2.7. **Flčheninhalten und Integration auf Flächen.** Sei S eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S. Zunächst betracteh wir nur Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$, die außerhalb des Koordinatenbereiches verschwinden, d.h., $f|_{S-V} \equiv 0$.

Definition 2.40 (Lebesque-Integrierbarkeit)**.** Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ mit $f_{S-V} = 0$ heißt (Lebesque-)*integrierbar*, falls die Funktion

$$\begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (u^1, u^2) & \longmapsto & f(F(u^1, u^2)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))}, \end{array}$$

(Lebesque-)integrierbar ist. Dabei (g_{ij}) ist die Matrixdarstellung von der ersten Fundamentalform. Der Wert des Integrals ist

$$\int_S f dA := \int_U f(F(u^1, u^2)) \cdot \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2.$$

Man nennt den formalen Ausdruck

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2$$

das *Flächenelement.*

$\det(g_{ij})$ heißt auch *Gramsche Determinante* und gibt die infinitesimale Flächenverzerrung von F an, was durch den Ausdruck

$$dA = \sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))} du^1 du^2$$

deutlich gemacht wird. Ferner gilt $\det(g_{ij}) = \|\frac{\partial F}{\partial u^1} \times \frac{\partial F}{\partial u^2}\|^2$ (Übung)

Lemma 2.41. *Sei S eine reguläre Fläche, seien (U, F, V) und $(\widetilde{U}, \widetilde{F}, \widetilde{V})$ lokale Parametrisierungen von S. Sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f_{S-(V \cap \widetilde{V})} = 0$. Es ist*

$$(f \circ F) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} : U \to \mathbb{R}$$

integrierbar genau dann, wenn

$$(f \circ \widetilde{F}) \cdot \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$$

integrierbar ist, und in diesem Falle gilt

$$\int_U (f \circ F) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} du^1 du^2 = \int_{\widetilde{U}} (f \circ \widetilde{F}) \cdot \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2.$$

Beweis. Sei $\varphi := \tilde{F}^{-1} \circ F$ die Parametertransformation. Zur Erinnerung: die Beziehung zwischen (g_{ij}) und $(\tilde{g}_{ij})$ ist

$$\begin{array}{rcl} (g_{ij}) & = & D\varphi^*(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi) D\varphi \\ \Rightarrow \det(g_{ij}) & = & \det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)(\det(D\varphi))^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\det(g_{ij})} & = & \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)} \left|\det(D\varphi)\right|. \end{array}$$

Sei $(f \circ \tilde{F})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)}$ integrierbar. Nach der Transformation ist auch

$$(f \circ \tilde{F} \circ \varphi)\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)}\,|\det(D\varphi)| = (f \circ F)\sqrt{\det(g_{ij})}$$

integrierbar und (mit $\tilde{u} = \varphi(u)$)

$$\begin{aligned}&\int_{\tilde{U}} f(\tilde{F}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2))}d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \\ = &\int_U f(F(u^1, u^2))\sqrt{\det(g_{ij}(u^1, u^2))}du^1 du^2.\end{aligned}$$

■

Beispiel. Ist $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ die x-y-Ebene, so wählen wir kartesische Koordinaten $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, 0)$. Dann ist (g_{ij}) die Einheitsmatrix (I_2) und somit $dA = dxdy$. Also

$$\int_S f dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy,$$

wie das ursprüngliche Integral über $\mathbb{R}^2$. Mit den Polarkoordinaten r und φ $(\tilde{F}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0))$ haben wir

$$(g_{ij}) \quad = \quad \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dA = rdrd\varphi.$$

Also

$$\int_S f dA \quad = \quad \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\tilde{F}(r, \varphi))d\varphi r dr.$$

Definition 2.42. Sei S eine reguläre Fläche. Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, fall sich f schreiben lässt als endliche Summe

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_k, \tag{3}$$

wobei die $f_i : S \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen sind, die jeweils außerhalb einer Koordinatenumgebung verschwinden. In diesem Fall setzen wir ferner

$$\int_S f dA := \sum_{i=1}^{k}\int_S f_i dA.$$

Eine Möglichkeit, zu einer integrierbaren Funktion f eine Zerlegung der Form (3) zu finden, in der jedes f_i integrierbar ist und außerhalb einer Koordinatenumgebung verschwindet, geht wie folgt. Wählen eine überdeckung von S, d.h. endlich viele Koordinatenumgebungen $(U_i, F_i, V_i)_{i\in I}$ so, dass $S \subset \cup_{i=1}^{k} V_i$. Zu einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$ sei $\chi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion, d.h.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Jetzt definieren wir

$$\begin{aligned} f_1 &:= \chi_{V_1} f \\ f_2 &:= \chi_{V_2 - V_1} f \\ &\vdots \\ f_k &:= \chi_{V_k - \cup_{i=1}^{k-1} V_i} f \end{aligned}$$

Dann gilt $f = f_1 + \cdots f_k$ und jedes f_i verschwindet außerhalb von V_i.

Ü 1. Zeigen Sie, dass alle f_i integrierbar sind im Sinne von Definition 2.39, falls f integrierbar ist im Sinne von Definition 2.41. (Übung)

Ü 2. Zeigen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_S f dA$ in Definition 2.41 unabhängig von der Wahl der Zerlegung $f = f_1 + \cdots f_k$ ist. (Übung)

– Sind $f, g : S \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so ist $\alpha f + \beta g : S \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\int_S (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \int_S f dA + \beta \int_S g dA$$

– Sind $f, g : S \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und gilt $f \leq g$, so folgt

$$\int_S f dA \leq \int_S g dA$$

(Übung)

Definition 2.43. Eine Teilmenge $N \subset S$ einer regulären Fläche heißt *Nullmenge*, falls für jede lokale Parametrisierung (U, F, V) von S die Menge

$$F^{-1}(V \cap N)$$

eine Nullmenge in $U \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Ü 3: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, seien $(U_i, F_i, V_i)_{i=1,\cdots,+\infty}$ lokale Parametrisierungen, die S überdecken, d.h. $S \subset \cup_{i=1}^{\infty} V_i$. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subset S$ bereits eine Nullmenge ist, falls $F_i^{-1}(N) \subset V_i$ Nullmengen sind.

Bemerkung. Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. $N \subset S$ eine Nullmenge, und sind $f, g : S \to \mathbb{R}^3$ Funktionen, die auf $S - N$ übereinstimmen (d.h $f_{S-N} = g_{S-N}$), dann gilt: Ist f integrierbar, so auch g und es gilt:

$$\int_S f dA = \int_S g dA.$$

Definition 2.44. Sei S eine reguläre Fläche. Ist die konstant Funktion $f = 1$ integrierbar, so nennen wir

$$A[S] := \int_S dA$$

den *Flächeninhalt* von S.

Beispiel 1. Auf der x-y-Ebene $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ divergiert das Integral

$$\int_S 1 \cdot dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dxdy$$

d.h. die Funktion $f \equiv 1$ ist nicht integrierbar.

Beispiel 2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene parametrisierte reguläre Kurve. Sei $h > 0$. Der verallgemeinerter Zylinder über c ist definiert durch

$$S = \{c(t) + se_3 : t \in I, s \in (0, h)\}.$$

Für den Zylinder haben wir eine globale Parametrisierung

$$U = I \times (0, h) \subset \mathbb{R}^2 \quad V = \mathbb{R}^3 \quad F(t, s) = c(t) + se_3.$$

Berechnen wir

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, s) = (c'(t), 0) \quad \frac{\partial F}{\partial s}(t, s) = e_3$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
g_{11}(t, s) &= \langle c'(t), c'(t)\rangle = \left\|c'(t)\right\|^2 \\
g_{12}(t, s) &= \langle c'(t), e_3\rangle \\
g_{21}(t, s) &= \langle e_3, c'(t)\rangle \\
g_{22}(t, s) &= \langle e_3, e_3\rangle = 1 \\
\Rightarrow dA &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = \left\|c'(t)\right\| dtds.
\end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt erhalten wir

$$A[S] = \int_I \int_0^h \left\|c'(t)\right\| dsdt = hL[c].$$

Beispiel 3. Der Flächeninhalt von der Sphäre $S = \mathbb{S}^2$. Wir benutzen Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
U &= (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\
V &= \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\} \\
F(\varphi, \Theta) &= (\cos\varphi\cos\Theta, \sin\varphi\cos\Theta, \sin\Theta).
\end{aligned}$$

Da $N = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{S}^2$, können wir sie für die Berechnung des Flächeninhalts ignorieren. Es gilt

$$\begin{aligned} D_{(\varphi,\Theta)} &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\Theta & -\cos\varphi\sin\Theta \\ \cos\varphi\cos\Theta & -\sin\varphi\sin\Theta \\ 0 & \cos\Theta \end{pmatrix} \\ \Rightarrow g_{11} &= \cos^2\Theta \quad g_{21} = g_{12} = 0 \quad g_{22} = 1. \end{aligned}$$

Also der Flächeninhalt von der Sphäre ist

$$\begin{aligned} A[S] &= A[S - N] \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta d\Theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta d\Theta \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

2.8. **Einige Klassen von Flächen.**

1. *Regelflächen*

Betrachten wir eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ (wobei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall ist) und weitere glatte Abbildung $v : I \to \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Setze

$$(4) \qquad \begin{array}{rcl} F : I \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ F(t, s) & = & c(t) + sv(t). \end{array}$$

Bemerkung. Das Bild von F kann so beschrieben werden: in jedem Punkt $c(t)$ betrachte die Gerade (oder Strecke), die durch $c(t)$ läuft und $v(t)$ als Richtungsvektor besitzt. Das Bild von F ist dann die Vereinigung aller diesen Geraden. Ist dies eine reguläre Fläche? Um das zu überprüfen, berechnen wir das Differential von F.

$$D_{(t,s)}F = (c'(t) + sv'(t), v(t))$$

Falls wir voraussetzen, dass $v(t)$ und $c'(t)$ linear unabhängig sind, dann hat für festes t die Matrix $D_{(t,0)}F$ den maximalen Rang. Somit existiert dann eine offene Umgebung von $(t, 0)$ in $I \times \mathbb{R}$ derart, dass (U, F, S) eine Parametrisierung der regulären Fläche $S = F(U)$ ist.

Definition 2.45 (Regelfläche)**.** Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, die durch eine Parametrisierung der Form (4) darstellbar ist, heißt *Regelfläche.*

Beispiel 1. (Verallgemeinerter Zylinder über eine Kurve)
Ist $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene parametrisierte Kurve ohne Selbstdurchschnitte, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$ und $v(t) = (0, 0, 1)$, so heisst die zugehörige Regelfläche

$$F(t, s) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ s \end{pmatrix}$$

verallgemeinerter Zylinder über c.

Beispiel 2. (Der verallgemeinerter Kegel) Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ wie in dem obigen Beispiel. Zu einen festen Punkt $p \in \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ setzen wir $v(t) = p - c(t)$. Der verallgemeinerter Kegel über c ist die Regelfläche definiert durch:

$$\begin{array}{rcl} F : I \times (-\infty, 1) & \to & \mathbb{R}^3 \\ F(t, s) & = & (1 - s)c(t) + sp \\ & = & c(t) + s(p - c(t)). \end{array}$$

Beispiel 3. (Das Möbiusband)

$$\begin{aligned}
F : \mathbb{R} \times (-1,1) &\to \mathbb{R}^3 \\
F(t,s) &= (\cos t + s \cos t \cos \frac{t}{2}, \sin t + s \sin t \cos \frac{t}{2}, s \sin \frac{t}{2}) \\
&= (\cos t, \sin t, 0) + s(\cos t \cos \frac{t}{2}, \sin t \cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2}).
\end{aligned}$$

Beispiel 4. (Rotationshyperboloid oder einschaliges Hyperboloid)

$$\begin{aligned}
S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 = x^2 + y^2\} \\
c(t) &= (\cos t, \sin t, 0) \\
v(t) &= c'(t) + e_3 = (-\sin t, \cos t, 1).
\end{aligned}$$

Beispiel 5. (Das hyperbolische Paraboloid)

$$\begin{aligned}
S &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\} \\
c(t) &= (t,0,0) \\
v(t) &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0,1,t).
\end{aligned}$$

Satz 2.46. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Regelfläche. Dann gilt für die Gaußkrümmung*

$$K \leq 0.$$

Beweis. Zur Erinnerung:

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

Betrachten wir eine Parametrisierung der Form (4) in 2.8.1

$$F(t,s) = c(t) + sv(t).$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0.$$

Also gilt:

$$h_{22} = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, N \rangle = 0,$$

wobei N die Flächennormale ist. Es folgt somit:

$$\det(h_{ij}) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \leq 0$$

Andererseits haben wir $\det(g_{ij}) > 0$, weil (g_{ij}) positiv definit ist. Damit gilt

$$K \leq 0.$$

■

Definition 2.47 (die Drehfläche)**.** Eine Drehfläche ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der Form $S = F(I \times \mathbb{R})$ mit

$$F(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, t),$$

wobei $(r(t), t)$ eine in der x-z-Ebene liegende Kurve ist.

Die Gauß-Krümmung und bzw. mittlere Krümmung ist

$$K = -\frac{r''(t)}{r(t)(1 + r'(r)^2)^2}$$

bzw.

$$H = \frac{1}{2}\frac{r(t)r''(t) - 1 - r'(t)^2}{r(t)(1 + r'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Beispiel 1. (Der Rotationshyperboloid)

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 = x^2 + y^2\} \\ F(t, s) &= (\sqrt{1 + t^2}\cos s, \sqrt{1 + t^2}\sin s, t) \\ r' &= \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}} \\ r'' &= \frac{2}{\sqrt[3]{1 + t^2}}. \end{aligned}$$

Also

$$K = -\frac{r''(t)}{r(t)(1 + r'(t))^2} < 0 \text{ (hyperbolisch)}.$$

Beispiel 2. (Das Rotationsparaboloid)

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}. \\ F(t, \varphi) &= (\sqrt{t}\cos\varphi, \sqrt{t}\sin\varphi, t) \\ K &= \frac{4}{(1 + 4t)^2} \\ H &= \frac{2 + 4t}{\sqrt[3]{1 + 4t}}. \end{aligned}$$

Beispiel 3. (Der Drehtorus)

$$\begin{aligned} S &= F(\mathbb{R}^2) \\ F(\theta, s) &= ((2 + \cos s)\cos\theta, (2 + \cos s)\sin\theta, \sin s). \end{aligned}$$

Durch die Transformation $t = \sin s$, ist der Drehtorus eine Drehfläche.

$$F(\theta, t) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, t) \quad \theta \in (0, \pi)$$

wobei

$$\begin{aligned} r(t) &= 2+\sqrt{1-t^2} \\ \Rightarrow r'(t) &= \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \& \quad r''(t) = \frac{-1}{\sqrt[3]{1-t^2}} \\ \Rightarrow K(t,\theta) &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+\sqrt{1-t^2}} = \frac{\cos s}{2+\cos s}. \end{aligned}$$

3. *Röhrenfläche*

Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit nicht verschwindender Krümmung, $\kappa(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann sind die Windung τ und das Frenet-Dreibein (c', n, b) definiert. Sei $r > 0$. Eine *Röhrenfläche* mit Dicke $2r$ ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der Form $S = F(I \times \mathbb{R})$ mit

$$F(t,\varphi) = c(t) + r \cdot (\cos\varphi \cdot n(t) + \sin\varphi \cdot b(t)).$$

Die Gauß-Krümmung und bzw. mittlere Krümmung ist

$$K = -\frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{1 - r\cos\varphi\kappa(t)}$$

bzw.

$$H = \frac{1}{2r}\frac{1-2r\cos\varphi\kappa(t)}{1-r\cos\varphi\kappa(t)}.$$

(Übung)

Beispiel (*Der Drehtorus*) Die Röhrenfläche um die Kreilinie

$$c(t) = (\cos t, \sin t, 0)^{\perp}$$

mit Dicke $2r < 2$ ist einer Drehtorus.

$$\begin{gathered} c(t) + r \cdot (\cos\varphi \cdot n(t) + \sin\varphi \cdot b(t)) = \\ ((1 + r\cos\varphi)\cos t, (1 + r\cos\varphi)\sin t, r\sin\varphi)^{\perp}. \end{gathered}$$

Satz 2.48 (Variation des Flächeninhaltes)**.** *Sei S eine reguläre Fläche mit endlichem Flächeninhalt. Sei $\mathcal{H}$ das mittlere Krümmungsfeld. Sei $\Phi : S \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Normalenfeld auf S mit kompakten Träger. Dann ist für $|t|$ hinreichend klein die Menge $S_t := \{p + t\Phi(p) : p \in S\}$ eine reguläre Fläche mit endlichem Flächeninhalt und es gilt:*

$$\frac{d}{dt} A[S_t]_{|t=0} = -2 \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle dA.$$

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Träger von Φ ganz in einem Koordinatenbereich enthalten ist. D.h. für eine lokale Parametrisierung (U, F, V) gilt $\operatorname{supp}(\Phi) \subset (S \cap V)$. Für S_t ist die entsprechende Parametrisierung gegeben durch (U, F_t, V), wobei

$$\begin{aligned} F_t : U &\to \mathbb{R}^3 \\ F_t(u^1, u^2) &= F(u^1, u^2) + t\Phi(F(u^1, u^2)), \end{aligned}$$

für $|t|$ klein eine lokale Parametrisierung ist, denn die Injektivität von F_t ist eine offene Bedingung. Jetzt berechnen wir

$$\frac{\partial F_t}{\partial u^j} = \frac{\partial F}{\partial u^j} + \frac{\partial (f \circ F)}{\partial u^j}(N \circ F) + (f \circ F)\frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^j},$$

wobei $\Phi = fN$ und N das durchdie Parametrisierung gegebene Einheitsnormalenfeld auf $S \cap V$ ist. Wir haben die erste Fundamentalform von S_t

$$\begin{aligned} g^t_{kj} &= \langle \frac{\partial F_t}{\partial u^k}, \frac{\partial F_t}{\partial u^k} \rangle \\ &= g_{kj} + t\frac{\partial (f \circ F)}{\partial u^j} \underbrace{\langle \frac{\partial F}{\partial u^k}, N \circ F \rangle}_{=0} + t(f \circ F) \underbrace{\langle \frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^j} \rangle}_{=-h_{kj}} \\ &\quad + t\frac{\partial (f \circ F)}{\partial u^k} \underbrace{\langle N \circ F, \frac{\partial F}{\partial u^j} \rangle}_{=0} + t(f \circ F) \underbrace{\langle \frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \rangle}_{=-h_{jk}} + O(t^2) \\ &= g_{kj} - 2t(f \circ F)h_{kj} + O(t^2) \\ &= \sum_{z=1}^{2} (\delta^z_k - 2t(f \circ F) \sum_l \underbrace{h_{kl} g^{zl}}_{=w^z_k} + O(t^2)) g_{zj} \\ &= \sum_{z=1}^{2} (\delta^z_k - 2t(f \circ F) w^z_k + O(t^2)) g_{zj}, \end{aligned}$$

Benutzen wir die folgende Taylor-Entwicklung der Determinante:

$$\det(Id + X) = 1 + \operatorname{Spur}(X) + O(\|X\|^2) \quad (*)$$

und erhalten wir:

$$\begin{aligned}\det(g^t_{kj}) &= \det(g_{kj})\det(Id - 2t(f\circ F)(w^z_k) + O(t^2))\\ &= \det(g_{kj})(1 + \mathrm{Spur}(-2t(f\circ F)(w^z_k) + O(t^2)))\\ &= \det(g_{kj})(1 - 4t(f\circ F)H + O(t^2)).\end{aligned}$$

Nach $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$ haben wir

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(g^t_{kj})} &= \sqrt{\det(g_{kj})}\sqrt{1 - 4t(f\circ F)H + O(t^2)}\\ &= \sqrt{\det(g_{kj})}(1 - 2tfH + O(t^2)).\end{aligned}$$

Integration über S liefert nun

$$\begin{aligned}A[S_t] &= \int_S 1 - 2tfH + O(t^2)dA\\ &= A[S] - 2t\int_S \langle\Phi, \mathcal{H}\rangle dA + O(t^2).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen für den Fall, dass der Träger von Φ ganz in einem Koordinatenbereich enthalten ist.

Für den allgemeineren Fall, haben wir endlich viele Koordinatensysteme (U_1, F_1, V_1) ... (U_k, F_k, V_k), die den Träger von Φ überdecken. D.h. $\mathrm{Supp}(\Phi) \subset \bigcup_{j=1}^k V_j$. Wir wählen eine untergeordnete *Teilung der Eins*, d.h. glatte Funktion $\varrho_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $0 \le \varrho_j \le 1$, $\mathrm{Supp}(\varrho_j) \subset V_j$ und $\sum_{j=1}^k \varrho_j \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\mathrm{Supp}(\Phi)$. Nun setzen wir $\Phi_j := \varrho_j\Phi$. Dann gilt $\sum_{j=1}^k \Phi_j = \Phi$ und $\mathrm{Supp}(\Phi_j) \subset V_j$. Betrachten wir

$$S_{(t_1,\ldots,t_k)} = \{p + \sum_{j=1}^k t_j\Phi_j(p) : p \in S\}.$$

Nach dem oben bereits Bewiesenen wissen wir

$$\frac{\partial}{\partial t_j}A[S_{(t_1,\ldots,t_k)}]_{|(t_1,\ldots,t_k)=(0,\ldots,0)} = -2\int_S \langle\Phi_j, \mathcal{H}\rangle dA.$$

Nach der Kettenregel folgt daraus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A[S_t]_{t=0} &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial t_j}A[S_{(t_1,\ldots,t_k)}]_{|(t_1,\ldots,t_k)=(0,\ldots,0)}\\ &= -2\sum_{j=1}^k\int_S \langle\Phi_j, \mathcal{H}\rangle dA\\ &= -2\int_S \langle\Phi, \mathcal{H}\rangle dA.\end{aligned}$$

■

Korollar 2.49. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit kompaktem Abschluss $\overline{S}$. Wir nehmen an, dass S minimalen Flächeninhalt hat unter allen regulären Flächen $\overline{S}$ mit demselben Rand $\partial\overline{S} = \partial S$. Dann gilt für das mittlere Krümmungsfeld von S*

$$\mathcal{H} \equiv (0,0,0).$$

Beweis. Angenommen $\mathcal{H}(p) \neq (0,0,0)$ für einen Punkt $p \in S$. In einer Umgebung von p betrachten wir das glatte Einheitsnormalenfeld N, für das $\langle \mathcal{H}(p), N(p) \rangle > 0$ ist. Es ist klar, dass gilt $\langle \mathcal{H}, N \rangle > 0$ auf einer kleinen Umgebung V von p in S. Wähle eine glatte Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ so, dass $\mathrm{Supp}(f) \subset V$, $f \geq 0$ und $f(p) > 0$ und setze

$$\Phi(g) := \begin{cases} f(g)N(g) & \text{falls } g \in S \cap V \\ (0,0,0) & \text{falls } g \in S - V. \end{cases}$$

Φ ist ein glattes Normalenfeld auf S mit kompaktem Träger und

$$\int_S \langle \mathcal{H}, \Phi \rangle > 0.$$

Andererseits nach Satz 2.48 gilt

$$\frac{d}{dt} A[S_t]_{|t=0} = 0.$$

Und das ist ein Widerspruch ■

Definition 2.50 (Minimalfläche)**.** Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Minimalfläche*, falls die mittlere Krümmung

$$H = 0.$$

Bemerkung. Minimalflächen müssen nicht unbedingt Flächenminimierend sein!

Bemerkung. Ist die Fläche S orientierbar, so gibt es ein glattes Einheitsnormalenfeld N auf S und $\mathcal{H} = HN$, wobei H die mittlere Krümmung ist. Die Minimalflächenbedingung lautet dann $H \equiv 0$.

Proposition 2.51. *Sei S der Graph der Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$-offen. S ist genau dann eine Minimalfläche, wenn φ folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:*

$$(1 + (\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + (1 + (\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Beweis. Übung! ■

Lemma 2.52 (Ableitung der Determinante)**.** *Sei $t \to g(t)$ eine differenzierbare Kurve von invertierbaren reellen $n \times n$- Matrizen. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dt} \ln\det(g) = \mathrm{Spur}(g^{-1}\frac{d}{dt}g)$$

Beweis. Zunächst weisen wir die Gleichung in $t = t_0$ nach, falls $g(t_0) = Id$. Dann lautet die Behauptung einfach

$$\frac{d}{dt}\det(g(t_0)) = \mathrm{Spur}(\frac{dg}{dt}(t_0))$$

Wegen

$$\det(g) = \sum_\sigma sign(\sigma)(g_{1\sigma(1)} \cdots g_{n\sigma(n)})$$

wobei die Summe über alle Permutationen $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ zu bilden ist, haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(g(t_0)) &= \sum_\sigma sign(\sigma)\Big(\frac{dg_{1\sigma(1)}}{dt}(t_0)\cdots g_{n\sigma(n)}(t_0) + \cdots + g_{1\sigma(1)}(t_0)\cdots\frac{dg_{n\sigma(n)}}{dt}(t_0)\Big)\\
&= \frac{dg_{11}}{dt}(t_0)\cdots g_{nn}(t_0) + \cdots + g_{11}(t_0)\cdots\frac{dg_{nn}}{dt}(t_0)\\
&= \mathrm{Spur}(\frac{d}{dt}g(t_0))
\end{aligned}$$

Für den allgemeineren Fall, setzen wir $h(t) := (g(t_0))^{-1}g(t)$. Für $h(t)$ gilt

$$\begin{aligned}
\det((g(t_0))^{-1})\frac{d}{dt}\det(g(t_0)) &= \frac{d}{dt}\det(h(t_0))\\
&= \mathrm{Spur}(\frac{dh}{dt}(t_0))\\
&= \mathrm{Spur}((g(t_0))^{-1}\frac{d}{dt}g(t_0))
\end{aligned}$$

∎

Beispiel 1 Das einfachste und uninteressante Beispiel ist sicherlich eine affine Ebene $S \subset \mathbb{R}^3$. Für diese gilt

$$K \equiv H \equiv 0$$

Beispiel 2 Die *Enneper-Fläche* kann durch eine einzige Parametrisierung beschrieben werden:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$F(u^1, u^2) = (u^1 - \frac{(u^1)^3}{3} + u^1(u^2)^2, u^2 - \frac{(u^2)^3}{3} + u^2(u^1)^2, (u^1)^2 - (u^2)^2).$$

Beispiel 3 Die *Kettenfläche* (oder das *Katenoid*):

$$F(u^1, u^2) = (\cosh u^1 \cos u^2, \cosh u^1 \sin u^2, u^1).$$

Beispiel 4 Die *Wendelfläche* (oder das *Helikoid*):

$$F(u^1, u^2) = (u^1 \sin u^2, -u^1 \cos u^2, u^2).$$

Satz 2.53. *Für jede regulare Fläche gilt*

$$K \leq H^2.$$

Beweis.
$$4(H^2 - K) = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2 = (k_1 - k_2)^2 \geq 0$$

■

Korollar 2.54. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche. Dann gilt*
$$K \leq 0$$
Somit gibt es keine kompakte Minimalflächen.

Beweis. ■