für alle $t \in I$. Zusammen mit $(\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle)' = 0$ ergeben sich

$$\|v_1(t)\| = \|e_1\| = 1, \|v_2(t)\| = \|e_2\| = 1, \langle v_1(t), v_2(t)\rangle = 0$$

für alle $t \in I$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden. Die Funktion $t \to \det(v_1(t), v_2(t))$ ist stetig und sie hat Werte in $\{-1, 1\}$. Also $\det(v_1(t).v_2(t)) = 1$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positive ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Jetzt setze

$$c(t) := \int_{t_0}^{t} v_1(s)ds.$$

Die Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^2$ ist C^∞, und es gilt: $c(t_0) = 0$, $c' = v_1$ und $c'' = v_1' = fv_2$. Aber $v_2 = n$, das Normalenfeld von c, denn $\{v_1(t), v_2(t)\}$ ist eine positive ONB von $\mathbb{R}^2$. Folglich haben wir

$$c'' = fn,$$

d.h., die Krümmung von c ist gleich f.

(Eindeutigkeit) 1. Fall. Seien c_1 und c nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$ und $c_1(t_0) = c_2(t_0)$, $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$. Es is klar, dass $n_1(t_0) = n_2(t_0)$ gilt, wobei n_i das Normalenfeld von c_i ist. Aus den Frenet-Gleichungen gilt dann

$$\begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des obigen Hilfssattzes erhalten wir $c_1' - c_2' = n_1 - n_2 = 0$ auf I, und daher

$$\begin{aligned} c_2(t) &= c_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_2'(s)ds \\ &= c_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_1'(s)ds = c_1(t), \end{aligned}$$

d.h. $c_1 = c_2$.

2. Fall. Im allgemeinen Fall seien c_1, c_2 nach Bogenlänge parametrisierten Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Sei $t_0 \in I$ fest. Finde eine oerentirungserhaltende Transformation $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x) := Bx + v$ mit $\det B = 1$, so dass

$$\begin{cases} A(c_1(t_0)) &= c_2(t_0), \\ Bc_1'(t_0) &= c_2'(t_0), \\ Bn_1(t_0) &= n_2(t_0). \end{cases}$$

Aus der Proposition 1.28 gilt dann

$$\kappa_{A\circ c_1} = \kappa_1 = f.$$

Wir wenden den 1. Fall auf $A \circ c_1$ und c_2 an und erhalten

$$A \circ c_1 = c_2.$$

■

1.4. **Umlaufzahl und Totalkrümmung.**

Definition 1.30 (geschlossene Kurve)**.** Eine parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt periodisch mit Periode $L > 0$, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t + L) = c(t)$, und es kein $0 < L' < L$ gilt, so dass ebenfalls $c(t + L') = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Eine Kurve heißt geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

Beispiel $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$ ist eine periodische parametrisierte Kurve mit Periode $L = 2\pi$. Somit ist die durch diese parametrisierung repräsentierte Kurve geschlossenen.

Nicht jede parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist periodisch:

$$c(t) = (\cos t^3, \sin t^3).$$

Definition 1.31 (einfach geschlossene Kurve)**.** Eine geschlossene Kurve heißt einfach geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung c mit Periode L hat, so dass

$$c_{|[0,L)} : [0, L) \to \mathbb{R}^2$$

injektiv ist.

Lemma 1.32 (Winkelfunktion)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Dann existiert es eine C^∞-Funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$, so dass*

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $\theta_2; I \to \mathbb{R}$ eine andere C^∞-Funktion mit $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2(t) \\ \sin\theta_2(t) \end{pmatrix}$ für alle t, so existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\theta_2 = \theta + 2k\pi.$$

Beweis. (Eindeutigkeit). Angenommen. Es gilt zwei Funktionen θ und $\theta_2 : I \to \mathbb{R}$ mit

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2(t) \\ \sin\theta_2(t) \end{pmatrix},$$

für alle $t \in I$. Dann gilt es zu jedem $t \in I$ eine eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass $\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi$. Weil $\theta_2 - \theta$ auf I stetig ist, muss k konstant auf I sein, d.h. es existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi,$$

für alle $t \in I$.

(Existenz). Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall. Die Menge $c'(I)$ ist in einem der folgenden Halbkreise enthalten:

$$S_R := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, x > 0\}, \qquad S_L := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, x < 0\}$$
$$S_O := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, y > 0\}, \qquad S_L := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, y < 0\}.$$

Sei die Menge $c'(I)$ z. B. in S_R, d.h. $c_1' > 0$. Für unsere Funktion θ muss also gelten

$$\frac{c_2'(t)}{c_1'(t)} = \frac{\sin\theta(t)}{\cos\theta(t)} = \tan\theta(t).$$

Also ist

$$\theta = \arctan\left(\frac{c_2'(t)}{c_1'(t)}\right) + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Wird der Anfangswert $\theta(a)$ vorgegeben, so ist k und damit θ eindeutig festgelegt.

2. Fall. Im Allgemeinen kann man nicht voraussetzten, dass $c'([0,T]) \subset S_R$, bzw. S_L, S_O, S_U. Es existiert aber eine Teiling $\{0 =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := T\}$ von $[0,T]$ so dass

$$c'([t_i, t_{i+1}]) \subset S_R \text{ oder } S_L, S_O, S_U$$

for alle $i = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Dies folgt aus der Gleichmäßigsteigkeit von c' auf dem kompaktem Intervall $[0,T]$. Wir wenden den 1. Fall auf $c'([t_0,t_1])$ an: Es existiert eine C^∞-Funktion $\theta_0 : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ so dass $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0(t) \\ \sin\theta_0(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in [t_0,t_1]$. Dann wenden wir wiederum den 1. Fall auf $c'([t_1,t_2])$ an mit der Bedingung $\theta_1(t_1) = \theta_0(t_1)$. Rekursiv wenden wir den 1. Fall auf $c'([t_i,t_{i+1}])$ an mit der Bedingung $\theta_i(t_i) = \theta_{i-1}(t_i)$, und bekommen wir am Ende eine stückerwise glatte Funktion $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$, die durch $\theta_{[t_i,t_{i+1}]} := \theta_i$ definiert. Sie erfüllt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Eine solche Funktion θ ist C^∞ bei der Eindeutigkeit. ■

Die Funktion θ misst den Winkel zwischen $c'(t)$ und der x-Achse.

Definition 1.33 (Umlaufzahl)**.** Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, periodisch mit Periode L. Sie $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie Lemma 1.32. Dann heißt

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0))$$

Umlaufzahl von c.

Beispiel 1.34. Der Kreis vom Radius $r > 0$, $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})$ mit Periode $L = 2\pi r$.

Der Tangentialverktor ist

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{t}{r} \\ \cos\frac{t}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als Winkelfunktion

$$\theta(t) = \frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}.$$

und somit für die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi r) - \theta(0)) = 1.$$

Lemma 1.35. *a). n_c ist stets eine Ganze Zahl.*

b). Sein c_1, $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zwei ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurven, periodisch mit Periode L. Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_2} = n_{c_1}.$$

Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungsumkehrende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_2} = -n_{c_1}.$$

Beweis. *a)*. Aus der Periodizität folgt $\cos(\theta(L)) = \cos(\theta(0))$, $\sin(\theta(L)) = \sin(\theta(0))$ und somit

$$\theta(L) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

b) Sie $c_1 = c_2 \circ \varphi$. Die Parametertransformation hat die folgende Form

$$\varphi(t) = \pm t + r_0,$$

für $r_0 \in \mathbb{R}$, wobei das Vorzeichen davon anhängt, ob die parametertransformation die Orientierung erhält oder umkehrt. Ist θ_2 eine Winkelfunktion für c_2 wie im Lemma 1.32. Im orientierungserhaltenden Fall, ist $\theta_1 := \theta_2 \circ \varphi$ eine Winkelfunktion für c_1, denn

$$c_1'(t) = c_2'(t + r_0) = (\cos(\theta_2(t + r_0)), \sin(\theta_2(t + r_0))).$$

Aber $\tilde{\theta}_1(t) = \theta(t + L)$ ist auch eine Winkelfunktion für c_1, dann gilt

$$\begin{aligned}
2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) &= (\theta_2(L) - \theta_2(0)) - (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\
&= \theta_1(L - r_0) - \theta_1(-r_0) - (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\
&= (\tilde{\theta}_1(-r_0) - \tilde{\theta}_1(0)) - (\theta_1(-r_0) - \theta_1(0)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Im orientierungsumkehrenden Fall sieht man, dass für eine Winkelfunktion θ_2 für c_2. Die Funktion $\theta_1 := \theta_2(-t + r_0) + \pi$ eine Winkelfunktion für c_1 ist, denn dann ist $\varphi(t) = -t + r_0$ und somit

$$\begin{aligned}
c_1'(t) &= -c_2'(-t + r_0) \\
&= -(\cos(\theta_2(-t + r_0), \sin(\theta_2(-t + r_0)) \\
&= (\cos(\theta_2(-t + r_0) + \pi), \sin(\theta_2(-t + r_0) + \pi)).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
2\pi(n_{c_1}+n_{c_2}) &= (\theta_2(L)-\theta_2(0))+(\theta_1(L)-\theta_1(0))\\
&= \theta_1(-L+r_0)-\theta_1(r_0)+(\theta_1(L)-\theta_1(0))\\
&= (\theta_1(-L+r_0)-\theta_1(0))-(\tilde{\theta}_1(-L+r_0)-\tilde{\theta}_1(0))\\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Satz 1.36 (Umlaufzahl durch die Krümmung)**.** *Sei $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische ebene Kurve mit Periode L. Sei $\kappa:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Krümmung von c. Dann gilt*

$$n_c=\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)dt.$$

Beweis. Sei θ eine Winkelfunktion für c, d.h. es gilt

$$c'(t)=(\cos\theta(t),\sin\theta(t)).$$

Beim Ableiten erhalten wir

$$c''(t)=(-\sin(\theta(t))\theta'(t),\cos(\theta(t))\theta'(t)).$$

Andererseits gilt aus der Definition der Krümmung $c''(t)=\kappa(t)\cdot n(t)=\kappa(t)\cdot(-\sin\theta(t),\cos\theta(t))$. Daraus folgt

$$\theta'(t)=\kappa(t).$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned}
n_c &= \frac{1}{2\pi}(\theta(L)-\theta(0))=\frac{1}{2\pi}\int_0^L\theta'(t)dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^L\kappa(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Remark 1.37. Für eine parametrisierte periodische reguläre ebene Kurve mit Periode L gilt

$$n_c=\frac{1}{2\pi}\int_0^L\kappa(t)|c'(t)|dt.$$

Beweis. Übung. ■

Satz 1.38 (Umlaufsatz)**.** *Eine einfach geschlossene orientierte ebene Kurve hat Umlaufzahl* 1 *oder* -1.

Lemma 1.39 (Lifting)**.** *Sei $X\subset\mathbb{R}^n$ sternförmig bgzl x_0. Sei $e:X\to\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann existierte eine stetige Abbildung $\theta:X\to\mathbb{R}$ so dass*

$$e(x)=(\cos\theta(x),\sin\theta(x)).$$

(Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig* bzgl. $x_0 \in X$, falls für jeden Punkt $x \in X$ auch die Strecke zwischen x und x_0 ganz in X enthalten ist, d.h. für alle $t \in [0,1]$ gilt $tx + (1-t)x_0 \in X$.)

Bemerkung. Ist die Abbildung $e : X \to \mathbb{S}^1$ nicht surjektiv, so lässt sich die Abbildung $\theta : X \to \mathbb{R}$ viel leichter angeben. Sei etwa $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ nicht im Bild von e. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Psi_k : (\phi_0 + 2\pi(k-1), \phi_0 + 2\pi k) & \to & \mathbb{S}^1 - \{(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)\}, \\ \Psi_k(t) & = & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

eine Homöomorphismus. Dann ist $\theta := \Psi_k^{-1} \circ e : X \to (\phi_0 + 2\pi(k-1), \phi_0 + 2\pi k)$ und erfüllt

$$e(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x)).$$

Die Zahl k ist dann durch die Bedingung $\theta(x_0) = \theta_0$ eindeutig festgelegt. Insbesondere gilt

$$|\theta(x_1) - \theta(x_2)| < 2\pi, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Beweis von Lemma 1.39. Sei $x \in X$ und

$$\begin{array}{rcl} e_x : [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ e_x(t) & = & e(tx + (1-t)x_0). \end{array}$$

Wörtlich wie im Beweis zur Existenz des Winkelfunktion erhdiralt man eine Winkelfunktion θ_x mit

$$e_x(t) = (\cos\theta_x(t), \sin\theta_x(t))^t.$$

θ_x ist stetig, weil man lokal nach θ_x auflösen kann, je nachdem in welches Halbebene des Kreises man sich befindet. θ_x ist außerdem eindeutig nach Vorgabe von θ_0. Für das gesuchte $\theta : X \to \mathbb{R}$ kann dann nur gelten:

$$\theta(x) = \theta_x(1)$$

und ist somit eindeutig.

Wegen der Stetigkeit von

$$\tilde{e} : (t,x) \mapsto e(tx + (1-t)x_0) = e_x(t)$$

ist wegen der lokalen Auflösbarkeit auch

$$(x,t) \mapsto \theta_x(t)$$

stetig und insbesondere

$$x \mapsto \theta_x(1) = \theta(x).$$

$\blacksquare$

Beweis des Umlaufsatzes. Durch einer Wahl der euklidischen Bewegung nehmen wir o.B.d.A. an, dass $c(t) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\}$, $c(0) = (0, 0)$ und $c'(0) = (0, 1)$. Setze $X := \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L\}$. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$e : X \to \mathbb{S}^1,$$

$$e(t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{c(t_2) - c(t_1)}{\|c(t_2) - c(t_1)\|}, & t_2 > t_1 \text{ und } (t_1, t_2) \neq (0, L), \\ c'(t), & t_2 = t_1 = t, \\ -c'(0), & (t_1, t_2) = (0, L). \end{cases}$$

Die Abbildung e ist wohldefiniert und stetig, weil c als einfach geschlossen vorausgesetzt wurde. Wir wählen eine Funktion $\theta : X \to \mathbb{R}$ für e wie in Lemma 1.39. Wegen $e(t, t) = c'(t)$ ist $t \to \theta(t, t)$ eine Winkelfunktion wie in Lamma 1.32. Also die Umlaufzahl ist

$$\begin{aligned} 2\pi n_c &= \theta(L, L) - \theta(0, 0) \\ &= \theta(L, L) - \theta(0, L) + \theta(0, L) - \theta(0, 0) \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass $\theta(L, L) - \theta(0, L) = \pi$ und $\theta(0, L) - \theta(0, 0) = \pi$.

Nun betrachten wir das Intervall $\{(0, t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < t < L\}$. Für alle $0 < t < L$ $e(0, t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\}$. Also $e(0, t) \in \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$ für alle $t \in (0, L)$. Wegen der Bemerkung nach Lemma 1.39 nimmt $t \to \theta(0, t)$ sein Bild in einem Intervall der Form $(2\pi k, 2\pi(k + 1))$ an, $k \in \mathbb{Z}$. Wir haben

$$\begin{aligned} e(0, L) = -c'(0) = (0, -1) &\quad\Rightarrow\quad \theta(0, L) = \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ e(0, 0) = c'(0) = (0, 1) &\quad\Rightarrow\quad \theta(0, L) = \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{aligned}$$

somit gilt

$$\theta(0, L) - \theta(0, 0) = \pi.$$

Analog ist $(-1, 0)$ nicht im Bild der Abbildung $t \to e(t, L) = \frac{-c(t)}{\|c(t)\|} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\}$ und wir erhalten

$$\theta(L, L) - \theta(0, L) = \pi.$$

Also,

$$2\pi n_c = \pi + \pi = 2\pi.$$

■

Definition 1.40 (Konvexität)**.** Eine ebene Kurve heißt konvex, falls für jeden ihres Punktes gilt: Die Kurve liegt ganz auf einer Seite ihrer Tangente durch diesen Punkt.

Die Konvexitätabedingung $\Leftrightarrow$ für den Punkt $c(t_0)$ gilt es

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } t$$

oder

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } t.$$

Lemma 1.41. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Normalenfeld n. Dann ist c genau dann konvex, wenn für alle $t, t_0 \in I$ gilt*

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0$$

oder für alle $t, t_0 \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0.$$

Satz 1.42. *Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge einer einfach geschlossenen ebenen Kurve. Sei $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Krümmung. Die Kurve ist genau dann konvex, wenn $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. a) Gemäß Lemma 1.41 können wir annehmen, dass für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0.$$

Die Taylorentwicklung gibt uns

$$c(t) = c(t_0) + c'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\kappa(t_0)n(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2).$$

Die Skalarmultiplikation mit $n(t_0)$ liefert uns wegen $\langle c'(t), n(t) \rangle = 0$

$$0 \leq \langle c(t) - c(t_0) \rangle = \frac{1}{2}\kappa(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

somit $\kappa(t_0) \geq 0$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$.

b) Sei nun $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass die Kurve konvex ist. Wäre die Kurve nicht konvex, so gäbe es ein t_0, derart dass die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle,$$

sowohl negativ als auch positiv Werte annimmt. Sei t_2 der Maximum-Punkt von φ, d.h.,

$$\varphi(t_2) = \max \varphi > 0.$$

Sei t_1 der Minimum-Punkt von φ, d.h.,

$$\varphi(t_1) = \min \varphi < 0.$$

Also

$$\varphi(t_1) < 0 = \varphi(t_0) < \varphi(t_2)$$

und

$$\varphi'(t_1) = \varphi'(t_2) = 0.$$

Aus $\varphi'(t_1) = 0$ folgt $\langle c'(t_1), n(t_0) \rangle = 0$. Also ist

$$c'(t_1) = \pm c'(t_0).$$

Analog folgt

$$c'(t_2) = \pm c(t_0).$$

Von $\{c'(t_0), c'(t_1), c'(t_2)\}$ müssen also mindestens zwei übereinstimmen. Wir wählen $s_1, s_2 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass $c'(s_1) = c'(s_2)$, daraus gilt es

$$\theta(s_2) - \theta(s_1) = 2\pi k$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Aus $\theta' = \kappa \geq 0$ folgt, dass θ monoton ist und somit $\theta(s_2) - \theta(s_1) \geq 0$ und $k \geq 0$. Analog folgt $\theta(s_1 + L) - \theta(s_2) = 2\pi l \geq 0$. Die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(s_1 + L) - \theta(s_1)) = k + l = 1$$

nach dem Umlaufsatz. Also muss $k = 0$ oder $l = 0$ gelten. Sei z. B., $k = 0$. Es folgt $\kappa = \theta' = 0$ auf $[s_1, s_2]$ und somit ist c auf $[s_1, s_2]$ eine Gerade, d.h., für alle $s \in [s_1, s_2]$

$$c(s) = c(s_1) + (s - s_1)c'(s_1) = c(s_1) \pm (s - s_1)c'(t_0).$$

Dann erhalten wir für die Funktion φ

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \langle c(s) - c(t_0), n(t_0) \rangle \\ &= \langle c(s_1) \pm (s - s_1)c'(t_0) - c(t_0), n(t_0) \rangle \\ &= \langle c(s_1) - c(t_0), n(t_0) \rangle, \end{aligned}$$

für alle $s \in [s_1, s_2]$, d.h., φ ist konstant auf $[s_1, s_2]$. Also $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$. Das ist unmöglich. ■

Definition 1.43. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Man sagt, c hat einem Scheitel in $t_0 \in I$, falls

$$\kappa'(t_0) = 0.$$

Beispiel 1.44. Ellipse, die parametrisiert ist durch

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ c(t) &= (a\cos t, b\sin t) \end{aligned}$$

mit $0 < a < b$. Die Krümmung von c ist

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} \\ &= \frac{\det \begin{pmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \right\|^3} \\ &= \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

und

$$\kappa'(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2)\sin t\cos t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Also $\kappa'(t) = 0$ gilt genau dann, wenn

$$\sin t \cdot \cos t = 0,$$

d.h., $t = \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z}$. Damit hat die Ellipse genau vier Scheitel in $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Satz 1.45 (Vierscheitelsatz)**.** *Ist $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine periodische nach Bopgenlänge parametrisierte konvex ebene Kurve mit Periode L, dann hat c mindestens vier Scheitel in $[0, L)$.*

Lemma 1.46. *Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als zwei Punkten, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden und hat damit insbesondere unendlich viele Schnitt Punkte mit der Geraden.*

Lemma 1.47. *Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als einem Punkt tangential, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden.*

Beweis des Vierscheitelsatzes. Die Krümmung κ von c nimmt wegen der periodizität Maximum und Minimum an, somit haben wir schon zwei Scheitel. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass das Minimum in $t = 0$ und das Maximum in $t = t_0 \in (0, L)$ angenommen wird. Sei G die Gerade durch die beiden Punkte $c(0)$ und $c(t_0)$.

Gemäß Lemma 1.46 und Lemma 1.47 nehmen wir an, dass G keinen weiteren Punkte mit der Kurve gemein hat, ansonst die Krümmung auf einem ganzen Segment konstant 0 ist, und wir erhalten unendlich viele Scheitel.

Nach Anwendung einer euklidischen Bewegung können wir annehmen, dass G die x-Achse ist. Angenommen, die Kurve hat keine weitere Scheitel. Dann verschwindet κ' nirgends auf den beiden Intervallen $(0, t_0)$ und (t_0, L). Wegen $\int_0^L \kappa'(t) = \kappa(t) - \kappa(0) = 0$, muss κ' auf einen der beiden Intervall positiv, auf anderen negativ sein. Also nehmen wir ohne Einschränkung $\kappa'(t) > 0$ für $t \in (0, t_0)$ und $\kappa'(t) < 0$ für $t \in (t_0, L)$, somit

$$\int_0^L \kappa(t)' c_2(t) > 0.$$

Aber wir haben aus die Frenet-Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa'(t) c(t) dt &= -\int_0^L \kappa(t) c'(t) dt \\ &= \int_0^L n'(t) dt = n(L) - n(0) = 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Somit muss es einen dritten Scheitel geben, etwa in $t_1 \in (t_0, L)$. Angenommen, es gäbe keinen vierten Scheitel. Dann nehmen wir ohne Einschränkung an, dass es $\{s_1, s_2\} \subset \{0, t_0, t_1\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass κ' auf (s_1, s_2) positiv und auf $\mathbb{S}^1 \backslash \{s_1, s_2\}$ negativ ist, existiert. Verwenden wir die obige Methode, erhalten wieder ein Widerspruch. ■

Beweis des Lemmas. Sie $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierung nach Bogenlänge mit Periode L. Durch eine Parametertransformation $t \to \pm t + r_0$ können wir erreichen, dass $c(0)$ einee dree Schnittpunkte mit der Geraden ist und $\kappa \geq 0$

erfüllt. Die Winkelfunktion θ Aus Lemma 2.21 gilt die Winkelfunktion θ, $\theta'(t) = \kappa(t) \geq 0$. Nach dem Umlaufsatz ist $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi n_c = 2\pi$. Also ist

$$\theta : [0, L] \to [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$$

eine glatte monoton wachsende surjektive Funktion, wobei $\theta_0 = \theta(0)$ ist.

Die Kurve c schneide die Gerade G in den Punkten $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < L$. Sei G parametrisiert durch $t \cdot v + p_0$. Sei G parametrisiert durch $t \to t \cdot v + p_0$. Sei $n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$ der Normalenvektor von G.

Sei I eines der drei Intervall $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ und $[t_2, L]$. In den Endpunkten I liegt c auf der Gerade G. Wenn $c(t)$ für alle $t \in I$ auf G liegt, so enthält c ein Segment von G und das Lemma ist bewiesen. Nehmen wir also an, dass es auch Punkte $t \in I$ gibt, so dass $c(t)$ nicht auf G liegt. Nun betrachten wir die zu G parallel Gerade G_s, die durch

$$t \to s \cdot n + t \cdot v + p_0$$

parametrisiert werden. Falls $\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} \neq \emptyset$, definiert $s_1 := \sup\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\}$. Falls $\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} = \emptyset$, muss $\{s < 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} \neq \emptyset$, dann $s_: = \inf\{s < 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\}$.

1.5. **Raumkurven.**

Definition 1.48. Eine parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ ist parametrisierte Raumkurve. Analog sind reguläre parametrisierte Raumkuren, Raumkurven und orientierte Raumkurven definiert.

Jetzt haben wir ein Problem, den Normalenvektor zu definieren.

Definition 1.49 (Krümmung einer Raumkurve)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Die Funktion $\kappa : i \to \mathbb{R}, \kappa(t) := \|c''(t)\|$ heiß Krümmung von c.

Bemerkung. $a)$ Die Krümmung von c ist somit eine numerisch Funktion auf I, die nichtnegativ ist. Ferner, verschwindet c'' nirgends auf I, so ist $\kappa \in C^\infty$.

$b)$ Jetzt die Orientierung hat "kein Sinn". Sei $\bar{c} : -I \to \mathbb{R}^3$ die durch $\bar{c}(t) := c(-t)$ definierte Abbildung, dann ist $\bar{c}$ nach Bonglänge parametrisiert und ihre Krümmung $\bar{\kappa}$ ist gegeben durch

$$\bar{\kappa}(t) = \kappa(-t)$$

für alle $t \in -I$.

$c)$ Da die Ebene im 3-dimensioanlen Raum enthalten ist, etwa als $x - y$-Ebene, können wir ebene Kurven auch als Raumkurven ansehen. Somit wir jetzt für ebene Kurven zwei verschieden Definitionen der Krümmung. Ist $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Krümmung $\tilde{\kappa} : I \to \mathbb{R}$, und ist $c = (\tilde{c}, 0) : I \to \mathbb{R}^3$ dieselbe parametrisierte Kurve, aufgefasst als Raumkurve mit Krümmung $\kappa; I\mathbb{R}$, so gilt

$$\kappa(t) = \|c''(t)\| = \|(\tilde{c}''(t), 0)\| = \|\tilde{c}''(t)\| = |\tilde{\kappa}(t)|.$$

Definition 1.50 (Normalvektor)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \to I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt

$$n(t_0) := \frac{c''(t_0)}{\kappa(t_0)} = \frac{c''(t_0)}{\|c''(t_0)\|}$$

der Normalenvektor von c in t_0.

Definition 1.51 (Binormalvektor)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt

$$b(t_0) := c'(t_0) \times n(t_0)$$

der Binormalenvetor von c in t_0.

Definition 1.52. Die Orthonormalbasis $\{c'(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ heißt *begleitendes Dreibein* von c in t_0.

Definition 1.53 (Windung)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) \neq 0$. Sei $\{c'(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ das begleitendes Dreibein von c in t_0. Dann heißt

$$\tau(t_0) := \langle n'(t_0), b(t_0)\rangle$$

die *Windung* (oder auch die *Torsion*) von c in t_0.

Beispiel. (Schraubenlinie). Sei $c(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$ für $I = \mathbb{R}$. Aus $c'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, t)$ folgt $\|c'(t)\| = 1$ für alle t, d.h., c ist nach Bogenlänge parametrisiert. Aus $c''(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 0)$ folgt für die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Spur von $[c]$ heißt die Schraubenlinie. Ihre Normalenvektor und bzw. Binormalenvektor sind

$$n(t) = \frac{1}{\kappa(t)}c''(t) = -(\cos t, \sin t, 0),$$

bzw,

$$b(t) = c'(t) \times n(t) == \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1).$$

Aus $n'(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$ gilt

$$\tau(t) = \langle n', b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin^2 t + \cos^2 t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proposition 1.54 (Frenet-Gleichungen der Raumkurve)**.** *$c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung, $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in I$. Sei (c', n, b) das begleitende Dreibein von c. Sei τ die Windung. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Gleichung $(c')' = \kappa \cdot n$ ise gerade die Definition des Normalenvektors. Die zweite Spalte ergibt sich aus $\langle n', c' \rangle = \langle n, c' \rangle' - \langle n, c'' \rangle = -\kappa$, aus $\langle n', n \rangle = \frac{1}{2}\langle n, n \rangle' = 0$ und aus der Definition von τ, d.h., $\langle n', b \rangle = \tau$.

Wegen $\langle b', n \rangle = \langle b, c' \rangle' - \langle b, c'' \rangle = 0 - \kappa \langle b, n \rangle = 0$, $\langle b', n \rangle = \langle b, n \rangle' - \langle b, n' \rangle = -\tau$ und $\langle b', b \rangle = 0$, folgt die dritte Spalte. ∎

Definition 1.55. (Die Schmiegebene). $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung, $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in I$. Die von $c'(t)$ und $n(t)$ aufgespannte Ebene heißt *Schmiegebene* von c in t.

Proposition 1.56 (Invarianz der Krümmung und Torsion der euklidischen Bewegung)**.** *$c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung und A eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung. Dann ist $A \circ c : I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve und es gilt für die Krümmung bzw. die Windung von $A \circ c$:*

$$\kappa_{A \circ c} = \kappa, \quad \tau_{A \circ c} = \tau.$$

Satz 1.57 (Hauptsatz der Raumkurventheorie)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ C^∞ Funktionen, mit $f > 0$. Dann existiert eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit*

$$\kappa = f, \quad \tau = g.$$

Diese Kurve ist bis auf Dahinterschaltung von orientierungserhaltende euklidische Bewegung, d.h., sind c_1 und c_2 zwei Lösungen, so existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung A von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$c_2 = A \circ c_1.$$

Nun betrachten wir den stetigen Kurven. Sei $I = [a, b]$. Eine Zerlegung Z von I ist ein Tupel $(t_0, t_1 \cdots, t_N)$ mit $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq L_N = b$. Für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$L_Z(c) = \sum_{i=1}^{N} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|.$$

Definition 1.58 (rektifizierbare Kurve)**.** Sei $I = [a, b]$. Die Länge der paramerisierten stetigen Kurve $c = C^0(I, \mathbb{R}^n)$ ist

$$L(c) = \sup_Z L_Z(c) \in [0, \infty].$$

Ist $L(c) < \infty$, so heißt c rektifizierbar.

Lemma 1.59. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig mit Konstante $\mathrm{Lip}\,(c) < \infty$. Dann ist c rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) \leq \mathrm{Lip}\,(c)|I|.$$

Lemma 1.60. *Sei $s \in I = [a, b]$. Dann gilt für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$*

$$L(c) = L(c_{|[a,s]}) + L(c_{|[s,b]}).$$

Satz 1.61 (Bogenlängenformel). *Sei $c : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise C^1-Kurve. Dann ist c rektifizierbar und es gilt*

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| dt.$$

Beweis. Wir können $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ annehmen, denn für stückweise C^1-Kurven verwenden wir dann die C^1-Aussage auf jedem der Teilintervalle und addieren mit Lemma 1.60.

Für jede Zerlegung Z gilt

$$\begin{aligned} L_Z(c) &= \sum_{i=1}^N \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^N \| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(s)ds\| \leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|c'(s)\|ds \\ &= \int_a^b \|c'(s)\|ds. \end{aligned}$$

Also ist c rektifizierbar und es gilt

$$L(c) \leq \int_a^b \|c'(s)\|ds. \tag{1}$$

Jetzt betrachten wir die Bogenlängenfunktion von c

$$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \sigma(t) = L(c|_{[a,t]}), \tag{2}$$

und zeigen

$$\sigma'(t) = \|c'(t)\|, \quad \forall t \in [a,b].$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes durch Integration:

$$L(c) = \sigma(b) = \sigma(a) + \int_a^b \sigma'(s)ds = \int_a^b \|c'(s)\|ds.$$

Aus Definition der Bogenlänge und (1) haben wird

$$\frac{\|c(t_2) - c(t_1)\|}{t_2 - t_1} \leq \frac{L(c|_{[t_2,t_1]})}{t_2 - t_1} \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \|c'(s)\|dt.$$

Mit $\lambda(t) = \int_a^t \|c'(s)\|ds$ erhalten wir mit Lemma 1.60

$$\frac{\|c(t_2) - c(t_1)\|}{t_2 - t_1} \leq \frac{\sigma(t_2) - \sigma(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{\lambda(t_2) - \lambda(t_1)}{t_2 - t_1}$$

und (2) ergibt sich mit $t_2 \searrow t_1$ bzw. $t_1 \nearrow t_2$. ■

2. Klassische Flächentheorie

2.1. Reguläre Flächen.

Definition 2.1 (Reguläre Fläche)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. S heißt eine *reguläre Fläche*, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V von p im $\mathbb{R}^3$ gibt, falls es ferner eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^3$ gibt, so dass gilt

(i) $F(U) = S \cap V$ und $F : U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.
(ii) Die Jacobimatrix $D_u F$ hat für jeden Punkt $u \in U$ Rang 2.

Bemerkung. a). Eine reguläre Fläche kann sich nicht selbstschneiden.
b). $D_u F(e_1)$ and $D_u F(e_2)$ sind unabhängig.

Definition 2.2 (Parametrisierung)**.** Die Abbildung $F : U \to S \cap V$ aus Definition 2.1 oder auch als das Tripel (U, F, V) heißt *locale Parametrisierung* von S um p. Die Menge $S \cap V$ heißt Koordinatenumgebung von p. Die Komponenten u^1 und u^2 von $u = (u^1, u^2)$ heißen dann auch Koordinaten des Punktes $F(u) \in S$ (bzgl. der Parametrisierung F).

Beispiel 2.3. 1). Affine Ebene.

Die affine Ebene durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^3$, aufgespannt durch die linear unabhängigen Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ ist die Menge

$$S = \{p + u^1 \cdot x + u^2 \cdot Y \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Wir kommen mit einer einzigen Parametrisierung aus. Setzt $V := \mathbb{R}^3$, $U := \mathbb{R}^2$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$

$$F(u^1, u^2) := p + u^1 \cdot x + u^2 \cdot Y.$$

2). Funktionsgraphen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Der Funktionsgraph von f ist definiert durch

$$S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Setzte $V := \mathbb{R}^3$, $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Dann gilt $F(U) = S = S \cap V$. F is glatt und ihre Umkehrabbildung $G : S \to U$, $G(x, y, z) = (x, y)$ ist ebenfalls stetig. Also (i) ist erfüllt. Für (ii) hat die Funktion

$$D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Rang 2.

3). Die Sphäre

$$S = \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Setzte $V := V_3^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. Dann ist $\mathbb{S}^2 \cap V_3^+$ der graph der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \quad \text{für } x^2 + y^2 < 1.$$

Wie Beispiel 2) definiert

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$$

und

$$F_3^+(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}).$$

$F_3^+; U \to \mathbb{S}^2 \cap V_3^+$ ist eine lokale Parametrisierung . Analog erhalten wir die Punkte aus $\mathbb{S}^2 \cap V_3^-$, $V_3^- := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z < 0\}$ durch die Parametrisierung

$$\begin{array}{rcl} F_3^- : U & \to & \mathbb{R}^3 \\ F_3^-(x, y) & = & (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}). \end{array}$$

Und auch

$$\begin{array}{rcl} V_1^\pm : & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \pm x > 0\} \\ V_2^\pm : & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \pm y > 0\} \\ . & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} F_1^\pm : U \to \mathbb{R}^3 & F_1^\pm(y, z) = (\pm\sqrt{(1 - (y^2 + z^2)}, y, z) \\ F_2^\pm : U \to \mathbb{R}^3 & F_1^\pm(x, z) = (x, \pm\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z). \end{array}$$

Jeder Punkt $p \in \mathbb{S}^2$ kommt in wenigstens einer der Mengen $V_i^\pm$ vor, also ist $\mathbb{S}^2$ eine reguläre Fläche.

Proposition 2.4. *Sei $V_0 \in \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : V_0 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir setzen*

$$S := \{(x, y, z) \in V_0 \,|\, f(x, y, z) = 0\}.$$

Falls für alle $p \in S$ gilt

$$\text{grad} f(p) \neq 0,$$

dann ist S eine reguläre Fläche.

Beweis. Sei $p := (x_0, y_0, z_0)^t \in S$. Wgene der Voraussetzung

$$\text{grad} f(p) = (\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p))^t \neq (0, 0, 0)^t,$$

können wir oBdA annehmen, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0.$$

Nach dem Satz diruber implizierte Funktionen existiert es eine offene Umgebung $V \subset V_0$ von p, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$S \cap V = \{(x, y, g(x, y))^t \;|\, (x, y)^t \in U\}.$$

Setzen wir $F : U \to V$ mit

$$F(x, y) := (x, y, g(x, y))^t,$$

so erhalten wir eine lokale Parametrisierung von S.

■

Beispiel. 4) Ellipsoid: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Setze $V_0 = \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Also

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y,z) = 0\}.$$

Wir können überprüfen, dass

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}) \neq 0 \text{ für } (x,y,z) \in S.$$

Proposition 2.5. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$. Dann gibt es eine Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$, so dass $S \cap V$ der Funktionsgraph einer glatten Funktion ist, die eine der folgenden drei Formen hat: $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$, $x = h(y,z)$.*

Beispiel. Der Doppelkegel.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2\}$$

ist keine reguläre Fläche. Aber $S \backslash \{0\}$ ist eine reguläre Fläche.
Beweis. Fläche S ist Nullstellengebilde der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ f(x,y,z) & = & x^2 + y^2 - z^2, \end{array}$$

definiert. Der Gradient

$$\mathrm{grad}\ f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)^t$$

verschwindet nur in $(0,0,0)^t$. Also man kann mit Proposition 2.4 zeigen, dass $S \backslash \{0\}$ eine reguläre Fläche ist. Proposition 2.4 sagt darüber nicht aus, dass die Funktion f könnte für den Punkt $(0,0,0)^t$ ungeschickt gewählt sein.

Angemonnen, dass S wäre eine reguläre Fläche. Dann gäbe es eine lokale Parametrisierung (F, U, V) um $p = (0,0,0)^t$. Setze $u_0 = F^{-1}((0,0,0)^t)$. OBdA können wir annemhen, dass U eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt u_0 ist. Da $V \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von $p = (0,0,0)^t$, sind alle Vektoren $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ mit hinrechend kleiner Länge in V enthalten. Insbesondere liegen in $S \cap V$ Punkte $p_i = (x_i, y_i, z_i)^t$ $(i = 1, 2)$ mit $z_1 > 0$ und $z_2 < 0$.

Seien $u_i := F^{-1}(p_i)$ $(i = 1, 2)$. In U verbinden wir u_1 durch einen stetigen Weg c mit u_2 ohne durch u_0 zu laufen. Der Bildweg $F \circ c$, der p_1 und p_2 verbindet, muss aber, wegen des Zwischenwertsatzes, durch $p = (0,0,0)^t = F(u_0)$ laufen. Ein Widerspruch ■

Proposition 2.6. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S. Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $\varphi(W) \subset S \cap V$. Dann ist φ als Abbildung von W nach $\mathbb{R}^3$ glatt genau dann, wenn $F^{-1} \circ \varphi : W \to U \subset \mathbb{R}^2$ glatt ist.*

Beweis.
" $\Leftarrow$ " $\Psi = F^{-1} \circ \varphi$ ist glatt, so ist $\varphi = F \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen ebenfalls glatt.

" $\Rightarrow$ " Sei also $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ glatt. Setze $g := \varphi(p) \in S \cap V$ und $u_0 := F^{-1}(g) \in U$. Schreiben $F(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2))$. Weil das Differential $D_{u_0}F$ maximalen Rang hat, kïnen wir o.E.d.A. annehmen, dass die 2×2- Matrix $(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1,u^2)}, u_0)$ invertierbar ist. Definieren die Abbildung:

$$\begin{aligned} G : U &\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ G(u^1, u^2, t) &= (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) + t) \end{aligned}$$

Ihr Differential an der Stelle $(u^1, u^2, t) = (u_0^1, u_0^2, 0)$ ist:

$$D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial x}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial y}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial z}{\partial u^2}(u_0) & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist:

$$\det D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G = \det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1, u^2)}(u_0)) \neq 0$$

Nach dem Umkehrsatz haben wir eine offene Umgebung $U_1 \subset U \times \mathbb{R}$ von $(u_0^1, u_0^2, 0)$ und eine offene Umgebung $V_1 \subset V$ von g, so dass $G_{|U_1} : U_1 \to V_1$ ein Diffeomorphismus ist. Setze $W_1 := \varphi^{-1}(V_1)$. Dann ist W_1 eine offene Umgebung von p. Für alle $p' \in W_1$ gilt:

$$G^{-1} \circ \varphi(p') = (F^{-1} \circ \varphi(p'), 0)$$

denn $G(F^{-1} \circ \varphi(p'), 0) = F \circ F^{-1} \circ \varphi(p') = \varphi(p')$. Weil $G^{-1} \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt ist, ist $F^{-1} \circ \varphi$ als die Erste der Zweite Koordinatenfunktionen auch glatt auf W_1. Nun ist W_1 eine offene Umgebung des beliebigen vorgegebenen Punktes p und die Aussage ist bewiesen. ∎

Korollar 2.7. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, seien (U_1, F_1, V_1), (U_2, F_2, V_2) lokale Parametrisierungen von S. Dann ist $F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ glatt.*

Beweis. Anwendung von Prop.2.6. auf $W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$, $\varphi = F_1$ und $(U, F, V) = (V_2, F_2, V_2)$ ∎

Proposition 2.8. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$, und $f : S \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

1). *Es gibt eine offene Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$ und eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von $f_{S \cap V}$ auf V, die um p glatt ist.*
2). *Es gibt eine lokale Parametrisierung (U, F, V) mit $p \in V$, so dass $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.*
3). *Für alle lokalen Parametrisierungen (U, F, V) mit $p \in V$, so dass $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.*

Beweis.
a. "1. impliziert 3." Da F und $\tilde{f}$ glatt um p sind, also ist auch

$$f \circ F = \tilde{f} \circ F$$

als Verkettung eine glatte Abbildung auf einer Umgebung von $F^{-1}(p)$

b. "3. impliziert 2." trivialerweise

c. "2. impliziert 1." Aus dem Beweis von Prop.2.6. wissen wir, dass

$$G(u^1, u^2, t) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) + t)$$

ein lokaler Diffeomorphismus ist. Wir setzen:

$$g(u^1, u^2, t) := f \circ F(u^1, u^2) = f \circ G(u^1, u^2, 0)$$

g ist glatt nahe $(F^{-1}(p), 0)$. Setzen $\tilde{f} := g \circ G^{-1}$. $\tilde{f}$ ist glatt um p und ist eine Fortsetzung von f, denn:

$$\tilde{f}_{|S \cap V} = f_{|S \cap V}$$

■

Definition 2.9. Gelten die äquivalenten Bedingungen 1). bis 3). aus Propostion 2.8, so nennen wir f glatt nahe p.

Definition 2.10. Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Sei $p \in S_1$ und $f : S_1 \to S_2$ eine Abbildung. We nennen f glatt nahe p, falls es eine lokale Parametrisierung (U_1, F_1, V_1) von S_1 um p gibt und eine lokale Parametrisierung (U_2, F_2, V_2) von S_2 um $f(p)$ derart, dass

$$F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \to V_2$$

nahe p glatt ist.

Bemerkung. Sind neben (U_1, F_i, V_i) auch $(\widetilde{U}_1, \widetilde{F}_i, \widetilde{V}_i)$ lokale Parametrisierung von S_i, so ist mit $F_2^{-1} \circ f \circ F_1$ auch

$$\widetilde{F}_2^{-1} \circ f \circ \widetilde{F}_1 = (\widetilde{F}_2^{-1} \circ F_2) \circ (F_2^{-1} \circ f \circ F_1) \circ (F_1^{-1} \circ \widetilde{F}_1)$$

glatt ist.

Definition 2.11. Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Eine Abbildung $f : S_1 \to S_2$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f auch f^{-1} glatt sind. Existiert ein solcher Diffeomorphismus $f : S_1 \to S_2$, dann heißen die Flächen S_1 und S_2 diffeomorph.

Beispiele a). Sei $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, $a, b, c > 0$ ein Ellipsoid. Sei $S_2 = S^2$ die Sphäre. Dann sind S_1 und S_2 diffeomorph. Als Diffeomorphismus nehmen wir z.B.

$$\begin{aligned} f : S_1 &\to S_2 \\ f(x, y, z) &= (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}) \end{aligned}$$

b). Sei $S_1 := \{(x, y, \varphi(x, y)) : (x, y) \in U\}$ der Graph einer C^∞-Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Sei $S_2 = U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ das Ebenenstück U, aufgefasst als Fläche in $\mathbb{R}^3$. Dann sind S_1 und S_2 diffeomorph vermöge des Diffeomorphismus:

$$\begin{array}{rcll} f : S_1 & \to & S_2 & f(x, y, z) = (x, y, 0) \\ f^{-1} : S_2 & \to & S_1 & f(x, y, 0) = (x, y, \varphi(x, y)) \end{array}$$