheta,$$

und für $k=1,2,\cdots$,

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{S}^1}v(\vartheta)\cos k\vartheta d\vartheta,\quad b_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{S}^1}v(\vartheta)\sin k\vartheta d\vartheta.$$

Nun betrachten wir die Gleichung für f mit $\lambda=k^2,k=0,1,2,\cdots$. Für $\lambda=0$, ist allgemeine Lösung

$$f(r)=c_0+d_0\log r,$$

mit zwei Konstante c_0 und d_0. Da $u(r,\vartheta)=f(r)g(\vartheta)$ eine harmonische Funktion ist, ist f beschränkt als $r\to 0$. Also $d_0=0$ und

$$f(r)=c_0.$$

Für $\lambda=k^2,k=1,2,\cdots$, ist allgemeine Lösung

$$f(r)=c_1r^k+d_kr^{-k},$$

für $c_k,d_k\in\mathbb{R}$. Analog gilt $d_k=0$ und

$$f(r)=c_kr^k.$$

Zusammenfassung: Eine harmonische Funktion in B_1 mit der Form $u(r,\vartheta)=f(r)g(\vartheta)$ is gegeben durch

$$u(r,\vartheta)=a_0,$$

oder

$$u(r,\vartheta)=r^k(a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta),$$

für $k=1,2,\cdots$, wobei a_0,a_k,b_k Konstante sind. damit suchen wir eine Lösung mit

$$u(r,\vartheta)=a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(a_kr^k\cos k\vartheta+b_kr^k\sin k\vartheta).$$

Die Koeffizienten kann man durch die Randbedingung $u(1,\vartheta)=\varphi(\vartheta)$ bestimmen.

Entwickeln wir ψ durch die Fourierreihe

$$u(1,\vartheta) = \varphi(\vartheta) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta),$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\vartheta) d\vartheta,$$

und für $k = 1, 2, \cdots$,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\vartheta) \cos k\vartheta d\vartheta, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\vartheta) \sin k\vartheta d\vartheta.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
u(r,\vartheta) &= a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k r^k \cos k\vartheta + b_k r^k \sin k\vartheta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\cos k\vartheta \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\eta) \cos k\eta d\eta + \sin \kappa\vartheta \int_{\mathbb{S}^1} \varphi(\eta) \sin k\eta d\eta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_{\mathcal{S}^1} \varphi(\eta) \cos(\vartheta - \eta) d\eta \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} K(r,\vartheta,\eta) \psi(\eta) d\eta,
\end{aligned}$$

mit

$$K(r,\vartheta,\eta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(\vartheta - \eta).$$

man kann Zeigen, dass K die Poissonkernel ist

$$K(r,\vartheta,\eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\vartheta - \eta) + r^2}$$

und die Lösungsformel die Poisson Integralformel für $n = 2$ ist. Sehen Sie Satz 3.13.

12.2. **Fouriertransformation.**

Definition 12.1 (Schwartz-Funktion)**.** Eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartz-Funktion*, wenn für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in N_0^n$ die Funktion $x^\alpha D^\beta f(x)$ beschränkt ist, wobei D^β die β-te Ableitung kennzeichnet.

$u(x) = e^{-|x|^2}$ is eine Schwartz-Funktion. Die Menge aller Schwartz-Funktion heißt Schwartz-Raum und wird mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (oder kurz $\mathcal{S}$) bezeichnet

Definition 12.2. Für jede $u \in \mathcal{S}$, die *Fourier-Transformierte* von u ist definiert durch

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wir bemerken, dass das Integral in der Definition beschränkt ist. Eigentlich gilt

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|dx.$$

Diese Ungleichung deutet hin, dass die Fourier-Transformation für $u \in L^1$ wohldefiniert ist. Aber wir werden hier nur die Fourier-Transformation für Schwartz-Funktionen untersuchen.

Zunächst, ist es trivial zu sehen, dass die Fourier-Transformation linear ist, d.h., für $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$ gilt

$$(c_1 u_1 + c_2 u_2)\hat{} = c_1 \hat{u} + c_2 \hat{u}_2.$$

Die folgendes Lemma zeigt die Wichtigkeit der Fourier-Transformation

Lemma 12.3. *Sei $u \in \mathcal{S}$. Dann ist $\hat{u}$ auch in $\mathcal{S}$. Weiter, für alle Multiindeces $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ gilt*

$$\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$$

und

$$\partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi) = (i)^{|\beta|} \widehat{x^\beta u}(\xi).$$

Beweis. Mit Gauss haben wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \partial^\alpha u(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx = (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi).
\end{aligned}$$

Mit parameterabhängigem Integral können wir leicht zeigen, dass $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \partial_\xi^\beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\beta e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx = (-i)^{|\beta|} \widehat{x^\beta u}(\xi).
\end{aligned}$$

Zu Zeigen $\hat{u} \in \mathcal{S}$, nehmen wir beliebige zwei Multi-Indizes α und β und zeigen $\xi^a \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi)$ beschränkt ist.

$$\begin{aligned}
\xi^a \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi) &= (-i)^{|\beta|} \xi^\alpha \widehat{x^\beta u}(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} (i\xi)^\alpha \widehat{x^\beta u}(\xi) \\
&= (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \partial_x^\alpha (x^\beta u(x))dx.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^a \partial_\xi^\beta \hat{u}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha (x^\beta u(x))|dx < \infty,$$

da $x^\beta u \in \mathcal{S}$.

$\square$

Lemma 12.4. *Sei $u \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}^n$, and $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gilt*

$$\widehat{u(\cdot - a)} = e^{-i\xi\cdot a}\hat{u}(\xi),$$

und

$$\widehat{u(k\,\cdot)}(\xi) = \frac{1}{|k|^n}\hat{u}\left(\frac{\xi}{k}\right)$$

Beweis. Mit der Substitutionsformel kann mann leicht zeigen. (Übung.) □

Für alle $u, v \in \mathcal{S}$ ist es leicht zu nachpüfen dass $u * v \in \mathcal{S}$, wobei $u * v$ die Faltung von u und v, die durch

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy$$

definiert ist.

Lemma 12.5. *Seien $u, v \in \mathcal{S}$. Es gilt*

$$\widehat{u * v}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi).$$

Beweis. Mit der Definition der Fourier-Transformation haben wir

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(u * v)(x)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy\right)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot\xi}u(x-y)e^{-iy\cdot\xi}v(y)dydx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}v(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot\xi}u(x-y)dx\right)dy \\
&= \hat{u}(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi}v(y)dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Erinnere das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}ds = \sqrt{\pi}.$$

Das folgende Hilfssatz spielt eine wichtige Rolle in diesem Abschnitt.

Hilfssatz 12.6. Sei $A > 0$ eine Konstante, u definiert durch

$$u(x) = e^{-A|x|^2}.$$

Es gilt

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2A)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4A}}.$$

Insbesondere, ist $A = \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\widehat{u}(\xi) = u(\xi).$$

Beweis. Nach Definition haben wir

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi - A|x|^2}dx = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_k\xi_k - Ax_k^2}dx_k.$$

Es ist hinreicht für jedes $\eta \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\eta - At^2}dt.$$

Nach Substitution mit $s = t\sqrt{A}$ haben wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\eta - At^2}dt &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\eta^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{A}+i\frac{\eta}{2\sqrt{A}})^2}dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{A}} e^{-\frac{\eta^2}{4A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+i\frac{\eta}{2\sqrt{A}})^2}ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{A}} e^{-\frac{\eta^2}{4A}} \int_L e^{-z^2}dz,\end{aligned}$$

wobei L die line $\operatorname{im} z = \frac{\eta}{2\sqrt{A}}$ in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ ist. Mit der Cauchy-Integralsatz und die Eigenschaft von u, die schnell fallend im Unendlichen ist, haben wir

$$\int_L e^{-z^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Daher gilt

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\eta - At^2}dt = \frac{1}{(2A)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\eta^2}{4A}}$$

und

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi - A|x|^2}dx = \frac{1}{(2A)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{4A}|\xi|^2}.$$

□

Nun können wir die Fourier Inversionsformel zeigen, die eine die wichtigste Resultate in der Theorie der Fourier-Transformationen ist.

Satz 12.7. *Sei $u \in \mathcal{S}$. Es gilt*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi. \tag{12.7}$$

Die rechte Seite von (12.7) ist die Fourier-Transformierte von $\hat{u}$ in $-x$, $\hat{\hat{u}}(-x)$.

Ein natürlicher Weg die Formel (12.7) zu zeigen ist: Mit dei Definition um die rechte Seite von (12.7) neu zu schreiben

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}e^{-iy\cdot\xi}u(y)dy\right)d\xi.$$

Aber als ein Integral über $(y,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist es nicht absolut konvergent. Das Tauchen zwischen die Integrale gilt nicht.

Beweis. Schritt 1. Setze

$$u_0 = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}.$$

Nach dem Hilfssatz 12.6 mit $A = \frac{1}{2}$ gilt es

$$\hat{u}_0(\xi) = e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}.$$

Da $u_0(x) = u_0(-x)$, haben wir gezeigt, dass (12.7) gilt für $u = u_0$.

Schritt 2. (12.7) gilt im Punkt $x = 0$ für $u \in \mathcal{S}$ mit $u(0) = 0$.

Sei $u \in \mathcal{S}$ mit $u(0) = 0$ beliebig. Wir behaupten, dass es $v_1, \cdots, v_n \in \mathcal{S}$ derart existieren, so dass

$$u(x) = \sum_{j=1}^n x_j v_j(x).$$

Zu zeigen benutzen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(u(tx))dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 u_{x_j}(tx)dt =: \sum_{j=1}^n x_j w_j(x).$$

Wähle eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi = 1$ in B_1, setze

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi(x)u(x) + (1-\varphi(x))u(x) \\ &= \sum_{J=1}^n x_j \underbrace{\left(\varphi(x)w_j(x) + \frac{x_j}{|x|^2}(1-\varphi(x))u(x)\right)}_{\in \mathcal{S}} \end{aligned}$$

und erhalte die Behauptung. Lemma 12.3 liefert nun

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{j=1}^n i\partial_{\xi_j}\hat{v}_j(\xi)$$

und $\hat{v}_j \in \mathcal{S}$. Es folgt

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n i\partial_{\xi_j}\hat{v}_j(\xi)d\xi = 0 = u(0).$$

D.h., (12.7) gilt im Punkt $x = 0$ für alle $u \in \mathcal{S}$ mit $u(0) = 0$.

Schritt 3. Sei $u \in \mathcal{S}$ beliebig. Wir zerlegen u zur

$$u = u(0)u_0 + (u - u(0)u_0)$$

und benutzen Schritt 1 für $u(0)u_0$ und Schritt 2 für $u - u(0)u_0$. Es folgt dass (12.7) gilt im Punkt $x = 0$ für alle $u \in \mathcal{S}$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wie betrachte $v(x) = u(x + x_0)$. Nach Lemma 12.4 gilt es

$$\hat{v}(\xi) = e^{ix_0\cdot\xi}\hat{u}(\xi).$$

Wir verwenden (12.7) an v im $x = 0$ und erhalten

$$u(x_0) = v(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix_0\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi,$$

(12.7) für u im $x = x_0$. □

Definition 12.8. Die *inverse Fourier-Transformierte* ist gegeben durch

$$\check{v}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}v(\xi)d\xi \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 12.7 besagt, dass

$$\check{\hat{u}} = u.$$

Es folgt auch $\check{u}(x) = \hat{u}(-x)$ und dass die Fourier-Transformation $u \mapsto \hat{u}$ eine Bijektion ist.

Für jede $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist das Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx.$$

Satz 12.9 (Plancherelformel)**.** *Seien $u, v \in \mathcal{S}$. Es gilt*

$$(u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (\hat{u}, \hat{v})_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{v}(\xi)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}u(x)dx\right)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{v}(\xi)e^{ix\cdot\xi}}d\xi\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\bar{v}(x)dx = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

□

Als Folgerung gilt

Korollar 12.10. *Sei $u \in \mathcal{S}$. Es gilt*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Die Fourier-Transformation ist eine Isometrie in $\mathcal{S}$.

12.3. **Anwendungen der Fouriertransformation.** Die Fouriertransformation ist besonders geeignet, um Lösungen fr̈ lineare PDGen mit konstanten Koeffizienten zu finden.

Beispiel 12.11 (Bessel-Potential)**.** Sei $f \in \mathcal{S}$. Wir betrachten die PDG

$$-\Delta u + u = f. \tag{12.8}$$

Führen wir für diese Gleichung die Fouriertransformation durch, so erhalten wir

$$(|\xi|^2 + 1)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Dies können wir sehr leicht nach û umstellen

$$\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\frac{1}{1+|\xi|^2}$$

und daraus die gesuchte Funktion u selbst erhalten:

$$u(x) = \check{\hat{u}}(x) = \left(\hat{f}(\cdot)\frac{1}{1+|\cdot|^2}\right)\check{}\,(x)$$

Wir suchen nun ein $B(x)$ derart, dass $\hat{B}(\xi) = \frac{1}{1+|\xi|^2}$ gilt, denn dann können wir u ohne Verwendung von Fouriertransformationen ausdrc̈ken als

$$u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f * B.$$

Hier haben wir Lemma 12.5 benutzt. Offenbar gilt

$$\frac{1}{1+|\xi|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+|\xi|^2)}dt,$$

also

$$\begin{aligned}
B(x) &= \left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)\check{}\,(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\int_0^\infty e^{-t(1+|\xi|^2)}dtd\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}e^{-t|\xi|^2}d\xi dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t}\left(e^{-t|\cdot|^2}\right)\check{}\,(x)dt \\
&= \int_0^\infty (2t)^{-\frac{n}{2}}e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}dt
\end{aligned}$$

Dieses B heißt Bessel-Potential. Zusammengefasst erhalten wir die Aussage, dass für Lösungen u von (12.8) gilt:

$$u(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n}{2}}e^{-t-\frac{|x-y|^2}{4t}}f(y)dydt.$$

Beispiel 12.12 (Wärmeleitungsgleichung)**.** Wir suchen Löungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\
u &= \varphi \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}.
\end{aligned}$$

Für die Lösungen u erhalten wir nach Fouriertransformation bzgl. x:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_t(\xi) + |\xi|^2\hat{u}(\xi) &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\
\hat{u} &= \hat{\varphi} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}.
\end{aligned}$$

Diese ODE erster Ordnung können wir lösen und wir erhalten

$$\hat{u}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi).$$

Es folgt mit der inversen Transformation

$$u(x) = \left(e^{-t|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)\right)\check{}\,(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(F * \varphi)(x),$$

wobei wir F “passend” wählen, so dass

$$F(x) = \left(e^{-t|\xi|^2}\right)\check{}\,(x) = (2t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Also bekommen wir die uns bereits bekannte Lösung

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)dy.$$

Beispiel 12.13 (Wellengleichung)**.** Für das Cauchyproblem der Wellengleichung können wir auch mit Fouriertransformation untersuchen:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(x,0) &= 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) &= \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(Übung.)

Beispiel 12.14 (Schrödinger-Gleichung)**.** Gegeben ist eine komplexwertige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. gesucht ist $u : C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty), \mathbb{C}) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty), \mathbb{C})$ eine Lösung von der Schödinger-Gleichung

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u &= 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(x,0) &= \varphi, & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{12.9}$$

Wie in Beispiel 12.12 erhalten wir für die Lösungen u:

$$\begin{aligned} i\hat{u}_t(\xi) + |\xi|^2\hat{u}(\xi) &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \\ \hat{u} &= \hat{\varphi} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir einen Trick, den oft in Physik benutzt wird. Wir sehen formal it als t in Beispiel 12.12 und erhalten

$$u(x,t) = (4\pi i t)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}}\varphi(y)dy,$$

wobei wir $i^{-\frac{1}{2}}$ als $e^{-\frac{\pi i}{4}}$ erklären. Für $\varphi \in \mathcal{S}$, $t > 0$ ist u wohldefiniert und $u \in \mathcal{S}$. Und man kann zeigen, dass u tatsächlich die Schrödinger-Gleichung $iu_t + \Delta u = 0$ löst. Ferner kann man nicht schwer zu zeigen

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Es folgt

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

(Übung.)

Gleichung (12.9) ist ein System: ($u = v^1 + iv^2$, $\varphi = \varphi^1 + i\varphi^2$)

$$\begin{cases} v^1_t + \Delta v^2 &= 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ v^2_t - \Delta v^1 &= 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ v^i(x,0) &= \varphi^i, & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

(12.9) ist nicht parabolisch, auch nicht hyperbolisch.

13. Die Energie-Methode

Wir schließen die Vorlesung mit der Energie-Methode, die wir in der Hausaufgaben haben schon ein Paar male getroffen haben. In diesem Kapitel geben wir mehr Beispiele.

Wir fingen von der einfachen Beispiel an, die schon als Aufgabe gestellt worden war. Wir betrachten das Dirichelt-Problem für die Laplace-Gleichung

Lemma 13.1. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein bestränktes C^1 Gebiet und $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$. Dann existiert es höchster eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$*

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= \varphi, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dieses Lemma ist deutlich schwacher als die Eindeutigkeit Theorem 2.14.

Beweis. Angenommen, u_1 und u_2 zwei Lösungen. Betrachten wir die Differenz $w = u_1 - u_2$. Die Funktion w erfüllt

$$\begin{cases} \Delta w &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ w &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beim Multiplizieren die Gleichung mit w und Integrieren erhalten wir

$$0 = \int_\Omega w \Delta w dx = -\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} dS = -\int_\Omega |\nabla w|^2 dx.$$

Es folgt $w = const$. Also $w = 0$. □

Nun brauchen die Poincaré-Ungleichung.

Lemma 13.2. *Poincaré-Ungleichung] Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein bestränktes C^1-Gebiet. Dann*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \operatorname{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

für all $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Beweis.

OBdA nehmen wir an, dass $\Omega \subset [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Da $u \in C_0^1(\Omega)$ ist, setzen wir u trivialerweise auf ganzem $\mathbb{R}^n$ fort. Für $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$ setze $x_a = (a, x_2, \cdots, x_n)$. Nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= |u(x) - u(x_a)|^2 = \left| \int_a^{x_1} \partial_{x_1} u(s, x_2, \cdots, x_n) \right|^2 \\ &\leq (b-a) \int_a^b |\partial_{x_1} u(s, x_2, \cdots, x_n)|^2 \\ &\leq (b-a) \int_a^b |\nabla u(s, x_2, \cdots, x_n)|^2. \end{aligned}$$

Integriere erste über x_1 und dann über die Reste

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \quad \leq \quad |(b-a)| \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

□

1. Nun betrachten wir das homogene Dirichlet Problem

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{13.1}$$

Satz 13.3. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein bestränktes C^1-Gebiet und $f \in C(\overline{\Omega})$. Ferner ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (13.1). Dann es gilt*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei $C = C(\Omega) > 0$ eine nur von Ω abhängte Konstante ist.

Beweis. Multipliziere (13.1) mit u

$$uf = u\Delta u = \sum_{i=1}(uu_{x_i})_{x_i} - |\nabla u|^2.$$

Integriere die Formel und benutze dem Gaussschen Integralsatz

$$\int_\Omega uf dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Mit der Bedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ haben wir

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega uf.$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung liefert

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^2 = \left(\int_\Omega uf\right)^2 \le \int_\Omega u^2 \int_\Omega f^2.$$

Nun benutzen wir die Poincaré-Ungleichung (Lemma 13.2) und erhalten

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^2 \le \operatorname{diam}^2(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 \int_\Omega f^2,$$

bwz.

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \le \operatorname{diam}^2(\Omega) \int_\Omega f^2.$$

Wir benutzen nach mal die Poincaré-Ungleichung

$$\int_\Omega u^2 \le \operatorname{diam}^2(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 \le \operatorname{diam}^4(\Omega) \int_\Omega f^2.$$

□

2. Wir betrachten nun das Anfangsrandwerte-Problem von der Wärmeleitungsgleichung. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $f \in C(\overline{\Omega})$.

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(\cdot, 0) &= \varphi && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{aligned} \tag{13.2}$$

Satz 13.4. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $f \in C(\overline{\Omega}) \times (0,\infty)$ und $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Sei $u \in C^2(\Omega \times (0,\infty)) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ eine Lösung von (13.2). Dann gilt es*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \quad \textit{für alle } t > 0.$$

Als direkte Folgerung haben wir die Stetigkeit der Abhängkeit von der Randbedingung bzw. Anfangsbedingung:

Korollar 13.5. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $f_i \in C(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ und $\varphi_i \in C(\overline{\Omega})$ für $i = 1, 2$. Sei $u_i \in C^2(\Omega \times (0,\infty)) \cap C^1(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ eine Lösung von (13.2) bzgl. f_i und φ_i für $i = 1, 2$. Dann gilt es*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f_1(s) - f_2(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \quad \textit{für alle } t > 0.$$

Beweis von Satz 13.4. Erste haben wir

$$uu_t - u\Delta u = \frac{1}{2}(u)_t^2 - \sum_{i=1}(uu_{x_i})_{x_i} + |\nabla u|^2.$$

Mit dem Integralsatz und der Randbedingung $u(\cdot,t)=0$ auf $\partial\Omega$ haben wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t)dx+\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx=\int_\Omega f(t)u(t)dx,$$

wobei wir $u(\cdot,t)$ mit $u(t)$ bezeichnet haben. Integration in t liefert

$$\int_\Omega u^2(t)dx+2\int_0^t\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dxds=\int_\Omega\varphi^2(t)dx+2\int_0^t\int_\Omega f(t)u(t)dxds.$$

Setze

$$E(t)=\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wir haben

$$E(t)^2+2\int_0^t\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dxds=E(0)^2+2\int_0^t\int_\Omega f(t)u(t)dxds.$$

Die Differentiation bzgl t liefert

$$\begin{aligned}2E(t)E'(t)&\le 2E(t)E'(t)+2\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx\\&=2\int_\Omega f(t)u(t)dx\\&\le 2\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\\&=2\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}E(t).\end{aligned}$$

Also

$$E'(t)\le\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Integrieren von 0 bis t gibt uns die gewünschte Abschätzung. □

3. Wir betrachten nun das Anfangsrandwerte-Problem von der Wellengleichung. Sei $\Omega\in\mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet, $f\in C(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$, $\varphi\in C^1(\overline{\Omega})$ und $\psi\in C(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned}u_{tt}-\Delta u&=f&&\text{in }\Omega\times(0,\infty),\\u(\cdot,0)&=\varphi&&\text{in }\Omega\\u_t(\cdot,0)&=\psi&&\text{in }\Omega\\u&=0&&\text{auf }\partial\Omega\times(0,\infty).\end{aligned}\tag{13.3}$$

Satz 13.6. *Sei $\Omega\in\mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet, $f\in C(\overline{\Omega})\times(0,\infty)$, $\varphi\in C^1(\overline{\Omega})$ und $\psi\in C(\overline{\Omega})$ Sei $u\in C^2(\Omega\times(0,\infty))\cap C^1(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$ eine Lösung von (13.3). Dann gilt es*

$$\begin{aligned}\Big(\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_x u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac12}&\le\Big(\|u_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_x u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac12}+\int_0^t\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}ds\\&=\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_x\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac12}+\int_0^t\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}ds,\end{aligned}$$

und

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\le\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+t\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac12}+\int_0^t(t-s)\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $t>0$.

Wie Korollar 13.5 haben wir offensichtlich auch die Stetigkeit der Abhängkeit von der Randbedingung bzw. Anfangsbedingung.

Beweis von Satz 13.6. Multiplizieren die Gleichung mit u_t haben wir

$$fu_t=u_tu_{tt}-u_t\Delta u=\frac{1}{2}(u_t^2+|\nabla_x u|^2)_t-\sum_{i=1}(u_tu_{x_i})_{x_i}.$$

Nach dem Integralsatz erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(t)u_t(t)dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(u_t^2(t)+|\nabla_x u|^2\right)dx - \int_{\partial\Omega} u_t(t)\frac{\partial u}{\partial \nu}(t)dS \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(u_t^2(t)+|\nabla_x u|^2\right)dx,\end{aligned}$$

da aus der Randbedingung $u_t(x,t)=0$ gilt für alle $x\in\partial\Omega$, $t>0$.

Definiere die Energie durch

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_t^2(t)+|\nabla_x u|^2\right)dx.$$

Falls $f=0$, d.h., die Gleichung homogen ist, dann gilt es

$$\frac{d}{dt}E(t)=0.$$

Es folgt

$$E(t)=E(0)=\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\psi^2+|\nabla_x\varphi|^2\right)dx.$$

Das ist das *Erhaltungsgesetz* der homogenen Wellengleichung. Im Allgemein haben wir

$$E(t)=E(0)+2\int_0^t\int_\Omega f(s)u_t(s)dxds.$$

Setze

$$J(t)=E^{\frac{1}{2}}(t).$$

Dann gilt

$$J^2(t)=J^2(0)+2\int_0^t\int_\Omega f(s)u_t(s)dxds.$$

Nach der Differentiation und CSU haben wir

$$\begin{aligned}2J(t)J'(t) &= 2\int_\Omega f(t)u_t(t)dx \\ &\le 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le 2J(t)\|f\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

da $J(t)\ge\|u_t\|_{L^2(\Omega)}$. Es folgt

$$J'(t)\le\|f(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

bzw.

$$J(t)\le J(0)+\int_0^t\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}ds.$$

Das ist die gewünschte Abschätzung für die Energie.

Nun zeigen wir die gewünschte Abschätzung für L^2-Norm von u. Setze

$$F(t)=\|u(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

d.h.,

$$F^2(t)=\int_\Omega u^2(t)dx.$$

Ein leichte Berechnung liefert

$$\begin{aligned}2F(t)F'(t) &= 2\int_\Omega u(t)u_t(t)dx \\ &\le 2\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= 2F(t)\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Also

$$F'(t)\le\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}\le J(0)+\int_0^t\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}ds.$$

Integrieren liefert

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + tJ(0) + \int_0^t \int_0^\tau \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} ds d\tau \\
&= \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + tJ(0) + \int_0^t \int_s^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} d\tau ds \quad \text{(Fubini!)} \\
&= \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + tJ(0) + \int_0^t (t-s)\|f(s)\|_{L^2(\Omega)} ds
\end{aligned}
$$

□

14. Halbgruppen

Für die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \tag{14.1}$$

haben wir in Bemerkung 6.7 (ii) die *Wärmeleitungshalbgruppe* definiert, indem wir für $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ und $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ setzen:

$$e^{t\Delta}\varphi(x) := u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x-y,t)\varphi(y)dy. \tag{14.2}$$

Zum Begriff "Halbgrupp": Das bedeutet, dass

$$\forall t, s \geq 0 : e^{(t+s)\Delta}\varphi = e^{t\Delta}(e^{s\Delta}\varphi); \quad e^{(t+s)\Delta} = e^{t\Delta} \circ e^{s\Delta}.$$

Wir notieren (14.2) als

$$u = e^{t\Delta}u(0).$$

Frage: *Gibt Es eine ähnliche Beziehung, wenn wir statt Δ eine lineare Operator L betrachten?*

Genauer: Sei X ein Banachraum und sei

$$A : D(A) \subset X \to X$$

ein linearer Operator, wobei $D(A)$ die Definitionsbereich von A ist, der ein linearer (meistens dichter) Unterraum von X ist. Sei $\varphi \in X$. Wir suchen Lösungen $u \in C^1((0,T), X)$ von

$$\begin{aligned} u' &= Au, \qquad t \in (0,T) \\ u(0) &= \varphi. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Im Allgemeinen ist A unbeschränkt.

($A \Rightarrow T$) Angenommen: $\forall \varphi \in X$, gibt es eine eindeutige Lösung $u(t)$ von (14.1) mit $T = \infty$. Definiere ein Operator für t durch

$$T(t)\varphi := u(t).$$

Dann besitzt T folgende Eigenschaften:
- $T(t) : X \to X$ ist linear
- $T : [0,\infty) \to L(X)$,
- $T(0) = id$
- $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$
- $t \mapsto T(t)\varphi$ ist stetig.

wobei $L(X)$ der Raum aller beschränkten Operatoren. Ein Operator A ist beschränkt genau dann, wenn dir Operatornorm

$$\|A\| := \sup_{u \in D(A), \|u\| \leq 1} \|Au\| < \infty$$

Die letzte 3 Eigenschaften sind die Charakterisierung der Halbgruppe, die wir spät genauer untersuchen werden.

($T \Rightarrow A$) Angenommen haben wir eine Halbgruppe

$$T : [0,\infty) \times X \to X,$$

wir oben. Wir definieren ein Operator A so, dass T die Halbgruppe von A ist. Definiere

$$Au := \lim_{s \to 0} \frac{T(s) - T(0)}{s} u$$

und

$$D(A) := \left\{ u \in X \mid \lim_{s \to 0} \frac{T(s) - T(0)}{s} u \text{ existiert} \right\}.$$

A heißt *infinitesimaler Erzeuger (kurz Erzeuger, generator auf Eng.)* von T. Setze

$$u(t) := T(t)\varphi.$$

Dann ist $u(t)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u' &= Au, \qquad t \in (0,T) \\ u(0) &= \varphi. \end{aligned}$$

Beweis. $u(0) = T(0)\varphi = \varphi$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} u'(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{u(s+t)-u(t)}{s} 0 = \lim_{s\to 0} \frac{T(s+t)\varphi - T(t)\varphi}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{T(s)-T(0)}{s} u(t) = Au(t). \end{aligned}$$

Frage: *Weiche Erzeuger A besitzen eine Halbgruppe? Welche Erzeuger werden von Halbgruppen generieren?*

Wir werden in diesem Kapital die Frage antworten.

14.1. **Dissipativer Operatoren.** Sei X ein Banachraum. Gegeben ist ein Operator $A : D(A) \subset\rightarrow X$. Gesucht ist eine Lösung von

$$\begin{aligned} u' &= Au, \qquad t \in (0,T) \\ u(0) &= \varphi \in X. \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir den Fall: A ist beschränkt.

a1) $X = \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$), $A : X \to X$ linear (und dann beschränkt). In diesem Fall ist

$$u(t) := e^{tA}\varphi$$

die gesuchte eindeutige Lösung, wobei durch

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k \tag{14.4}$$

gegeben ist.

a2) X Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein beschränkter linear Operator. Für ein beschränkter linear Operator definieren wir e^A wie in (14.5) durch

$$e^{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{14.5}$$

Man kann leicht zeigen, dass die folgende Eigenschaften gelten:

Lemma 14.1. *Seine $A, B \in L(X)$, dann gilt:*

- *e^A konvergiert absolut.*
- *$e^0 = id$.*
- *$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.*
- *$e^{-A} = (e^A)^{-1}$.*

Satz 14.2. *Seine $A \in L(X)$, varphi $\in X$ und $T < 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^1((0,T), X)$ von*

$$\begin{aligned} u' &= Au, \qquad t \in (0,T) \\ u(0) &= \varphi \in X. \end{aligned}$$

Proof. Setze $u(t) = e^{tA}\varphi$. Dann gilt
$$u'(t) = Ae^{tA}\varphi = Au(t).$$
Falls v eine zweite Lösung ist, setze
$$w(t) = e^{-tA}v(t).$$
Dann gilt
$$w'(t) = -Ae^{tA}v(t) + e^{-tA}Av = 0,$$
also w ist konstant: $w(t) = w(0) = 0$. Es liefert $v(t) = e^{tA}\varphi$.

□

Nun untersucht den Fall: A ist unbeschränkt.

Beispiel 14.3.
- $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $A = \Delta$, $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Δ ist unbeschränkt.
- $X = C^0([0,1])$, $D(A) = X$
$$Au(x) := \int K(x,y)u(y)dy,$$
wobri $K \in C^0([0,1] \times [0,1])$. A ist beschränkt, denn:
$$\|Au\|_{C^0} \leq \int_0^1 |K(x,y)|dy\, \|u\|_{C^0} \leq c\|u\|_{C^0}.$$

Wir brauchen Begriffe aus FA. Der Graph von A ist gegeben durch
$$G(A) := \{(u, Au) \subset X \times X \mid u \in D(A)\}.$$
$R(A)$ ist das Bild von A, d.h. $R(A) = \{Au \mid u \in D(A)\}$. A heißt abgeschlossen, falls $G(A)$ abgeschlossen ist.

Satz 14.4 (Satz von abgeschlossenen Graphen)**.** *Sei $A : X \to X$ linear. Dann ist A genau dann beschränkt, wenn A abgeschlossen ist.*

Definition 14.5. Sei X Banachraum und sei $A : D(A) \to x$ linear. A heißt dissipativ, falls
$$\|u - \lambda Au\| \geq \|u\|, \quad \forall u \in D(A), \forall \lambda > 0.$$
A heißt akkretiv, falls $-A$ dissipativ ist.

Lemma 14.6. *Sei X ein Hilbertraum und $A : D(A) \to X$ linear. Dann ist A genau dann dissipative, wenn*
$$\Re\langle u, Au\rangle \leq 0, \quad \forall u \in D(A).$$

Beispiele 14.7.
- $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $A = \Delta$ unf $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$.
$$\langle u, \Delta u\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \leq 0.$$
- $X = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $A = \pm i\Delta$ und $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
$$\langle u, \pm i\Delta u\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} u\overline{(\pm i\Delta u)} = \pm i\int |\nabla u|^2.$$

Beide Operatoren sind dissipativ.

Beweis von Lemma 14.6. Sei A dissipativ. Dann gilt für alle $\lambda > 0$
$$\|u\|^2 + \lambda^2\|Au\|^2 - 2\lambda\Re\langle u, Au\rangle - \|u\|^2 = \|u - \lambda Au\|^2 - \|u\|^2 \geq 0,$$
also
$$\lambda\|Au\|^2 - 2\Re\langle u, Au\rangle \geq 0.$$
Lassen $\lambda \to 0$ liefert das Resultat.

Umgekehrt gilt
$$\|u - \lambda Au\| - \|u\| = \|u\|^2 + \lambda^2\|Au\|^2 - 2\lambda\Re\langle u, Au\rangle - \|u\|^2 \geq 0.$$

□

Definition 14.8 (m-dissipativ)**.** Ein linear Operator $A : D(A) \subset X \to X$ heißt m-dissipativ, falls A dissipativ ist und falls $I - \lambda A$ für all $\lambda > 0$ surjektiv ist.

Ziel. Für alle m-dissipative Operatoren A definieren wir e^A.

Wenn $I - \lambda A$ surjektiv ist, ist $I - \lambda A$ stetig invertierbar. In diesem Fall setzen wir

$$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1} : X \to D(A).$$

Dann gilt

$$\|J_\lambda v\| \leq \|v\|, \quad \forall v \in X,$$

d.h.,

$$\|J_\lambda\| \leq 1.$$

Lemma 14.9. *Sei A dissipativ. Dann ist A genau dann m-dissipativ, wenn es ein $\lambda_0 > 0$ so gibt, dass $I - \lambda_0 I$ surjektiv ist.*

Beweis. Für alle $\lambda > 0$ und $v \in X$ sollen wir eine Lösung von $u - \lambda A u = v$ finden. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} u - \lambda_0 A u &= \frac{\lambda_0}{\lambda}(u - \lambda A u) + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u \\ &= \frac{\lambda_0}{\lambda} v + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u. \end{aligned}$$

Da $I - \lambda_0 A$ surjektiv ist, ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$u = J_{\lambda_0}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} v + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u\right) := F(u).$$

Wir zeigen, dass F eine Kontaktion ist, für $\lambda < 2\lambda_0$.

$$\|F(u) - F(w)\| = \|J_{\lambda_0}((1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})(u - w)\| \leq |1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}| \|u - w\|, \quad \forall u, w \in X.$$

Also F ist eine Kontraktion für $\lambda < 2\lambda_0$. Es folgt, dass $I - \lambda A$ is injektiv für $\lambda < 2\lambda_0$, und dann für alle $\lambda > 0$ durch Iteration. ☐

Proposition 14.10. *Alle m-dissipative Operatoren sind abgeschlossen.*

Proof. Beweis Da J_1 existiert und stetig ist, ist $I - A$ abgeschlossen, also A auch. ☐

Beispiel 14.11. $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $A = \Delta$ und $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist A m-dissipativ. Nach Proposition 14.10 brauchen wir nun

$$\forall v \in L^2, \exists u \in H^2 \text{ mit } u - \Delta u = v$$

zu zeigen.

Sei $\hat{u}$ die Fouriertransformierte von u. Wir lösen erste die Gleichung

$$\hat{u}(\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi)$$

mit

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{+ |\xi|^2}\hat{v}(\xi).$$

Da $\hat{u} \in L^2$ und

$$\xi^1 \xi^2 \hat{u}(\xi) = \frac{\xi^1 \xi^2}{1 + |\xi|^2}\hat{v}(\xi) \in L^2,$$

$u, \nabla u \in L^2$. (Diese haben wir in der Vorlesung nicht gemacht.) Diese Beispiel zeigt auch, dass H^2 richtiger Raum ist. C^∞ ist nicht.

Proposition 14.12. *Sei A m-dissipativ, dann gilt*

$$\forall u \in \overline{D(A)} : \quad \|J_\lambda u - u\| \to 0, \text{ als } \lambda \to 0.$$

Beweis. Es ist leicht zu sehen

$$\|J_\lambda - I\| \le \|J_\lambda\| + \|I\| \le 2,$$

also J_λ ist beschränkt. Daraus reicht es das Resultat für $u \in D(A)$ zu zeigen.

$$\|J_\lambda u - u\| = \|J_\lambda(u - (I - J_\lambda)u)\| = \lambda\|Au\| \to 0, \quad \lambda \to 0.$$

□

Setze

$$A_\lambda := AJ_\lambda = \frac{1}{\lambda}(J_\lambda - I).$$

A_λ ist stetig. Die Idee: Wir approximieren A durch A_λ.

Proposition 14.13. *Sei A ein dichter, m-dissipativer Operator. Dann gilt*

$$A_\lambda u \to Au, \ \textit{als}\ \lambda \to 0, \quad \forall u \in D(A).$$

Beiwei. Nach Proposition 14.12 gilt

$$J_\lambda Au \to Au,$$

da $D(A)$ dicht ist. Weiter haben wir

$$(I - \lambda A)A = A(I - \lambda A).$$

Es folgt

$$A_\lambda = AJ_\lambda = J_\lambda(I - \lambda A)AJ_\lambda = J_\lambda A(I - \lambda A)J_\lambda = J_\lambda A.$$

□

14.2. **Theorie der Halbgruppen.**

Definition 14.14. Sei X Banachraum, Eine Halbgruppe ist ein Operator

$$T : [0, \infty) \to L(X)$$

mit folgender Eigenschaften

(i) $T(0) = I$.
(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$.

T heißt C^0-Halbgruppe, falls zusätzlich gilt

(iii) $\lim_{t\to 0} \|T(t)u - u\| = 0, \forall u \in X$.

Beispiele 14.15. (1) $A \in L(X)$, $T(t) = e^{tA}$.

(2) $X = L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty]$.

$$T(t)u(x) = u(t + x).$$

a) $p < \infty$. Dann ist $T(t)$ eine C^0-Halbgruppe. Da C_c^∞ dicht in L^p ist , existiert für alle $u \in L^p$ und $\varepsilon > 0$ eine $f \in C_c^\infty$ mit

$$\|f - u\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für alle kleine t haben wir

$$\sup_x |f(x + t) - f(x)| \le t\|\nabla f\|_{L^\infty} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also haben wir

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |T(t)f - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\varepsilon}{3}(\text{diam (supp } f) + 1)$$

und

$$\begin{aligned} \|T(t)u - u\|_{L^p} &= \|T(t)f - f\|_{L^p} + \|T(t)(u - f)\|_{L^p} + \|u - f\|_{L^p} \\ &\le \|T(t)f - f|_{L^p} + 2\frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

b) $p = \infty$. Dann ist $T(t)$ keine C^0-Halbgruppe. Setze $u = \chi_{[0,1]}$. Dann

$$\|T(t)u - u\|_{L^\infty} = \sup_x |u(x + t) - u| = 1, \quad \forall t > 0.$$

Proposition 14.16. *Sei $T(t)$ eine C^0-Halbgruppe. Dann existieren $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass*
$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$
gilt.

Beweis. Zunächst zeigen wir dass eine $\delta > 0$ so gibt, dass
$$\sup_{0<t<\delta} \|T(t)\| < \infty.$$
Angenommen dass das falsch ist, existiert eine Folge $t_n \to 0$ mit $\|T(t_n)\| \to \infty$. Erinnerung: Der Satz von Banach-Steinhaus (Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) besagt: Falls für eine Folge $A_n \in L(X)$
$$\forall u \in X : \sup_n \|A_n u\| < \infty$$
gilt, dann gilt $\sup_n \|A_n\| < \infty$. Also in unserem Fall existiert $u \in X$ mit $\|T(t_n)u\| \to \infty$. Ein Widerspruch zu die Stetigkeit von $T(0)$.

Sei $t > 0$ beliebig. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$ und $s \in (0, \delta)$ mit
$$t = n\delta + s.$$
Da
$$T(t) = T(\delta) \circ T(\delta) \circ T(s),$$
gilt
$$\|T(t)\| \leq \|T(\delta)\|^n \|T(s)\| \leq M^{n+1} \leq MM^{\frac{t}{\delta}} = Me^{t\frac{1}{\delta}\log M},$$
mit
$$\omega = \frac{1}{\delta}\log M.$$
□

Proposition 14.17. *Sei $T(t)$ eine C^0-Halbgruppe. Dann ist die Abbildung*
$$(t, u) \mapsto T(t)u$$
stetig.

Beweis.
$$\begin{aligned} \|T(t)u - T(s)w\| &\leq \|T(t)u - T(t)w\| + \|T(t)w - T(s)w\| \\ &= \|T(t)(u - w)\| + \|(T(t) - T(s))w\| \end{aligned}$$
□

Definition 14.18. Sei $T(t)$ eine C^0-Halbgruppe. Wir nennen
$$\omega_0 := \inf\{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists M \geq 1, \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\}$$
die (exponentielle) Wachstumsschranke der Halbgruppe.

Definition 14.19. Sei $T(t)$ eine C^0-Halbgruppe. $T(t)$ heißt eine Kontraktionshalbgruppe, falls
$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t > 0.$$

Zur Erinnerung:
$$\|J_\lambda\| \leq 1, \quad \|A_\lambda\| \leq \frac{2}{\lambda}.$$
Da A_λ beschränkt ist, setzen wir
$$T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}.$$
T_λ ist eine C^0-Halbgruppe. Weiter gilt
$$\|T_\lambda(t)\| = \|e^{\frac{t}{\lambda}J_\lambda - \frac{t}{\lambda}I}\| = e^{-\frac{t}{\lambda}}\|e^{\frac{t}{\lambda}J_\lambda}\| \leq e^{-\frac{t}{\lambda}}e^{\frac{t}{\lambda}} = 1,$$
Also T_λ ist eine C^0 Kontraktionshalbgruppe.

Lemma 14.20. *Seien B und C beschränkte linear Operatoren auf X, so dass $BC = CB$, $\|e^{tB}\| \leq 1$ und $\|e^{tC}\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt*

$$\|(e^{tB} - e^{tC})u\| \leq t\|(B - C)u\|$$

für jedes $u \in X$ und $t \geq 0$.

Bewies. Aus Lemma 14.1 und der Kommutivität von B und C folgt

$$\begin{aligned} e^{tB}u - e^{tC}u &= \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{sB}e^{(t-s)C}u)ds \\ &= \int_0^t e^{sB}(B - C)e^{(t-s)C}uds \\ &= \int_0^t e^{sB}e^{(t-s)C}(B - C)uds. \end{aligned}$$

Ziehen wir die Norm ins Integral, folgt die Behauptung. □

Satz 14.21 (Hille-Yoshida)**.** *Sei $A : D(A) \subset X \to X$ ein m-dissipativer dichter Operator. Dann $\forall u \in X$ existiert*

$$T(t)u = \lim_{\lambda \to 0} T_\lambda(t)u$$

und ist die Konvergenz gleichmäßig auf $[0, T]$, $\forall T \in (0, \infty)$. Weiter ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C^0 Kontraktionshalbgruppe und ist für alle $u \in D(A)$

$$u(t) := T(t)u$$

die eindeutige Lösung $u \in C^0([0, \infty), D(A)) \cap C^1((0, \infty), X)$ von

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \qquad t \in (0, \infty) \\ u(0) &= u. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Beweis. Nach Lemma 14.20 gilt

$$\|T_\lambda(t)u - T_\nu(t)u\| \leq t\|(A_\lambda - A_\nu)u\| \to 0, \quad |\lambda - \nu| \to 0$$

gleichmäßig auf einem beschränktem Intervall. Also das Limit existiert, für alle $u \in D(A)$.

Sei $u \in X$ beliebig. Da A dicht ist, existiert eine Folge $u_u \in D(A)$ mit $u_n \to u$

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(t)u - T(t)u\| &\leq \|T_\lambda(t)u - T_\lambda(t)u_n\| + \|T_\lambda(t)u_n - T(t)u_n\| + \|T_\lambda(t)u_n - T(t)u\| \\ &\leq 2\|u_n - u\| + \|T_\lambda(t)u_n - T(t)u_n\| \end{aligned}$$

Also $T_\lambda(t)u \to T(t)u$, $\forall u \in X$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|T(t)T(s)u - T(t + s)u\| &\leq \|T(t)T(s)u - T(t)T_\lambda(s)u\| + \|T(t)T_\lambda(s)u - T_\lambda(t)T_\lambda(s)u\| + \\ &\quad \|T_\lambda(t + s)u - T(t + s)u\| \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Es liefert $T(t)T(s) = T(t + s)$. Nun zeigen wir, dass

$$u(t) = T(t)u$$

eine Lösung von (14.6) ist. Sei $u \in D(A)$ und setze

$$u_\lambda := e^{tA_\lambda}u.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}u_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}A_\lambda u = T_\lambda(t)A_\lambda u,$$

bzw.

$$u_\lambda(t) = u + \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda uds.$$

Es folgt

$$u(t) = u + \int_0^t T(s)Auds.$$

Also haben wir $u \in C^1$ und

$$u'(t) = T(t)Au = Au(t).$$

Die Eindeutigkeit folgt wie in Satz 14.2. □

Sei T eine Kontraktionsgruppe. Wir definieren

$$D(L) := \left\{ u \in X \mid \lim_{s\to 0} \frac{T(s)u - u}{s} \text{ existiert} \right\}.$$

For $u \in D(L)$ setze

$$Lu := \lim_{s\to 0} \frac{T(s)u - u}{s}.$$

Beispiel 14.22. Sei $X = C_{ub}(\mathbb{R})$ die Menge aller gleichmäßig stetiger und beschränkter Funktionen mit der L^∞ Norm.

$$T(t)u(x) := u(x+t).$$

Dann ist $T(t)$ eine Kontraktionshalbgruppe. Weiter gilt

$$Lu = u'(t), \quad D(L) = \{u \mid u, u' \in C_{ub}(\mathbb{R})\}$$

Beweis. Es ist klar dass $T(t)$ eine Kontraktionsgruppe ist. Es ist auch klar, dass für alle $u \in D(L)$

$$\|\frac{u(\cdot + h) - u(x)}{h} - u'(\cdot)\|_{L^\infty} \to 0$$

gilt. Also $\forall u \in D(L)$ gilt

$$Lu = u'_+ = u' \in C_{ub}(\mathbb{R}).$$

□

Satz 14.23 (Hille-Yosida)**.** *Sei T eine Kontraktionsgruppe mit Erzeuger L. Dann ist L m-dissipativ und dicht definiert.*

Beweis. (i) L is dissipativ, d.h., $\forall \lambda$, $\forall u \in D(L)$, $\|u - \lambda Lu\| \geq \|u\|$.

$$\begin{aligned}
\|u - \lambda \frac{T(h)u - u}{h}\| &= \|(1 + \frac{\lambda}{h})u - \frac{\lambda}{h}T(h)u\| \\
&\geq \|(1 + \frac{\lambda}{h})u\| - \|\frac{\lambda}{h}T(h)u\| \\
&= (1 + \frac{\lambda}{h})\|u\| - \frac{\lambda}{h}\|T(h)u\| \\
&\geq (1 + \frac{\lambda}{h})\|u\| - \frac{\lambda}{h}\|u = \|u\|,
\end{aligned}$$

denn T eine Kontraktionsgruppe ist. Lassen $h \to 0$ liefert den Beweis von der Dissipativität.

(ii) L is m -dissipative. Es reicht zu zeigen, dass $I - L$ surjektiv ist. For jesdes u werden wir Ju finden mit

$$(I - L)Ju = u.$$

Setze

$$Ju := \int_0^\infty e^{-t}T(t)udt.$$

Es gilt

$$\|Ju\| \leq \int_0^\infty e^{-t}\|T(t)u\|dt \leq \|u\|,$$

bzw,

$$\|J\| \leq 1.$$

Wir zeigen dass,

$$(I-L)Ju = u.$$

$$\begin{aligned}
(T(h)-I)Ju &= = \int_0^\infty e^{-t}T(t+h)udt - \int_0^\infty e^{-t}T(t)udt \\
&= \int_h^\infty e^{-t+h}T(t)udt - \int_0^\infty e^{-t}T(t)udt \\
&= \int_0^\infty (e^{-t+h}-e^{-t})T(t)udt - \int_0^h e^{-t+h}T(t)udt \\
&= (e^h-1)\int_0^\infty e^{-t}T(t)udt - e^h\int_0^h e^{-t}T(t)udt
\end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\frac{T(h)-I}{h}Ju = \frac{e^h-1}{h}Ju - \frac{e^h}{h}\int_0^h e^{-t}T(t)udt.$$

Aslo $Ju \in D(L)$ und

$$LJu = Ju - u.$$

(iii) $D(L)$ ist dicht. Für beliebige $u \in X$ setze

$$u_h = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)uds.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|u_h - u\| &= \|\frac{1}{h}\int_0^h (T(s)-I)uds\| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|(T(s)-I)u\|ds \to 0.
\end{aligned}$$

Wir zeigen dass $u_h \in D(L)$ für alle $h>0$. Für $t<h$

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)-I}{t}u_h &= \frac{1}{th}\int_t^{h+t} T(s)uds - \frac{1}{ht}\int_0^h T(s)uds \\
&= \frac{1}{th}\int_h^{h+t} T(s)uds + \frac{1}{th}\int_t^h T(s)uds \\
&\quad -\frac{1}{ht}\int_0^t T(s)uds - \frac{1}{ht}\int_t^h T(s)uds \\
&\to \frac{1}{h}T(h)u - \frac{1}{h}T(0)u \in X,
\end{aligned}$$

bzw, das Limits von der linken Seite existiert, also $u_h \in D(L)$. □