2.2. **Die Tangentialebene.**

Definition 2.12 (Tangentialebene)**.** Sei S eine reguläre Fläche, sei $p \in S$. Dann heißt

$$T_pS = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ und eine glatte parametrisierte Kurve} \\ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \text{ mit } c(0) = p \text{ und } c'(0) = X \end{array} \right\}$$

die *Tangentialebene* von S in p. Die Elemente der Tangentialebene heißen *Tangentialvektoren.*

Proposition 2.13. *Sei S eine reguläre Fläche, sei $p \in S$. Sei ferner (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S um p. Wir setzen $u_0 := F^{-1}(p) \in U$. Dann gilt*

$$T_pS = \mathrm{Bild}(D_{u_0}F) = D_{u_0}F(\mathbb{R}^2).$$

Beweis.
a. "$\supset$" Sei $X \in Bild(D_{u_0}F)$, d.h. es gibt ein $Y \in \mathbb{R}^2$ mit $X = D_{u_0}F(Y)$. Setze $c(t) := F(u_0 + tY)$. $c(t)$ ist eine glatte Kurve auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ für ein kleines $\varepsilon > 0$. Es folgt

$$c(0) = F(u_0) = p$$

und

$$c'(0) = \frac{d}{dt} F(u_0 + tY)_{|t=0} = D_{u_0}F(Y) = X.$$

Somit gilt $X \in T_pS$.

b. "$\subset$" Sei $X \in T_pS$, d.h. es gebe eine glatte Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. O.E.d.A. können wir annehmedirn, dass c ganz in V verläuft. Gemäß Prop.2.6. ist

$$u := F^{-1} \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$$

eine glatte (ebene) parametrisierte Kurve. Setze

$$Y := u'(0) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt

$$D_{u_0}F(Y) = \frac{d}{dt}(F \circ u)_{|t=0} = \frac{d}{dt} c_{|t=0} = X.$$

Somit gilt $X \in Bild(D_{u_0}F)$. ∎

Beispiele.
1. Sei $S := p_0 + E_0$ eine affine Ebene und $\{x_1, x_2\}$ eine Basis von E_0. (U, F, V) $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, F : U \to V, F(u_1, u_2) = p_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2$ eine globale Parametrisierung von S. Für $p = F(u_0)$ $(u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in U)$ gilt aus Proposition 2.13,

$$\begin{aligned} T_pS &= D_{u_0}F(\mathbb{R}^2) \\ &= \{t^1 x_1 + t^2 x_2 : (t^1, t^2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= E_0. \end{aligned}$$

2. Sei S der Graph einer C^∞- Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ d.h. $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$ (U, F, V) $V = \mathbb{R}^3$ $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ eine globale Parametrisierung. Sei $p = F(u_0) = (u_0^1, u_0^2, f(u_0^1, u_0^2))$. Gemäß Proposition 2.13,

$$\begin{aligned} T_pS &= D_{u_0}F(\mathbb{R}^2) \\ &= \mathbb{R}(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)) \oplus \mathbb{R}(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)). \end{aligned}$$

Korollar 2.14. *Da $D_{u_0}F$ Rang 2 hat, bildet $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ einen zweidimensionalen Untervektorraum.*

Proposition 2.15. *Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sei $S = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$. Es gelte $\mathrm{grad} f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$. Dann steht für $p \in S$ der Gradient von f senkrecht auf die Tangentialebene*

$$T_pS = \mathrm{grad} f(p)^\perp.$$

Beweis. Sei $X \in T_pS$, d.h. es gebe eine glatte Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Da c in S verläuft, gilt $(f \circ c)(t) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Beim Ableiten haben wir:

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ c)_{|t=0} = \langle \nabla f(p), c'(0) \rangle = \langle \nabla f(p), X \rangle.$$

Also $X \perp \nabla f(p)$. Wir haben somit gezeigt, dass $T_pS \subset \nabla f(p)^\perp$. Da beide Untervektorräume T_pS und $\nabla f(p)^\perp$ des $\mathbb{R}^3$ Dimension 2 haben folgt:

$$T_pS = \nabla f(p)^\perp.$$

∎

Beispiel. Die Sphäre wird beschrieben durch $S^2 = f^{-1}(0)$ wobei $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Man kann berechnen: $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$. Die Tangentialebene $T_pS^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), v \rangle = 0\}$

Definition 2.16 (Differential)**.** Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ regulare Flächen, sei $f : S_1 \to S_2$ eine glatte Abbildung, und sei $p \in S_1$. Das *Differential* von f in p ist die Abbildung

$$df : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2,$$

die gegeben ist durch folgende Vorschrift: Zu $X \in T_pS_1$ wähle eine glatte parametrisierte Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$ und setze

$$d_pf(X) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ c) \in T_{f(p)}S_2.$$

Proposition 2.17. *Durch Definition 2.16 ist das Differential d_pf wohldefiniert, d.h., $d_pf(X)$ hängt nur von X ab, nicht aber von der speziallen Wahl der Kurve c. Ferner ist das Differential d_pf linear.*

Beweis. Sei (U_1, F_1, V_1) (bzw. U_2, F_2, V_2) eine lokale Parametrisierung von S_1 um p (bzw. von S_2 um $f(p)$). Nach eventueller Verkleinerung von U_1 und V_1 können wir annehmen, dass $f(S \cap V_1) \subset V_2$. Setze

$$\tilde{f} := F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \to U_2$$

und $u_0 := F_1^{-1}(p) \in U_1$. Zur Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$ setzen wir

$$u := F_1^{-1} \circ : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U_1.$$

Wie im Beweis von Proposition 2.2 haben wir $D_{u_0} F_1(u(0)) = X$. Es folgt

$$\begin{aligned} d_p f(X) &= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ F_1 \circ u)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(F_2 \circ \tilde{f} \circ u)|_{t=0} \\ &= D_{u_0}(F_0 \circ \tilde{f})(u'(0)) = D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f}) \circ (D_{u_0} F_1)^{-1}(X) \end{aligned}$$

■

Proposition 2.18 (Kettenregel)**.** *Seien S, S', S'' reguläre Flächen und $f : S \to S'$, $g : S' \to S''$ Abbildungen. Sei $p \in S$. Ist f differenzierbar in p und g differenzierbar in $f(p)$, so ist $g \circ f$ differenzierbar in p und es gilt*

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)} g \circ d_p f.$$

Beweis. Sei (U, F, V) bzw. (U', F', V'), (U'', F'', V'') eine lokale Parametrisierung von S um p bzw. von S' um $f(p)$, von S'' um $g \circ f(x)$, so dass $F_0(U_0) \subset (S' \cap V')$ und $F'(U') \subset (S'' \cap V'')$. Dann gilt:

$$(F'')^{-1} \circ (g \circ f) \circ F = \underbrace{(F'')^{-1} \circ g \circ (F')}_{C^\infty} \circ \underbrace{(F')^{-1} \circ f \circ F}_{C^\infty}$$

Wie im Beweis von Prop. 2.6 haben wir:

$$\begin{aligned} d_p(g \circ f) &= DF'' \circ D((F'')^{-1} \circ (g \circ f) \circ F) \circ (DF)^{-1} \\ &= DF'' \circ D((F'')^{-1} \circ g \circ F' \circ (F')^{-1} \circ f \circ F) \circ (DF)^{-1} \\ &\underbrace{=}_{K.} DF'' \circ D((F'')^{-1} \circ g \circ F') \circ D((F')^{-1} \circ f \circ F) \circ (DF)^{-1} \\ &= \underbrace{DF'' \circ D((F'')^{-1} \circ g \circ F') \circ (DF')^{-1}}_{d_{f(p)} g} \circ \underbrace{(DF') \circ D((F')^{-1} \circ f \circ F) \circ (DF)^{-1}}_{d_p f} \\ &= d_{f(p)} g \circ d_p f \end{aligned}$$

■

2.3. **Die erste Fundamentalform (Metrik).**

Definition 2.19 (die erste Fundamentalform)**.** Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Sei T_pS die Tangentialebene von S in p. Die *erste Fundamentalform* (oder *Metrik*) von S in p ist definiert durch

$$I_p(X,Y) = g_p(X,Y) := \langle X, Y \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Bemerkung. Nach Definition ist g_p die Einschränkung des kanonischen Skalarprodukts auf T_p; insbesonders g_p ist positiv-definite symmetrische Bilinearform auf T_pS.

Definition 2.20 (die Matrxdarstellung von der ersten Fundamentalform)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S. Sind e_1 und e_2 die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^2$, so bilden $D_uF(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u^1}(u)$ und $D_uF(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)$, $u = F^{-1}(p)$, eine Basis von T_pS. Bezüglich dieser Basis ist die Matrxdarstellung von g_p dann gegeben durch

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &:= g_p(D_uF(e_1), D_uF(e_2)) \\ &= \Big\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) \Big\rangle \end{aligned}$$

für alle $1 \leq i, j \leq 2$.

Beispiel. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die von den Vektoren X und Y aufgespannt wird durch den Punkt p_0.

$$F(u^1, u^2) = p_0 + u^1 X + u^2 Y$$

Die erste Fundamentalform bzgl. dieser Parametrisierung

$$\begin{aligned} g_{11}(u^1,u^2) &= \langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1,u^2), \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1,u^2) \rangle = \langle X, X \rangle \\ g_{12}(u^1,u^2) &= \langle \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1,u^2), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1,u^2) \rangle = \langle X, Y \rangle \\ g_{21}(u^1,u^2) &= \langle \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1,u^2), \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^1,u^2) \rangle = \langle Y, X \rangle \\ g_{22}(u^1,u^2) &= \langle \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1,u^2), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^1,u^2) \rangle = \langle Y, Y \rangle \end{aligned}$$

Ist S z.B. die x-y-Ebene und sind (u^1, u^2) kartesische Koordinaten, d.h. $p_0 = 0$, $X = e_1$ und $Y = e_2$, so wird die erste Fundamentalform durch die Matrix

$$(g_{ij}(u))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Man kann durch die x-y-Ebene durch Polarkoordinaten parametrisieren.

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \quad (0,\infty) &\times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \\ \tilde{F}(r,\varphi) &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0). \end{aligned}$$

Die erste Fundamentalform berechnet sich nun zu:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{11}(r,\varphi) &= \langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi), \frac{\partial\tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi)\rangle = \langle\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\rangle = 1\\
\tilde{g}_{12}(r,\varphi) &= \langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi), \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\varphi}(r,\varphi)\rangle = \langle\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\rangle = 0\\
\tilde{g}_{21}(r,\varphi) &= \langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\varphi}(r,\varphi), \frac{\partial\tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi)\rangle = \langle\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}\rangle = 0\\
\tilde{g}_{22}(r,\varphi) &= \langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\varphi}(r,\varphi), \frac{\partial\tilde{F}}{\partial\varphi}(r,\varphi)\rangle =< \begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\rangle = r^2.
\end{aligned}$$

Die erste Fundamentalform bzgl. Polarkoordinaten ist:

$$(\tilde{g}_{ij}(r,\varphi))_{ij} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{pmatrix}.$$

Beispiel. (Zylinderfläche). Wir betrachten Zylinderfläche

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Wir parametrisieren sie durch

$$\begin{aligned}
F: \quad (0,2\pi) &\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\\
F(\varphi,h) &= (\cos\varphi, \sin\varphi, h).
\end{aligned}$$

Für die erste Fundamentalform ergibt sich bzgl. der Koordinaten $(u^1,u^2) = (\varphi,h)$:

$$\begin{aligned}
g_{11}(\varphi,h) &= \langle\frac{\partial F}{\partial\varphi}(\varphi,h), \frac{\partial F}{\partial\varphi}(\varphi,h)\rangle = \langle\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\rangle = 1\\
g_{12}(\varphi,h) &= \langle\frac{\partial F}{\partial\varphi}(\varphi,h), \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi,h)\rangle = \langle\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \cos 0\\ 1\end{pmatrix}\rangle = 0\\
g_{21}(\varphi,h) &= \langle\frac{\partial F}{\partial h}(\varphi,h), \frac{\partial F}{\partial\varphi}(\varphi,h)\rangle = \langle\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\rangle = 0\\
g_{22}(\varphi,h) &= \langle\frac{\partial F}{\partial h}(\varphi,h), \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi,h)\rangle = \langle\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\rangle = 1.
\end{aligned}$$

Also die Matrix ist

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

wie die von der Ebene.

Beispiel. Wir berechnen die erste Fundamentalform der Sphäre

$$S^2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

in Polarkoordinaten $(u^1, u^2) = (\theta, \varphi)$ ergibt das insgesamt:

$$\begin{aligned} F: \quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) &\times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \\ F(\theta, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ (g_{ij}(\theta, \varphi))_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lemma 2.21. *Sei S eine reguläre Fläche und $p \in S$. Seien (U, F, V) und $(\widetilde{U}, \widetilde{F}, \widetilde{V})$ lokale Parametrisierungen um p, und $g_{ij}(u)_{ij}$ bzw. $(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}))_{ij}$ die lokale Darstellung von der ersten Fundamentalform bzgl. (U, F, V) bzw. $(\widetilde{U}, \widetilde{F}, \widetilde{V})$ wie in Definition 2.20. Setze*

$$\varphi := \widetilde{F}^{-1} \circ F : F^{-1}(F(U) \cap \widetilde{F}(\widetilde{U})) \to \widetilde{F}^{-1}(F(U) \cap \widetilde{F}(\widetilde{U}))$$

wie in Korollar 2.7. Dann gilt

$$g_{ij}(u) = \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i} \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j} \tilde{g}_{kl}(\varphi(u)) \qquad (\tilde{u} = \varphi(u)).$$

In Matrixschreibweis lautet diese Gleichung

$$(g_{ij}(u))_{ij} = D_u\varphi^* \cdot (\tilde{g}_{kl}(\varphi(u))_{kl} \cdot D_u\varphi.$$

Beweis. Nach der Kettenregel haben wir:

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= I(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u)) \qquad (F = \tilde{F} \circ \varphi) \\ &= I(\frac{\partial(\tilde{F} \circ \varphi)}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u)) \\ &\underbrace{=}_{\text{Kettenregel}} I(\sum_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^k}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u), \sum_l \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^l}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u)) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u) I(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^k}(\varphi(u)), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^l}(\varphi(u))) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u) \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u) \tilde{g}_{kl}(\varphi(u)). \end{aligned}$$

∎

2.4. **Normalenfelder und Orientierbarkeit.**

Definition 2.22 (Normalenfeld)**.** Sei S eine reguläre Fläche. Ein *Normalenfeld* auf S ist eine Abbildung

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

so dass $N(p) \perp T_pS$ für $p \in S$. Ein Normalenfeld auf S heißt *Einheitsnormalenfeld*, falls zusätzlich

$$\|N(p)\| = 1$$

gilt für alle $p \in S$.

Bemerkung. • Mit N auch $-N$ ein (Einheits-)Normalenvektor ist.
• Stetige Einheitsnormalenfeld kann, muss es aber auf einer reguläre Fläche nicht geben.

Beispiel. Sei $S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ die x-y-Ebene in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $N(x, y, 0) = (0, 0, 1)$ ein konstantes Einheitsnormalenfeld.

Beispiel. Sei $S = S^2$. Dann erhalten wir ein Einheitsnormalenfeld durch $N = Id$, d.h. $N(x, y, z) = (x, y, z)$.

Beispiel. Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche. Dann ist durch $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ ein Einheitsnormalenfeld definiert.

Beispiel. (Möbiusband). Das Möbiusband.

Definition 2.23 (orientierbare Fläche)**.** Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt *orientierbar*, falls es ein glattes Einheisnormalenvektorfeld auf S gibt.

Bemerkung. Reguläre Flächen S im Kleinen sind stets orientierbar.

Definition 2.24 (Orientierung)**.** Eine *Orientierung* auf einer orientierbaren regulären Fläche besteht aus der Wahl eines stetigen Einheitsnormalenfeld auf der Fläche.

Eine orientierbare Fläche zusammen mit einer orientierung nennt man *orientierte Fläche.*

Satz 2.25. *Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ ist genau dann orentierbar, wenn eine eine Familie $(U_i, F_i, V_i)_{i \in I}$ von lokalen Parametrisierung von S so existiert, dass*

• *$\cup_{i \in I}(S \cap V_i) = S$ (die $V_i \cap S$'s überdecken S) und die $V_i \cap S$'s sind zusammenhängend,*

• *für alle $i, j \in I$ mit $S \cap V_i \cap V_j \neq \emptyset$ und für alle $u \in F_i^{-1}(S \cap V_i \cap V_j)$ gilt*

$$\det(D_u(F_j^{-1} \circ F_i)) > 0.$$

Beweis. " $\Rightarrow$ " Angenommen S ist orientierbar. Sei $N : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges (glattes) Einheitsnormalenfeld auf S. Sei $p \in S$ und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S um p mit U zusammenhängend (bis auf Einschränkung von U ist dies immer mgl). Aus Bemerkung vor der Definition 2.24 gilt dann: entweder:

$$\begin{aligned} \det(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u), N(F(u))) &> 0 \quad \forall u \in U \quad \text{oder} \\ \det(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u), N(F(u))) &< 0 \quad \forall u \in U \end{aligned}$$

Im ersten Fall lassen wir (U, F, V) unverändert. Im zweiten Fall ersetzen wir (U, F, V) durch $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ wobei $\tilde{U} := \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : (u^2, u^1) \in U\}$, $\tilde{F}(u^1, u^2) := F(u^2, u^1)$ und $\tilde{V} := V$. Es ist klar, dass $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ eine lokale Parametrisierung von S um p mit $\tilde{F}(\tilde{U}) = F(U)$ und

$$\begin{aligned} \det(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial u^1}(u), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u^2}(u), N(\tilde{F}(u))) &= \det(\frac{\partial F}{\partial u^2}(u^2, u^1), \frac{\partial F}{\partial u^1}(u^2, u^1), N(F(u^2, u^1))) \\ &= -\det(\frac{\partial F}{\partial u^1}(u^2, u^1), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u^2, u^1), N(F(u^2, u^1))) \\ &> 0 \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Klar. ∎

2.5. **Die zweite Fundamentalform.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N. Aufgefasst als Abbildung zwischen Flächen, nämlich $N : S \to \mathbb{S}^2$, heißt N auch *Gauß-Abbildung.*

Definition 2.26 (Die Weingarten-Abbildung)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $p \in S$. Die *Weingarten-Abbildung* von S in p wird definiert durch

$$\begin{aligned} W_p : T_pS &\to T_p \\ W_p(X) &= -d_pN(X). \end{aligned}$$

Bemerkung. Das Differential ist $d_pN : T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Nun ist $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = N(p)^\perp = T_pS$.

Beispiel. Sei $S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ die x-y-Ebene, $N(x, y, z) = (0, 0, 1)$ konstant. Also

$$W_p = 0 \quad \forall p \in S.$$

Beispiel. Sei $S = S^2$. Sei N das äußere Einheitsnormalenfeld, $N(p) = p$. Dann ist

$$W_p = -Id : T_pS^2 \to T_pS^2.$$

Beispiel. Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder. $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. In einem Punkt $p = (x, y, z) \in S$ wird die Tangentialebene T_pS aufgespannt durch die Basisvektoren $(-y, x, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Wählen

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (x, y, z + t) \quad \text{und} \\ c_2(t) &= (\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), z) \quad \text{wobei} \\ t_0 : \quad (\cos t_0, \sin t_0) &= (x, y) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} W_p(0, 0, 1) &= -d_pN(0, 0, 1) = -\frac{d}{dt}N(c_1(t))|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}(x, y, 0)|_{t=0} = 0, \\ W_p(-y, x, 0) &= -d_pN(-y, x, 0) = -\frac{d}{dt}N(c_2(t))|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}(\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), 0)|_{t=0} \\ &= (\sin t_0, -\cos t_0, 0) = -(-y, x, 0) \end{aligned}$$

In der Basis $(-y, x, 0)$ und $(0, 0, 1)$ hat W_p also als Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.27. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche mit der Weingarten-Abbildung $W_p : T_pS \to T_pS$, $p \in S$. Dann ist W_p selbstadjungiert bzgl. der ersten Fundamentalform, d.h.,*

$$I_p(X, W_p(Y)) = I_p(W_p(X), Y)$$

für alle $X, Y \in T_pS$.

Beweis. Sei N das Einheitsnormalenfeld von S und $W_p = -d_pN$. Wähle eine lokale Parametrisierung (U, F, V) um p und setze $u := F^{-1}(p)$. Seien $X_i := D_uF(e_i) = \frac{\partial F}{\partial u^i}(u)$ für $i = 1, 2$. Da N überall senkrecht auf S steht, gilt:

$$< \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) >\equiv 0$$

Beim Ableiten dieser Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j))\rangle|_{t=0} \\
&= \langle \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), N(F(u + te_j))\rangle|_{t=0} \\
&\quad +\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u + te_j), \frac{d}{dt}N(F(u + te_j))\rangle|_{t=0} \\
&\underbrace{=}_{K} \langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p)\rangle + \langle X_i, -W_p(X_j)\rangle
\end{aligned}$$

Es folgt also:

$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = \langle X_i, W_p(X_j)\rangle = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p)\rangle.$$

Nach dem Satz von Schwarz haben wir:

$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = I_p(X_j, W_p(X_i)).$$

Da $\{X_1, X_2\}$ eine Basis von T_pS und $(X, Y) \to I_p(W_p(X), Y)$ bilinear ist, gilt die Behauptung. ■

Definition 2.28 (Die zweite Fundamentalform)**.** Die zur Weingarten-Abbildung gehörige Bilinearform heißt *zweite Fundamentalform* (der Fläche S in p):

$$II_p(X, Y) := I_p(W_p(X), Y), \quad X, Y \in T_pS.$$

Definition 2.29 (Die Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform)**.** Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S (orientierter regulärer Fläche). Dann wird für jedes $u \in U$ die 2×2 matrix $(h_{ij}(u)_{ij})$ definiert durch

$$\begin{aligned}
h_{ij}(u) &:= II_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j)) \\
&= I_p(W_p(D_uF(e_i)), D_uF(e_j)) \\
&= \langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p)\rangle.
\end{aligned}$$