0. Vorab: Der euklidische Raum

In dieser Vorlesung geht es (hauptsächlich) um differenziebare Kurven und Flächen im $(\mathbb{R}^n, d)$, wobei zumeist $n = 3$ oder $n = 2$. Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den Vektoreraum aller Spaltenvektoren mit n reellen Einträgen,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, \cdots, x^n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Für einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$V^\perp := \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall\, y \in V\}$$

das orthogonale Komplement.

Das Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ -x^1y^3 + x^3y^1 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{pmatrix}.$$

Das euklidische Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ wird mit spitzen Klammern geschrieben,

$$x \cdot y = \langle (x^1, \cdots, x^n)^t, (y^1 \cdots, y^n)^t\rangle = \sum_{j=1}^n x^j y^j.$$

Die euklidische Norm (bzw. der Abstand) ist gegeben durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

(bzw.

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Mit diesem Abstand ist $\mathbb{R}^n$ metrischer Raum. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heiß Isometire, fass F injektiv und surjektive ist und gilt:

$$d(F(x), F(x)) = d(x, y), \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Man kann zeigen, dass die Menge der Isometrien vom $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe ist. Man nennt die Gruppe die Isometriegruppe.

Theorem 0.1 (Isometriegruppe von $\mathbb{R}^n$)**.** *Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ sind die Abbildungen der From*

$$F(x) = Sx + a \qquad \textit{mit } S \in \mathbb{O}(n) \textit{ und } a \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Abbildungen nennt man auch eukldische Bewegungen (rigid motion auf Englisch).

Proof. Es ist leicht zu sehen, dass jede solche Abbildung isometrisch und surjektiv ist. Sei umgekehrt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie, zunächst mit $F(0) = 0$. Dann folgt

$$|F(x)| = |x|.$$

Mit der Polarisationsformel schließ wir,

$$\begin{aligned}\langle F(x), F(y)\rangle &= -\frac{1}{2}(|F(x)-F(y)|^2 - |F(x)|^2 - |F(y)|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(|x-y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Ist $e_1, \cdots, e_n$ die Standardbasis, so folgt

$$\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{1}$$

d.h., $F(e_1), \cdots, F(e_n)$ ist wieder eine Orthonormalbasis, und es folgt für $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \langle F(x), F(e_i)\rangle F(e_i) = \sum_{i=1}^n x^i F(e_i).$$

Somit ist F eine lineare Abbildung. Mit (1) ist $F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$.

Sei schließlich $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie mit $F(0) = a \in \mathbb{R}^n$. Mit $\tau_{-a}(x) = x - a$ folgt dann $\tau_{-a} \circ F(0) = 0$, also $\tau_{-a} \circ F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$, bzw, $F(x) = Sx + a$.

■

Remark 0.2. Für eine Isometrie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Darstellung $F(x) = Sx + a$ eindeutig bestimmt, denn es gilt $a = F(0)$ und $S = DF(0)$ (sogar $S = DF(x) = D_x F$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$).

Hierbei ist $DF(x) = D_x F$ die Jacobi-Matrix in $x \in \mathbb{R}^n$

$$D_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

für $f = (f^1, \cdots, f^m)^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Speziell füe eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{grad} f = Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)^t$$

der Gradient.

Eine Gleichung der Form $f(x) = g(x) + O(h(x))$ (bzw. $o(h(x))$) für $x \to 0$ bedeutet, dass

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \leq C, \quad \text{für alle } x \neq 0 \text{ aus einer Umgebung von } 0,$$

(bzw.

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \to 0, \text{ mit } 0 \neq x \to 0.$$

)

1. Kurven

1.1. Parametrisierungen.

Definition 1.1 (parametrisierte Kurve)**.** Eine parametrisierte Kurve ist eine C^∞-Abbildung

$$c : I \to \mathbb{R}^n,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall ist und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Das intervall I aus der definition kann offen, abgeschlossen oder halbabgeschlossen sein; auch kann I beschränkt oder unbschränkt sein. Eine Abbildung $c(t)$ wird gegeben durch

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t))^t,$$

wobei $c_i : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion für alle $1 \leq i \leq n$ ist. Die Abbildung c is genau dann C^∞, wenn für jedes $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ die Funktion c_i C^∞ ist. Die Ableitung c' von c ist $(c_1'(t), c_2'(t), \cdots, c_n'(t))^t$.

Definition 1.2 (reguläre parametrisierte Kurve)**.** Eine reguläre parametrisierte Kurve ist eine parametrisirte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^N$ mit

$$c'(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$.

Beispiel 1.3. a. (Die Gerade) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} c_0 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \to & p + vt, \end{array}$$

wobei $p, v \in \mathbb{R}^n$, ist eine parametrisierte Kurve. Ferner gilt $c'(t) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$, somit ist c genau dann regulär parametrisiert, wenn $v \neq 0$.

b. (Die Kreislinie in der Ebene mit Radius $r > 0$) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} c_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (r\cos t, r\sin t)^t, \end{array}$$

ist eine reguläre parametrisierte Kurve.

b'. (Die Kreislinie in der Ebene mit Radius $r > 0$) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} c_2 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (r\cos 2t, r\sin 2t)^t, \end{array}$$

ist eine reguläre parametrisierte Kurve.

c. (*Traktrix* oder *Schleppkurve*) Die Kurve

$$c(t) = (\sin t, \cos t + \ln\tan(t/2))^t$$

ist regulär auf $(0, \frac{\pi}{2})$, aber nicht regulär auf $(0, \pi)$, denn $\dot{c}(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)^t$.

Definition 1.4 (Umparametrisierung)**.** Seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $d : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre parametrisierte Kurven. Man sagt, dass d eine Umparametrisierung von c ist, g.d.w. ein Diffeomorphismus

$$\varphi : J \to I$$

existiert mit

$$d = c \circ \varphi.$$

φ heißt eine Parametertransformation.

Ein Abbildung $\varphi : J \to I$ heißt *Diffeomorphismus*, g.d.w. sie eine C^∞-Bijektion und ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : I \to J$ auch C^∞ ist. Nach der Kettenregel gilt

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1.$$

Damit eine Umparametrisierung einer regulär parametrisierten Kurve wiederum regulär ist, denn

$$d'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \neq 0.$$

Im Beispiel 1.3 b ist die reguläre parametrisierte c_2 eine Umparametrisierung von c_1, denn $c_2 = c_1 \circ \varphi$ mit $\varphi(t) = 2t$.

Definition 1.5. Auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven wird die Relation „ $\sim$ " definiert durch

$$d \sim c \Leftrightarrow d \text{ ist eine Umparametrisierung von } c.$$

Proposition 1.6. *Die Relation „ $\sim$ " ist eine Äquivalentrelation auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven.*

Beweis. Wir müssen die Flexivität, die Symmetrie, und die Transitivität nachprüfen:

Reflexivität. ($c \sim c$): sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve. Wähle $J := I$ und ein triviale Diffeomorphismus $\varphi = \mathrm{Id}_I$, dann ist $c = c \circ \varphi$, d.h. $c \sim c$.

Symmetrie. ($d \sim c \Rightarrow c \sim d$): seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $d : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre Parametrisierte Kurven so dass $d \sim c$. Aus der Definition von $\sim$ existiert einer Diffoemorphismus $\varphi : J \to I$ mit $d = c \circ \varphi$. Ebenfalls ist seine Umkehrabbildung φ^{-1} ein Diffoemorphismus. Setze $\psi = \varphi^{-1}$. Dann gilt $c = d \circ \psi$, d.h., $c \sim d$.

Transitivität. ($d \sim c$ und $e \sim d \Rightarrow e \sim c$): seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ $d : J \to \mathbb{R}^n$ und $e : K \to \mathbb{R}^n$ reguläre Parametrisierte Kurven mit $d \sim c$ und $e \sim d$. Aus der Definition von $\sim$ folgt die Existenz zweier Diffeomorphismen $\varphi : J \to I$ und $\psi : K \to J$ mit $d = c \circ \varphi$ und $e = d \circ \psi$. Dann gilt $e = c \circ (\varphi \circ \psi)$ und $\varphi \circ \psi$ ist auch ein Diffeomorphismus. Somit gilt $e \sim c$. ■

Definition 1.7 (Kurve)**.** Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. " $\sim$ " von regulären parametrisirten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind. Wir bezeichnen mit $[c]$ die Äquivalenzklasse von c.

Definition 1.8 (Spur einer Kurve)**.** Die Spur einer Kurve ist die Menge $c(I) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve ist.

Die Spur von $[c]$ ist wohldefiniert, denn: ist $d : J \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von $c : I \to \mathbb{R}^n$, so existiert ein Diifeomorphismus $\varphi : J \to I$ mit $d = c \circ \varphi$, und somit gilt $d(J) = c(\varphi(I)) = c(I)$.

Im Beispiel 1.3, die Spur von $[c_0]$ ist eine Gerade und die Spur von $[c_1]$ ist der Kreis

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Eine parametertransformation kann die Richtung, in der die Bildkurve durchlaufen wird, entweder umkehren oder erhalten. $\varphi(t) = t$ ändert nichts an der parametrisierten Kurve, $\varphi(t) = -t$ dagegen kehrt den Durchlaufsinn um.

Definition 1.9. Eine parametertransformation φ heißt orientierungserhaltend, falls $\varphi'(t) > 0$. Die parametertransformation φ heißt orientierungsumkehrend, falls $\varphi'(t) < 0$.
Eine Umparametrisierung $d = c \circ \varphi$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), falls φ orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend) ist.

Jede parametertransformation ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. (Beweis: Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $\varphi'(t_1) < 0$ und $\varphi'(t_2) > 0$. Nach den Zwischenwertsatz existiert $t_3 \in (t_1, t_2)$ mit $\varphi'(t_3) = 0$. Das ist unmöglich.)

Definition 1.10. Auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven wird die Relation "$\sim_+$" definiert durch

$d \sim_+ c \Leftrightarrow$ d ist eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von c,

Proposition 1.11. *Die Relation " $\sim_+$ " ist eine Äquivalentrelation auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven.*

Definition 1.12. Eine orientierte Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. " $\sim$ "$_+$ von regulären parametrisirten Kurven. Wir bezeichen mit $[c]_+$ die Äquivalenzklasse von c.

Jede Kurve hat genau zwei Orientierungen, d.h. es gibt genau zwei orientierte Kurven.

1.2. **Länge.**

Definition 1.13 (Länge einer Kurve)**.** Die Länge einer Kurve $[c]$ ist definiert durch

$$L[c] := \int_I \|c'(t)\| dt,$$

wobei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve ist.

Proposition 1.14. *Die Länge von $[c]$ ist wohldefiniert.*

Beweis. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve und $d = c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von c. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_J \|d'(t)\| dt &= \int_J \|c'(\varphi)\varphi'(t)\| dt && \text{(Kettenregel)} \\
&= \int_J \|c'(\varphi)\| \cdot |\varphi'(t)| dt \\
&= \int_I \|c'(s)\| ds && (s = \varphi(t)).
\end{aligned}$$

■

Die Länge von c_0 im Intervall $[t_0, t_1]$ ist

$$L[c_0] = \int_{t_0}^{t_1} \|v\| dt = (t_1 - t_0) \cdot \|v\|.$$

Die Länge von c_1 im Intervall $[0, 2\pi]$ ist

$$L[c_1] = \int_0^{2\pi} \|c_1'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Definition 1.15 (nach Bogenlänge parametrisierte Kurve)**.** Eine reguläre Parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt nach Bogenlänge parametrisierte g.d.w. für alle $t \in I$ gilt

$$\|c'(t)\| = 1.$$

Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $t_0 \in I$ fest. Für alle $t \in I$ mit $t > t_0$ gilt

$$L[c_{[t_0,t]}] = \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| ds = t - t_0.$$

Tatsächlich, $c : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle $t_0, t \in I$ mit $t > t_0$ gilt

$$L[c_{[t_0,t]}] = t - t_0.$$

Proposition 1.16 (Existenz der Umparametrisierung nach Bogenlänge). *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve. Dann existiert er eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c.*

("Eindeutigkeit") Zwei Umparametrisierungen nach Bogenlänge von c unterscheiden sich durch eine affine Parametertransformation der Form

$$t \to \pm t + r_0,$$

für ein $r \in \mathbb{R}$.

Beweis. (Existenz) Sei $t_0 \in I$ und sezte

$$\psi(t) := \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| ds.$$

Die Funktion ψ ist C^∞ und $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0$ für alle $t \in I$. Sezte $J := \psi(I)$. Es ist klar, dass $\psi : I \to J$ eine Diffeomorphismus ist mit ihrer Umkehrabbildung $\varphi := \psi^{-1}$ und

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|c'(\varphi)\|}.$$

Setze $d = c \circ \varphi$. Dann ist d eine orentierungserhaltende Umparametrisierung von c und nach der Kettenregel gilt es für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} d'(t) &= c'(\varphi(t))\varphi'(t) \qquad\qquad (\varphi'(t) = \frac{1}{\|c'(\varphi)\|}) \\ &= \frac{c'(\varphi(t))}{\|c'(\varphi)\|}, \end{aligned}$$

so dass $\|d'(t)\| = 1$ für alle $t \in J$. Somit wird die Existenz bewiesen.

(Eindeutigkeit) Sei $e : K \to \mathbb{R}^n$ andere Umparametrisierung nach Bogenlaïge von c. Dann ist e auch eine Umparametrisierung von d (Sehe den Beweis der Transitivität der Relation $\sim$), d.h. ein Diffeomorphismus $\eta : K \to J$ so existiert, dass $e = d \circ \eta$. Aus

$$1 = \|e'(t)\| = \|d'(\eta(t))\| \cdot |\eta'(t)| = |\eta'(t)|,$$

haben wir

$$\eta(t) = \pm t + r_0,$$

für ein $r_0 \in \mathbb{R}$. ∎

Beispiel 1.17. a. Sei $c_0(t) = p + vt$ in Beispiele 1 gegeben. Im diesem Fall ist die im letzten Beweis angegebene Funktion ψ

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \|v\| ds = (t - t_0)\|v\|.$$

Ihre Umkehrabbildung ist $\varphi(t) = \psi^{-1} = t_0 + t\frac{1}{\|v\|}$. Die orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c_0 nun ist

$$\tilde{c}_0(t) = c \circ \varphi(t) = p + t_0 v + t\frac{v}{\|v\|}.$$

b. Sei $c_1(t) = (r\cos t, r\sin t) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$. Setze $t_0 = 0$. Dann haben wir

$$\psi(t) = \int_0^t r ds = rt$$

und ihre Umkehrabbildung

$$\varphi(t) = \psi^{-1}(t) = \frac{t}{r}$$

mit $J := \psi([0, 2\pi)) = [0, 2r\pi)$. Die Abbildung

$$\tilde{c}_1(t) = c_1 \circ \varphi(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r}) : [0, 2r\pi) \to \mathbb{R}^2$$

ist die orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c_1.

1.3. **Ebene Kurven.**

Definition 1.18 (ebene Kurve)**.** Eine ebene Kurve ist eine Kurve von $\mathbb{R}^2$ $c : I \to \mathbb{R}^2$.

Definition 1.19 (Normalenfeld)**.** Sei $c : R \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Das Normalenfeld zu $c = (c_1, c_2)^t$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} n: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & n(t) := Jc'(t) = \begin{pmatrix} -c_2'(t) \\ c_1'(t) \end{pmatrix}, \end{array}$$

wobei

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

(c', n) bilden eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$. Mit anderen Worten, wir drehen dem Geschwindigkeitsvector um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn. Insbesondere gelten $\|n(t)\|^2 = 1$, $n(t) \perp c'(t)$, und

$$\det\big(c'(t), n(t)\big) = 1.$$

(Beweis. $\det(c'(t), n(t)) = \det\begin{pmatrix} c_1' & -c_2' \\ c_2' & c_1' \end{pmatrix} = \|c'(t)\|^2 = 1$.)

Bemerkung. • Das Normalenfeld n is C^∞.

• Das Normalenfeld (bzw. der Geschwindigkeitsvektor) hängt vom Durchlaufsinn ab.

$$\begin{array}{rcl} \bar{c}(t) & = & c(-t) \\ \bar{c}'(t) & = & -c'(-t) \\ \bar{n}(t) & = & -n(-t). \end{array}$$

Beispiel 1.20. a). $c(t) = p + vt$, $v \neq 0$, $\|v\| = 1$.

$$c'(t) = v, \quad n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v.$$

b) $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})^t$.

$$\begin{aligned} c'(t) &= (-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r})^t \\ n(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\frac{t}{r} \\ \cos\frac{t}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{r} \\ -\sin\frac{t}{r} \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}c(t). \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir messen, wie stark der geschwindigkeitsvektor mit der Zeit t variiert.

Proposition 1.21. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und n das Normalenfeld zu c. Dann steht für jedes $t \in I$ der $c''(t)$ proportional zu $n(t)$.*

Beweis. Wegen $\|c'(t)\|^2 = 1$ für alle $t \in I$ gilt beim Ableiten

$$\begin{aligned} 0 &= (\|c'\|^2)'(t) = \langle c', c'\rangle'(t) \\ &= \langle c'', c'\rangle(t) + \langle c', c''\rangle(t) \\ &= 2\langle c'', c'\rangle(t). \end{aligned}$$

Somit $c''(t) = \langle c'', c'\rangle c' + \langle c'', n\rangle n = \langle c'', n\rangle n$. ■

Nun definieren wir den wichtige Begriff der Differentialgeometrie: die *Krümmung.*

Definition 1.22 (Krümmung einer nach Bögenlänge parametrisierten ebenen Kurve)**.** Die Krümmung einer nach Bögenlänge para-metrisierten ebenen Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ ist die Funktion $\kappa : I \to \mathbb{R}$ so dass $c''(t) = \kappa(t)n(t)$ für alle $t \in I$.

- $\kappa(t) = \langle c''(t), n(t)\rangle$ ist C^∞.

Beispiel 1.23. a). $c(t) = p + vt$, $v \neq 0$, $\|v\| = 1$. Wegen $c'(t) = v$ für alle t gilt dann $c''(t) = 0$ und somot $\kappa(t) = 0$.

b). $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, \sin\frac{t}{r})$. Wir wissen, dass $n(t) = -\frac{1}{r}c(t)$ und

$$c''(t) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{t}{r}) = -\frac{1}{r^2}c(t).$$

Damit gilt $c'' = \frac{1}{r}n$ und $\kappa = \frac{1}{r}$.

Definition 1.24 (Krümmung einer parametrisierten ebenen Kurve)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Die Krümmung κ von c wird definiert durch

$$\kappa := \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}, \quad \kappa(t) = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}(t),$$

wobei $c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^2$ eine orinetierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ist mit Krümmung (in Sinne der Def.) $\kappa_{c\circ\varphi}$.

Bemerkung. Die Krümmung von c ist wohldefiniert, d.h., κ hängt nicht von der Wahl der orientierungserhaltenden Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ab. Denn: ist $c \circ \xi$ eine andere orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c, so existiert aus Proposition 1.16 ein $r_0 \in \mathbb{R}$ so dass $\xi(t) = \varphi(t + r_0)$ für alle t. Nun gilt für die Krümmung von $t \to c \circ \varphi(t + r_0) = c \circ \xi(t)$: $\kappa_{c\circ\xi}(t) = \kappa_{c\circ\varphi}(t + r_0)$ für alle t, und somit

$$\begin{aligned} (\kappa_{c\circ\xi} \circ \xi^{-1}(t) &= \kappa_{c\circ\xi}(\xi^{-1}(t)) = \kappa_{c\circ\xi}(\varphi^{-1}(t) - r_0) \\ &= \kappa_{c\circ\varphi}(\varphi^{-1}(t) - r_0 + r_0) = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}(t), \end{aligned}$$

d.h. $\kappa = \kappa_{c\circ\xi} \circ \xi^{-1} = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}$.

Lemma 1.25 (Krümmung einer parametrisierten ebenen Kurve)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Dann ist die Krümmung von c gegeben durch*

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

(Übung !)

Proposition 1.26 (Geometrische Interpretation der Krümmung)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld und κ die Krümmung von c. Sei $t_0 \in I$. Dann gilt für $t \in I$*

$$c(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\kappa(t_0)n(t_0) + (t - t_0)^3 o(t - t_0),$$

wobei $o(t - t_0) \to 0$ als $t \to t_0$.

Beweis. Bei Taylorentwicklung. ■

Satz 1.27 (Frenet-Gleichungen)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld und κ die Krümmung von c. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix},$$

d.h.,

$$\begin{cases} c'' &= \kappa \cdot n \\ n' &= -\kappa \cdot c' \end{cases}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist die Definition der Krümmung κ. Zur Zweite benutzen wir die folgende Formel

$$n'(t) = \langle n'(t), c'(t)\rangle c'(t) + \langle n'(t), n(t)\rangle n(t),$$

denn $\{c'(t), n(t)\}$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^2$. Beim Ableiten der Gleichheit $\langle c', n\rangle = 0$

$$0 = \langle c', n\rangle' = \langle c'', n\rangle + \langle c', n'\rangle$$

folgt

$$\langle c', n\rangle = -\langle c'', n\rangle = -\kappa$$

aus. Analog wegen $\|n\|^2 = 1$ gilt

$$0 = (\|n\|^2)' = 2\langle n', n\rangle,$$

d.h., $\langle n', n\rangle = 0$, somit wird die Zweite bewiesen. ■

Proposition 1.28 (Invarianz der Krümmung unter euklidischer Bewegung). *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei A eine oreintierungserhaltende euklidische Bewegung von $\mathbb{R}^2$. Setze $\tilde{c} := A \circ c : I \to \mathbb{R}^2$. Dann ist $\tilde{c}$ ebenfalls eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und es gilt für ihre Krümmung*

$$\tilde{\kappa} = \kappa.$$

Beweis. Die Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist euklidische Bewegung von $\mathbb{R}^2$ g.d.w. existieren $B \in O(2)$ (Gruppe der orthogonalen linearen Transformationen von $\mathbb{R}^2$) und $v \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$A(x) = Bx + v.$$

A ist orientierungserhaltend, g.d.w. $\det B = 1$. Wegen $\tilde{c}(t) = Bc(t) + v$ für alle $t \in I$, gilt beim Ableiten

$$\tilde{c}'(t) = Bc'(t).$$

Da B eine orientierungserhaltende Transformation ist, gilt es

$$\tilde{n}(t) = Bn(t).$$

($\det(Bc', Bn) = \det(B)\det(c', n) = 1$.) Dann

$$\tilde{k} = \langle \tilde{c}''(t), \tilde{n}(t)\rangle = \langle Bc''(t), Bn(t)\rangle = \langle c''(t), n(t)\rangle = \kappa.$$

■

Bemerkung. Ist A orientierungsumkehrende euklidische Bewegung, so gilt diesmal

$$\tilde{\kappa} = -\kappa.$$

Satz 1.29 (Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung*

$$\kappa = f.$$

Seien c_1 und c_2 zwei nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit Krümmung $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Dann existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung A mit

$$c_2 = A \circ c_1.$$

Beweis. Zurnächst brauchen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz. Sei $A : I \to$ $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ eine C^∞-Abbildung. Seien $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau eine C^∞-Abbildung $y : I \to \mathbb{R}^n$ so dass

$$\begin{cases} y'(t) & = & A(t)y(t) \\ y(t_0) & = & y_0. \end{cases}$$

Ferner, falls $y_0 = 0$, dann gilt $y(t) = 0$ für alle $t \in I$.

(Existenz). Sei $t_0 \in I$ fest. Wir betrachten die folgende Gleichung

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' & = & \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t_0) & = & \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wobei $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$. Aus dem Hilfssatz existiert eine eindeutige C^∞ Lösung $(v_1, v_2) : I \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Wir zeigen nun, dass für alle t $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positiv ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden. Bei Ableiten haben wir

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1\rangle' &= 2\langle v_1', v_1\rangle = 2f\langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_2\rangle' &= 2\langle v_2', v_2\rangle = -2f\langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle' &= \langle v_1', v_2\rangle + \langle v_1, v_2'\rangle = f(\langle v_2, v_2\rangle - \langle v_1, v_1\rangle, \end{aligned}$$

insbesondere $(\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle)' = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 - \|e_2\|^2 \\ \langle e_1, e_2\rangle \end{pmatrix} = 0.$$

Durch die Anwendung des obigen Satzes, gilt

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}(t) = 0,$$

für alle $t \in I$. Zusammen mit $(\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle)' = 0$ ergeben sich

$$\|v_1(t)\| = \|e_1\| = 1, \|v_2(t)\| = \|e_2\| = 1, \langle v_1(t), v_2(t)\rangle = 0$$

für alle $t \in I$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden. Die Funktion $t \to \det(v_1(t), v_2(t))$ ist stetig und sie hat Werte in $\{-1, 1\}$. Also $\det(v_1(t).v_2(t)) = 1$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positive ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Jetzt setze

$$c(t) := \int_{t_0}^{t} v_1(s)ds.$$

Die Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^2$ ist C^∞, und es gilt: $c(t_0) = 0$, $c' = v_1$ und $c'' = v_1' = fv_2$. Aber $v_2 = n$, das Normalenfeld von c, denn $\{v_1(t), v_2(t)\}$ ist eine positive ONB von $\mathbb{R}^2$. Folglich haben wir

$$c'' = fn,$$

d.h., die Krümmung von c ist gleich f.

(Eindeutigkeit) 1. Fall. Seien c_1 und c nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$ und $c_1(t_0) = c_2(t_0)$, $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$. Es is klar, dass $n_1(t_0) = n_2(t_0)$ gilt, wobei n_i das Normalenfeld von c_i ist. Aus den Frenet-Gleichungen gilt dann

$$\begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des obigen Hilfssattzes erhalten wir $c_1' - c_2' = n_1 - n_2 = 0$ auf I, und daher

$$\begin{aligned} c_2(t) &= c_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_2'(s)ds \\ &= c_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_1'(s)ds = c_1(t), \end{aligned}$$

d.h. $c_1 = c_2$.

2. Fall. Im allgemeinen Fall seien c_1, c_2 nach Bogenlänge parametrisierten Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Sei $t_0 \in I$ fest. Finde eine oerentirungserhaltende Transformation $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x) := Bx + v$ mit $\det B = 1$, so dass

$$\begin{cases} A(c_1(t_0)) = c_2(t_0), \\ Bc_1'(t_0) = c_2'(t_0), \\ Bn_1(t_0) = n_2(t_0). \end{cases}$$

Aus der Proposition 1.28 gilt dann

$$\kappa_{A\circ c_1} = \kappa_1 = f.$$

Wir wenden den 1. Fall auf $A \circ c_1$ und c_2 an und erhalten

$$A \circ c_1 = c_2.$$

■

1.4. **Umlaufzahl und Totalkrümmung.**

Definition 1.30 (geschlossene Kurve)**.** Eine parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt periodisch mit Periode $L > 0$, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t + L) = c(t)$, und es kein $0 < L' < L$ gilt, so dass ebenfalls $c(t + L') = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Eine Kurve heißt geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

Beispiel $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$ ist eine periodische parametrisierte Kurve mit Periode $L = 2\pi$. Somit ist die durch diese parametrisierung repräsentierte Kurve geschlossenen.

Nicht jede parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist periodisch:

$$c(t) = (\cos t^3, \sin t^3).$$

Definition 1.31 (einfach geschlossene Kurve)**.** Eine geschlossene Kurve heißt einfach geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung c mit Periode L hat, so dass

$$c_{|[0,L)} : [0, L) \to \mathbb{R}^2$$

injektiv ist.

Lemma 1.32 (Winkelfunktion)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Dann existiert es eine C^∞-Funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$, so dass*

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $\theta_2; I \to \mathbb{R}$ eine andere C^∞-Funktion mit $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2(t) \\ \sin\theta_2(t) \end{pmatrix}$ für alle t, so existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\theta_2 = \theta + 2k\pi.$$

Beweis. (Eindeutigkeit). Angenommen. Es gilt zwei Funktionen θ und $\theta_2 : I \to \mathbb{R}$ mit

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2(t) \\ \sin\theta_2(t) \end{pmatrix},$$

für alle $t \in I$. Dann gilt es zu jedem $t \in I$ eine eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass $\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi$. Weil $\theta_2 - \theta$ auf I stetig ist, muss k konstant auf I sein, d.h. es existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi,$$

für alle $t \in I$.

(Existenz). Wir betrachten zwei Fälle.