2.6. **Die Krümmung.** Nach Proposition 2.27 ist die Weingarten-Abbildung $W_p : T_pS \to T_pS$ stets selfstadjungiert. Aus linear Algebra können wir eine Orthonormalbasis X_1, X_2 von T_pS finden, so dass

$$W_p(X_i) = \kappa_i \cdot X_i, \qquad i = 1, 2.$$

X_i sind die Eigenvektoren von W_p und κ_i die Eigenwerte von W_p.

Definition 2.30 (Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen)**.** Die Eigenwerte κ_1 und κ_2 heißen *Hauptkrümmungen* von S im Punkt p. Die zugehörige Eigenvektoren $\pm X_1$ und $\pm X_2$ heißen *Hauptkrümmungsrichtungen.*

Definition 2.31 (Normalkrümmung)**.** Die *Normalkrümmung* in Richtung X ist definiert durch

$$\kappa_{nor} = II(X, X).$$

Lemma 2.32. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $p \in S$. Sei $X \in T_pS$ mit $g_p(X, X) = \|X\|^2 = 1$ und setze $E := p + \mathrm{Span}\{X, N(p)\} \subset \mathbb{R}^3$. Die Ebene $\mathrm{Span}\{X, N(p)\}$ trage die Orientierung der Basis $\{X, N(p)\}$. Sei, für ein hinreichende kleines $\varepsilon > 0$, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E \cap S$ nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Dann gilt*

$$II_p(X, X) = \kappa(0),$$

wobei κ die Krümmung von c (als ebene Kurve) ist.

Beweis. Bemerke zuerst, dass eine solche nach Bogenlänge parametrisierte Kurve c existiert. Es gilt:

$$\begin{aligned}
I_p(X, X) &= \langle W_p(X), X\rangle = -\langle d_pN(X), X\rangle \\
&= -\langle \frac{d}{dt} N \circ c|_{t=0}, X\rangle = -\langle \frac{d}{dt} N \circ c|_{t=0}, c'(0)\rangle \\
&= -\frac{d}{dt} \underbrace{\langle N \circ c, c'\rangle}_{=0} |_{t=0} + \langle N \circ c(0), c''(0)\rangle, \\
&= \kappa(0)\langle N \circ c(0), n(0)\rangle
\end{aligned}$$

wobei $n : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Span}\{X, N(p)\}$ das Normalenfeld zu c ist. Aber $c'(0) = X$ und $\{X, N(p)\}$ ist p.o.n.B. von $\mathrm{Span}\{X, N\}$. Also $n(0) = N(p)$ und somit

$$I_p(X, X) = k(0)\langle N \circ c(0), N(p)\rangle = \kappa(0).$$

■

Beispiel. Sei $S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ die x-y-Ebene. $N(x, y, z) = (0, 0, 1)$ und $W_p = 0, \forall p \in S$. Also $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.

Beispiel. Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre. Dann ist für das innere Einheitsnormalenfeld die Weingarten-Abbildung $W = id$. Somit sind $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.

Beispiel. Sei $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder. $p = (x, y, z)$. Wie wir gesehen haben, hat die Weingarten-Abbildung W_p bzgl. des inneren Einheitsnormalenfelds und der Basis $X_1 = (-y, x, 0)$ und $X_2 = (0, 0, 1)$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das heisst gerade, dass X_1 und X_2 Hauptkrümmungsrichtungen zu den Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 sind.

Beispiel. Sei S der Graph einer glatten Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Auf S kann das folgende glatte Einheitsnormalenfeld definiert werden:

$$N(p) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)}{\|\frac{\partial F}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u^1}(u) \\ -\frac{\partial f}{\partial u^2}(u) \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $p = F(u) \in S$ und $F(u) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$. Wir haben

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = (0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(u))$$

und somit

$$h_{ij}(u) \underbrace{=}_{n.Def.} \langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u), N(p) \rangle = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}(u) \right)_{ij}.$$

Definition 2.33 (Krümmungslinie)**.** Sei S eine reguläre Fläche, sei $c : I \to S$ eine nach Bogenlänge parameterisierte Kurve. Falls $c'(t)$ für alle $t \in i$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist, so heißt c *Krümmungslinie.*

Beispiel. Auf den Zylinder $S = S^1 \times \mathbb{R}$ sind die Krümmungslinien horizontale Kreislinien oder vertikale Geraden (oder Stücke davon).

Definition 2.34 (die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung)**.** Sei S eine orientierte reguläre Fläche, sei $p \in S$ ein Punkt. Seien κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmumgen von S in p. Dann ist

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_p)$$

die *Gauß-Krümmung* von S in p. Ferner heißt

$$H(p) := \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(W_p)$$

mittlere Krümmung von S in p.

Definition 2.35. Sei S eine orientierte reguläre Fläche, sei $p \in S$ ein Punkt. Mann nennt p

i) *elliptisch*, falls $K(p) > 0$.
ii) *hyperbolisch*, falls $K(p) < 0$,
iii) *parabolisch*, falls $K(p) = 0$, aber $W_p \neq 0$,
iv) *Flachpunkt*, falls $W_p = 0$, d.h. $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Bemerkung zur Orientierung. Kehrt man auf einer orientierbare regulären Flaĉhe die Orientierung um, d.h. ersetzt man N durch $-N$, so geht W_p in $-W_p$ über. Daher werden κ_1 und κ_2 durch $-\kappa_1$ und $-\kappa_2$ ersetzt. Die Eigenvektoren von W_p und damit die Hauptkrümmungsrichtungen bleiben dieselben. $H(p)$ geht auch in $-H(p)$ über, aber $K(p)$ bleibt unverändert. Somit die Eigenvektoren, die Hauptkrümmungsrichtungen und Gauß-Krümmung auch für nichtorientierbare Flächen definiert, die Hauptkrümmungen und die mittlere Krümmung dagegen nur bis auf das Vorzeichen.

Das *mittlere Krümmungsfeld* definiert durch

$$\mathcal{H} := H \cdot N$$

bleibt auch unverändert.

Beispiel. Die Ebene hat $W_p = 0$ für alle p. Daher sind alle Punkte Flachpunkte. Es ist $K = H = 0$.

Beispiel. Für die Sphäre $S = \mathbb{S}^2$ mit der durch das innere Einheitsnormalenfeld gegebenen Orientierung gilt $W_p = id \quad \forall p \in S$, also $K = H = 1$. Somit sind alle Punkte elliptisch. Das mittlere Krümmungsfeld ist $\mathcal{H}(p) = -p$.

Beispiel. Für den Zylinder $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ haben wir $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = 1$. Also gilt $K \equiv 0$ (wie für die Ebene!) und $H = \frac{1}{2}$. Alle Punkte sind parabolisch.

Beispiel. Das hyperbolische Paraboloid (oder die Sattelfläche)

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\}$$

ist der Graph der Funktion

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\
\varphi(x, y) &= y^2 - x^2 \quad \text{und somit} \\
\nabla\varphi &= (-2x, 2y) \\
\Rightarrow N(p) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \\
X_1 &= \frac{\partial F}{\partial X_1} = (1, 0, -2x) \quad X_2 = \frac{\partial F}{\partial X_2} = (0, 1, 2y) \\
h_{ij}(u) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
g_{ij}(u) &= \begin{pmatrix} 1 + 4x^2 & -4xy \\ -4xy & 1 + 4y^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also $K = -4$ und $H = 0$.

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
h_{ij}(u) &= I_p(W_p(D_uF(e_i)), D_uF(e_j)) \\
&= \sum_{k=1}^{2} W_i^k(u) I(D_uF(e_k), D_uF(e_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{2} W_i^k(u) g_{kl}(u) \\
\text{wobei } (W_i^k) &= (h_{ij})(g_{ki})^{-1} \\
K &= \frac{\det(h_{ij})_{ij}}{\det(g_{ij})_{ij}} \\
H &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big((h_{ij})_{ij}(g_{ij})_{ij}^{-1}\Big).
\end{aligned}$$

Satz 2.36 (Geometrische Interpretation der Krümmungen)**.** *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $p \in S$, und sei X_1, X_2 eine Orthonormalbasis von T_pS. Sei N glattes Einheitsnormalenfeld auf S, definiert in einer Umgebung des Punktes p, so dass $(X_1, X_2, N(p))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Dann gilt es eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S um p, so dass*

(i) $(0,0) \in U$ *und* $F(0,0) = p$,
(ii) $g_{ij}(0,0) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$,
(iii) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0,0) = 0$, $i, j, k = 1, 2$,
(iv) $F(u) - p = u^1X_1 + u^2X_2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}(0,0)u^iu^j \cdot N(p) + O(\|u\|^3)$.

Beweis.
a. Sei $x_0 \in U_1$ der Punkt für den $F_1(x_0) = p$. Setze $V_2 := V_1$, $U_2 := U_1 - x_0$ und $F_2 : U_2 \to V_2 \cap S \quad F_2(x) = F_1(x + x_0)$. Nun bekommen wir eine neue Parametrisierung (U_2, F_2, V_2) mit $F_2(0,0) = p$.

b. Seien $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^2$ so, dass $D_{(0,0)}F_2(Y_j) = X_j$ $j = 1, 2$. Wählen wir eine lineare Transformation A, so dass $A(e_j) = Y_j$ $j = 1, 2$. Setze $V_3 := V_2$, $U_3 := A^{-1}(U_2)$ und $F_3 := F_2 \circ A$. Dann ist (U_3, F_3, V_3) eine lokale Parametrisierung von S um p mit $F_3(0) = p$ und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_3}{\partial u^i}(0,0) &= D_{(0,0)}F_3(e_i) = D_{(0,0)}(F_2 \circ A)(e_i) \\
&= (D_{(0,0)}F_2 \circ A)(e_i) = D_{(0,0)}F_2(Y_i) = X_i.
\end{aligned}$$

Und somit gilt:

$$g_{ij}^{(F_3)}(0,0) = \langle \frac{\partial F_3}{\partial u^i}(0,0), \frac{\partial F_3}{\partial u^j}(0,0) \rangle = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}.$$

c. Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von F_3 um $(0,0)$ und bezeichnen die Koordinaten mit (v^1, v^2).

$$
\begin{aligned}
F_3(v^1, v^2) - p &= \frac{\partial F_3}{\partial v^1}(0)v^1 + \frac{\partial F_3}{\partial v^2}(0)v^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0)v^i v^j + O(\|v\|^3) \\
&= v^1 X_1 + v^2 X_2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{2} v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), X_k\rangle X_k \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{2} v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0,0), N(p)\rangle N(p) + O(\|v\|^3).
\end{aligned}
$$

d. Wir betrachten nun die Abbildung

$$
\begin{aligned}
\Psi : U_3 &\to \mathbb{R} \\
\Psi(v^1, v^2) &= \begin{pmatrix} v^1 + \frac{1}{2}\sum v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), X_1\rangle \\ v^2 + \frac{1}{2}\sum v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), X_2\rangle. \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es gilt offensichtlich

$$
\begin{aligned}
\Psi(0,0) &= (0,0) \\
\text{und } D_{(0,0)}\Psi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nach dem Umkehrsatz gibt es Umgebungen $U_3' \subset U_3$ und $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$, so dass $\Psi : U_3' \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Durch Verkleinern $V_3' \subset V_3$ und Einschränken $F_3' = F_3|_{U_3'}$ erhalten wir eine weitere lokale Parametrisierung (U_3', F_3', V_3') von S um p. Nun setzen wir $F := F_3' \circ \Psi^{-1}$ und $V := V_3'$. Die Parametrisierung (U, F, V) besitzt alle Eigenschaften i) - iv).

Zu i): $F(0) = F_3'(\Psi^{-1}(0)) = F_3'(0,0) = F_3(0) = p$.

Zu iv): Mit der Abkürzung

$$
u^k := v^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} v^i v^j \langle \frac{\partial^2 F_3}{\partial v^i \partial v^j}(0), X_k\rangle
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
F(u^1,u^2)-p &= F(\Psi(v^1,v^2))-p \\
&= F_3(v^1,v^2)-p \\
&= \sum_{k=1}^{2}\left\{v^k+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} v^iv^j\langle\frac{\partial^2F_3}{\partial v^i\partial v^j}(0),X_k\rangle\right\}X_k \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} v^iv^j\langle\frac{\partial^2F_3}{\partial v^i\partial v^j}(0),N(p)\rangle N(p)+O(\|v\|^3) \\
&= \sum_{k=1}^{2}u^kX_k+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} v^iv^jh_{ij}^{(F_3)}(0)N(p)+O(\|v\|^3).
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnen wir $h_{ij}^{(F_3)}(0)=\langle\frac{\partial^2F_3}{\partial v^i\partial v^j}(0),N(p)\rangle N(p)$. Wegen

$$
\Psi(0,0)=0,\quad D_{(0,0)}\Psi=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},
$$

gilt auch

$$
\begin{aligned}
\Psi^{-1}(0,0) &= 0 \\
D_{(0,0)}(\Psi^{-1}) &= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

und somit

$$
v^j = u^j+O(\|u\|^2).
$$

Also folgt

$$
\begin{aligned}
F(u^1,u^2)-p &= \sum_{k=1}^{2}u^kX_k+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\Big(u^iu^j+O(\|u\|^3)\Big)h_{ij}^{(F_3)}(0)N(p)+O(\|u\|^3) \\
&= \sum_{k=1}^{2}u^kX_k+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}u^iu^jh_{ij}^{(F_3)}(0)N(p)+O(\|u\|^3). \quad (*)
\end{aligned}
$$

Ableiten von $(*)$ erhalten wir

$$
h_{ij}^{(F)}(0)=\langle\frac{\partial^2F}{\partial u^i\partial u^j}(0),N(p)\rangle=\langle h_{ij}^{(F_3)}(0)N(p),N(p)\rangle=h_{ij}^{(F_3)}(0). \quad (**)
$$

Einsetzen von $(**)$ in $(*)$ liefert iv).

Zu ii) und iii): Wegen iv) gilt

$$
\frac{\partial F}{\partial u^i}(u)=X_i+\sum_{j=1}^{2}u^jh_{ij}(0)N(p)+O(\|u\|^2).
$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
g_{ij}(u) &= \langle X_i + \sum_{k=1}^{2} u^k h_{ik}(0)N(p) + O(\|u\|^2), \\
&\quad X_j + \sum_{l=1}^{2} u^l h_{jl}(0)N(p) + O(\|u\|^2)\rangle \\
&= \langle X_i, X_j\rangle + \sum_{k=1}^{2} u^k h_{ik}(0) \underbrace{\langle X_i, N(p)\rangle}_{=0} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2} u^l h_{jl}(0) \underbrace{\langle X_i, N(p)\rangle}_{=0} + O(\|u\|^2) \\
&= \delta_{ij} + O(\|u\|^2)
\end{aligned}$$

und ii) und iii). ■

Korollar 2.37. *Jede reguläre Fläche kann lokal als Graph über ihre Tangentialebene dargestellt werden.*

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation drehen und verschieben wir die Fläche im $\mathbb{R}^3$ so, dass $p = 0$ und die Tangentialebene T_pS gerade von den ersten beiden Einheitsvektoren e_1 und e_2 aufgespannt wird. Nach Satz 2.36 haben wir eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S um p mit

$$F(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} u^i u^j h_{ij}(0,0)) + O(\|u\|^3).$$

Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \to T_pS = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{R}^2$ die Orthogonalprojektion. Wegen

$$\pi \circ F(u^1, u^2) = (u^1, u^2) + O(\|u\|^3)$$

gilt

$$D_{(0,0)}(\pi \circ F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Umkehrsatz existiert eine glatte Abbildung $\varphi : \tilde{U} \subset T_pS \to \mathbb{R}^2$ mit $\pi \circ F \circ \varphi = id$. Dann gilt $F(\varphi(v^1, v^2)) = (v^1, v^2, (F \circ \varphi)^3(v^1, v^2))$, d.h. S ist nahe p genau der Graph der 3. Komponentenfunktion von $F \circ \varphi$. ■

Wenn wir Terme dritter Ordnung vernachässigen, können wir die reguläre Fläche S in der Nähe eines Punktes $p \in S$ über der Tangentialebene T_pS als Graph der Funktion

$$(u^1, u^2) \to \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} u^i u^j h_{ij}(0,0)$$

angenähert darstellen.

1. Fall: Sei $K(p) > 0$. Dann ist $(h_{ij}(0))_{ij}$ positiv oder negativ definit.

2. Fall: Sei $K(p) < 0$. Dann ist $(h_{ij}(0))_{ij}$ indefinit. Somit wird S nahe p durch eine Sattelfläche approximiert.

3. Fall: p ist parabolisch. Nahe p sieht S wie die Zylinderfläche über einer Parabel aus.

4. Fall: p ist Flachpunkt $k_1(0) >= k_2(0) = 0$. Dann ist $(h_{ij}(0,0) = 0$ für alle $i, j = 1, 2$, und somit sieht S wie eine Ebene aus.

Satz 2.38. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte nicht leere reguläre Fläche. Dann besitzt S einen Punkt p mit*

$$K(p) > 0.$$

Beweis.
Da $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte nicht leere reguläre Fläche ist, ist S insbesondere beschränkt und somit existiert ein $R > 0$, so dass

$$S \subset \overline{B}(0, R) := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \le R\}.$$

a. Wählen R_0 so, dass

$$R_0 := \inf\{R : S \subset \overline{B}(0, R)\}$$

und setzen $S^2(R_0) = \partial\overline{B}(0, R_0)$. Es gilt $S \subset \overline{B}(0, R_0)$. Wir behaupten: $S \cap S^2(R_0) \neq \emptyset$, denn: Angenommen, es wäre falsch. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass der Abstand

$$0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(S, S^2(R_0)) = \inf\{\|x - y\| : x \in S, y \in S^2(R_0)\}.$$

Dann wäre aber $S \subset \overline{B}(0, R_0 - \varepsilon)$ im Widerspruch zur Minimalität von R_0. Also existiert $p \in S \cap S^2(R_0)$.

b. Wir behaupten, dass S und $S^2(R_0)$ in p dieselbe Tangentialebene haben, d.h. $T_pS = T_pS^2(R_0)$. Denn: $\forall X \in T_pS \quad \exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S : \quad c(0) = p \quad \& \quad c'(0) = X$. Wegen $S \subset \overline{B}(0, R_0)$ gilt

$$R_0 = \|c(0)\|^2 = \max_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \|c(t)\|^2.$$

Es folgt $(\|c\|^2)'(0) = 0$, d.h. $\langle c'(0), c(0)\rangle = 0$. Also $\langle X, p\rangle = 0$. Wegen $T_pS^2(R_0) = P^\perp$, gilt $X \in T_pS^2(R_0)$. Somit $T_pS \subset T_pS^2(R_0)$. Wegen $\dim T_pS = \dim T_pS^2(R_0)$ gilt die Behauptung $T_pS = T_pS^2(R_0)$.

c. Sei $X \in T_pS$ mit $\|X\| = 1$. Wir behaupten, dass die Normalkrümmung $I(X, X)$ von X größer gleich $\frac{1}{R_0} > 0$ oder kleiner gleich $-\frac{1}{R_0}$ ist, d.h. $|I(X, X)| \ge \frac{1}{R_0}$. Denn: Sei E eine Ebene, aufgespannt von $N(p)$ und X. Betrachten die Schnitte E mit S und $S^2(R_0)$. Dann sehen wir, dass $E \cap S$ immer im Inneren der Kreislinie $E \cap S^2(R_0)$ liegt und diese in p berührt. Wir haben schon bewiesen, dass die Normalkrümmung $I(X, X) = |k(0)|$, wobei k die Krümmung von einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c : (-\varepsilon, t) \to S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X$. Nach Hausaufgabe haben wir

$$|k(0)| \geq \frac{1}{R_0}.$$

d. Also die Weingarten-Abbildung, als eine Matrix: $W - \frac{1}{R_0} Id \geq 0$ oder $W + \frac{1}{R_0} Id \leq 0$, d.h. $W - \frac{1}{R_0} Id$ ist positiv definit oder $W + \frac{1}{R_0} Id$ ist negativ definit. Es folgt

$$K = \det W > \frac{1}{R_0} > 0.$$

■

Korollar 2.39. *Sei S eine kompakte reguläre Fläche, sei $q \in \mathbb{R}^3$, sei $p \in S$ ein Punkt mit maximalem (oder minimalen) Abstand von q. Dann ist $q - p$ senkrecht auf T_pS, d.h.*

$$q - p \perp T_pS$$

Beweis. SPÄTER ■

In Koordinaten lassen sich K und H wie folgt ausdrücken:

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{ij} h_{ij} g^{ij} = \frac{1}{2\det(g_{ij})}(h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}).$$

2.7. **Flčheninhalten und Integration auf Flächen.** Sei S eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S. Zunächst betracteh wir nur Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$, die außerhalb des Koordinatenbereiches verschwinden, d.h., $f|_{S-V} \equiv 0$.

Definition 2.40 (Lebesque-Integrierbarkeit)**.** Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ mit $f_{S-V} = 0$ heißt (Lebesque-)*integrierbar*, falls die Funktion

$$\begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R} \\ (u^1, u^2) & \longmapsto & f(F(u^1, u^2)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))}, \end{array}$$

(Lebesque-)integrierbar ist. Dabei (g_{ij}) ist die Matrixdarstellung von der ersten Fundamentalform. Der Wert des Integrals ist

$$\int_S f dA := \int_U f(F(u^1, u^2)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2.$$

Man nennt den formalen Ausdruck

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2$$

das *Flächenelement.*

Lemma 2.41. *Sei S eine reguläre Fläche, seien (U, F, V) und $(\widetilde{U}, \widetilde{F}, \widetilde{V})$ lokale Parametrisierungen von S. Sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f_{S-(V \cap \widetilde{V})} = 0$. Es ist*

$$(f \circ F) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} : U \to \mathbb{R}$$

integrierbar genau dann, wenn

$$(f \circ \widetilde{F}) \cdot \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$$

integrierbar ist, und in diesem Falle gilt

$$\int_U (f \circ F) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2 = \int_{\widetilde{U}} (f \circ \widetilde{F}) \cdot \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2.$$

Beweis. Sei $\varphi : \tilde{F}^{-1} \circ F$ die Parametertransformation. Zur Erinnerung: die Beziehung zwischen (g_{ij}) und $(\tilde{g}_{ij})$ ist

$$\begin{array}{rcl} (g_{ij}) & = & D\varphi^*(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi) D\varphi \\ \Rightarrow \det(g_{ij}) & = & \det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)(\det(D\varphi))^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\det(g_{ij})} & = & \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)}\, |\det(D\varphi)| \end{array}$$

Sei $(f \circ \tilde{F})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)}$ integrierbar. Nach der Transformation ist auch

$$(f \circ \tilde{F})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)}\, |\det(D\varphi)| = (f \circ F)\sqrt{\det(g_{ij})}$$

integrierbar und

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde U} f(\tilde F(\tilde u^1,\tilde u^2))\sqrt{\det(\tilde g_{ij}(\tilde u^1,\tilde u^2))}d\tilde u^1 d\tilde u^2\\
=&\int_U f(F(u^1,u^2))\sqrt{\det(g_{ij}(u^1,u^2))}du^1du^2.
\end{aligned}$$

■

Beispiel. Ist $S=\mathbb{R}^2\times\{0\}\subset\mathbb{R}^3$ die x-y-Ebene, so wählen wir kartesische Koordinaten $U=\mathbb{R}^2$, $V=\mathbb{R}^3$, $F(x,y)=(x,y,0)$. Dann ist (g_{ij}) die Einheitsmatrix (I_2) und somit $dA=dxdy$. Also

$$\int_S fdA=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy,$$

wie das ursprüngliche Integral über $\mathbb{R}^2$. Mit den Polarkoordinaten r und φ haben wir

$$(g_{ij}) \quad = \quad \begin{pmatrix} r & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad dA=rdrd\varphi.$$

Also

$$\int_S fdA \quad = \quad \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\tilde F(r,\varphi))d\varphi rdr.$$

Definition 2.42. Sei S eine reguläre Fläche. Eine Funktion $f:S\to\mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, fall sich f schreiben lässt als endliche Summe

$$f=f_1+f_2+\cdots+f_k, \tag{3}$$

wobei die $f_i:S\to\mathbb{R}$ integrierbare Funktionen sind, die jeweils außerhalb einer Koordinatenumgebung verschwinden. In diesem Fall setzen wir ferner

$$\int_S fdA:=\sum_{i=1}^k\int_S f_idA.$$

Eine Möglichkeit, zu einer integrierbaren Funktion f eine Zerlegung der Form 2.41 zu finden, in der jedes f_i integrierbar ist und außerhalb einer Koordinatenumgebung verschwindet, geht wie folgt. Wählen eine überdeckung von S, d.h. endlich viele Koordinatenumgebungen $(U_i,F_i,V_i)_{i\in I}$ so, dass $S\subset\cup_{i=1}^k V_i$. Zu einer Teilmenge $A\subset\mathbb{R}^3$ sei $\chi_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ die charakteristische Funktion, d.h.

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{falls } x\in A\\ 0 & \text{andernfalls}\end{cases}$$

Jetzt definieren wir

$$\begin{aligned}
f_1 &:= \chi_{V_1}f\\
f_2 &:= \chi_{V_2-V_1}f\\
&\vdots\\
f_k &:= \chi_{V_k-\cup_{i=1}^{k-1}V_i}f
\end{aligned}$$

Dann gilt $f = f_1 + \cdots f_k$ und jedes f_i verschwindet außerhalb von V_i.

Ü 1. Zeigen Sie, dass alle f_i integrierbar sind im Sinne von Definition 2.39, falls f integrierbar ist im Sinne von Definition 2.41. (Übung)

Ü 2. Zeigen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_S f dA$ in Definition 2.41 unabhängig von der Wahl der Zerlegung $f = f_1 + \cdots f_k$ ist.

- Sind $f, g : S \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so ist $\alpha f + \beta g : S \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt
$$\int_S (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \int_S f dA + \beta \int_S g dA$$

- Sind $f, g : S \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und gilt $f \leq g$, so folgt
$$\int_S f dA \leq \int_S g dA$$
(Übung)

Definition 2.43. Eine Teilmenge $N \subset S$ einer regulären Fläche heißt *Nullmenge*, falls für jede lokale Parametrisierung (U, F, V) von S die Menge
$$f^{-1}(V \cap N)$$
eine Nullmenge in $U \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Ü 3: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, seien $(U_i, F_i, V_i)_{i=1,\cdots,+\infty}$ lokale Parametrisierungen, die S überdecken, d.h. $S \subset \cup_{i=1}^{\infty} V_i$. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subset S$ bereits eine Nullmenge ist, falls $F_i^{-1}(N) \subset V_i$ Nullmengen sind.

Bemerkung. Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. $N \subset S$ eine Nullmenge, und sind $f, g : S \to \mathbb{R}^3$ Funktionen, die auf $S - N$ übereinstimmen (d.h $f_{S-N} = g_{S-N}$), dann gilt: Ist f integrierbar, so auch g und es gilt:
$$\int_S f dA = \int_S g dA.$$

Definition 2.44. Sei S eine reguläre Fläche. Ist die konstant Funktion $f = 1$ integrierbar, so nennen wir
$$A[S] := \int_S dA$$
den *Flächeninhalt* von S.

Beispiel 1. Auf der x-y-Ebene $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ divergiert das Integral
$$\int_S 1 \cdot dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dxdy$$

d.h. die Funktion $f \equiv 1$ ist nicht integrierbar.

Beispiel 2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene parametrisierte reguläre Kurve. Sei $h > 0$. Der verallgemeinerter Zylinder über c ist definiert durch

$$S = \{c(t) + se_3 : t \in I, s \in (0,h)\}.$$

Für den Zylinder haben wir eine globale Parametrisierung

$$U = I \times (0,h) \subset \mathbb{R}^2 \quad V = \mathbb{R}^3 \quad F(t,s) = c(t) + se_3.$$

Berechnen wir

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) = (c'(t),0) \quad \frac{\partial F}{\partial s}(t,s) = e_3$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
g_{11}(t,s) &= \langle c'(t), c'(t)\rangle = \left\|c'(t)\right\|^2 \\
g_{12}(t,s) &= \langle c'(t), e_3\rangle \\
g_{21}(t,s) &= \langle e_3, c'(t)\rangle \\
g_{22}(t,s) &= \langle e_3, e_3\rangle = 1 \\
\Rightarrow dA &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = \left\|c'(t)\right\| dtds.
\end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt erhalten wir

$$A[S] = \int_I \int_0^h \left\|c'(t)\right\| dsdt = hL[c].$$

Beispiel 3. Der Flächeninhalt von der Sphäre $S = \mathbb{S}^2$. Wir benutzen Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
U &= (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\
V &= \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) : x \geq 0, y = 0\} \\
F(\varphi,\Theta) &= (\cos\varphi\cos\Theta, \sin\varphi\cos\Theta, \sin\Theta).
\end{aligned}$$

Da $N = \mathbb{S}^2 \cap \{(x,0,z) : x \geq 0\}$ eine Teilmenge in $\mathbb{S}^2$, können wir sie für die Berechnungdes Flächeninhalts ignorieren. Es gilt

$$\begin{aligned}
D_{(\varphi,\Theta)} &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\Theta & -\cos\varphi\sin\Theta \\ \cos\varphi\cos\Theta & \sin\varphi\sin\Theta \\ 0 & \cos\Theta \end{pmatrix} \\
\Rightarrow g_{11} &= \cos^2\Theta \quad g_{21} = g_{12} = 0 \quad g_{22} = 1.
\end{aligned}$$