2.9. **Minimalflächen.**

Satz 2.48 (Variation des Flächeninhaltes)**.** *Sei S eine reguläre Fläche mit endlichem Flächeninhalt. Sei $\mathcal{H}$ das mittlere Krümmungsfeld. Sei $\Phi : S \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Normalenfeld auf S mit kompakten Träger. Dann ist für $|t|$ hinreichend klein die Menge $S_t := \{p + t\Phi(p) : p \in S\}$ eine reguläre Fläche mit endlichem Flächeninhalt und es gilt:*

$$\frac{d}{dt} A[S_t]_{|t=0} = -2 \int_S \langle \Phi, \mathcal{H} \rangle dA.$$

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Träger von Φ ganz in einem Koordinatenbereich enthalten ist. D.h. für eine lokale Parametrisierung (U, F, V) gilt $\operatorname{supp}(\Phi) \subset (S \cap V)$. Für S_t ist die entsprechende Parametrisierung gegeben durch (U, F_t, V), wobei

$$\begin{array}{rcl} F_t : U & \to & \mathbb{R}^3 \\ F_t(u^1, u^2) & = & F(u^1, u^2) + t\Phi(F(u^1, u^2)), \end{array}$$

für $|t|$ klein eine lokale Parametrisierung ist, denn die Injektivität von F_t ist eine offene Bedingung. Jetzt berechnen wir

$$\frac{\partial F_t}{\partial u^j} = \frac{\partial F}{\partial u^j} + \frac{\partial (f \circ F)}{\partial u^j}(N \circ F) + (f \circ F)\frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^j},$$

wobei $\Phi = fN$ und N das durchdie Parametrisierung gegebene Einheitsnormalenfeld auf $S \cap V$ ist. Wir haben die erste Fundamentalform von S_t

$$\begin{aligned} g^t_{kj} &= \langle \frac{\partial F_t}{\partial u^k}, \frac{\partial F_t}{\partial u^k} \rangle \\ &= g_{kj} + t\frac{\partial (f \circ F)}{\partial u^j} \underbrace{\langle \frac{\partial F}{\partial u^k}, N \circ F \rangle}_{=0} + t(f \circ F) \underbrace{\langle \frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^j} \rangle}_{=-h_{kj}} \\ &\quad + t\frac{\partial (f \circ F)}{\partial u^k} \underbrace{\langle N \circ F, \frac{\partial F}{\partial u^j} \rangle}_{=0} + t(f \circ F) \underbrace{\langle \frac{\partial (N \circ F)}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \rangle}_{=-h_{jk}} + O(t^2) \\ &= g_{kj} - 2t(f \circ F)h_{kj} + O(t^2) \\ &= \sum_{z=1}^{2} (\delta^z_k - 2t(f \circ F) \sum_l \underbrace{h_{kl} g^{zl}}_{=w^z_k} + O(t^2)) g_{zj} \\ &= \sum_{z=1}^{2} (\delta^z_k - 2t(f \circ F) w^z_k + O(t^2)) g_{zj}, \end{aligned}$$

Benutzen wir die folgende Taylor-Entwicklung der Determinante:

$$\det(Id + X) = 1 + \operatorname{Spur}(X) + O(\|X\|^2) \quad (*)$$

und erhalten wir:

$$\begin{aligned}\det(g^t_{kj}) &= \det(g_{kj})\det(Id - 2t(f\circ F)(w^z_k) + O(t^2))\\ &= \det(g_{kj})(1 + \mathrm{Spur}(-2t(f\circ F)(w^z_k) + O(t^2)))\\ &= \det(g_{kj})(1 - 4t(f\circ F)H + O(t^2)).\end{aligned}$$

Nach $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$ haben wir

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(g^t_{kj})} &= \sqrt{\det(g_{kj})}\sqrt{1 - 4t(f\circ F)H + O(t^2)}\\ &= \sqrt{\det(g_{kj})}(1 - 2tfH + O(t^2)).\end{aligned}$$

Integration über S liefert nun

$$\begin{aligned}A[S_t] &= \int_S 1 - 2tfH + O(t^2)dA\\ &= A[S] - 2t\int_S \langle\Phi,\mathcal{H}\rangle dA + O^(t^2).\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen für den Fall, dass der Träger von Φ ganz in einem Koordinatenbereich enthalten ist.

Für den allgemeineren Fall, haben wir endlich viele Koordinatensysteme (U_1, F_1, V_1) ... (U_k, F_k, V_k), die den Träger von Φ überdecken. D.h. $\mathrm{Supp}(\Phi) \subset \bigcup_{j=1}^k V_j$. Wir wählen eine untergeordnete *Teilung der Eins*, d.h. glatte Funktion $\varrho_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $0 \le \varrho_j \le 1$, $\mathrm{Supp}(\varrho_j) \subset V_j$ und $\sum_{j=1}^k \varrho_j \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\mathrm{Supp}(\Phi)$. Nun setzen wir $\Phi_j := \varrho_j\Phi$. Dann gilt $\sum_{j=1}^k \Phi_j = \Phi$ und $\mathrm{Supp}(\Phi_j) \subset V_j$. Betrachten wir

$$S_{(t_1,\ldots,t_k)} = \{p + \sum_{j=1}^k t_j\Phi_j(p) : p \in S\}.$$

Nach dem oben bereits Bewiesenen wissen wir

$$\frac{\partial}{\partial t_j}A[S_{(t_1,\ldots,t_k)}]_{|(t_1,\ldots,t_k)=(0,\ldots,0)} = -2\int_S \langle\Phi_j,\mathcal{H}\rangle dA.$$

Nach der Kettenregel folgt daraus

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A[S_t]_{t=0} &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial t_j}A[S_{(t_1,\ldots,t_k)}]_{|(t_1,\ldots,t_k)=(0,\ldots,0)}\\ &= -2\sum_{j=1}^k\int_S \langle\Phi_j,\mathcal{H}\rangle dA\\ &= -2\int_S \langle\Phi,\mathcal{H}\rangle dA.\end{aligned}$$

■

Korollar 2.49. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit kompaktem Abschluss $\overline{S}$. Wir nehmen an, dass S minimalen Flächeninhalt hat unter allen regulären Flächen $\overline{S}$ mit demselben Rand $\partial\overline{S} = \partial S$. Dann gilt für das mittlere Krümmungsfeld von S*

$$\mathcal{H} \equiv (0,0,0).$$

Beweis. Angenommen $\mathcal{H}(p) \neq (0,0,0)$ für einen Punkt $p \in S$. In einer Umgebung von p betrachten wir das glatte Einheitsnormalenfeld N, für das $\langle \mathcal{H}(p), N(p)\rangle > 0$ ist. Es ist klar, dass gilt $\langle \mathcal{H}, N\rangle > 0$ auf einer kleinen Umgebung V von p in S. Wähle eine glatte Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ so, dass $\mathrm{Supp}(f) \subset V$, $f \geq 0$ und $f(p) > 0$ und setze

$$\Phi(g) := \begin{cases} f(g)N(g) & \text{falls } g \in S \cap V \\ (0,0,0) & \text{falls } g \in S - V. \end{cases}$$

Φ ist ein glattes Normalenfeld auf S mit kompaktem Träger und

$$\int_S \langle \mathcal{H}, \Phi\rangle > 0.$$

Andererseits nach Satz 2.48 gilt

$$\frac{d}{dt}A[S_t]_{|t=0} = 0.$$

Und das ist ein Widerspruch ■

Definition 2.50 (Minimalfläche)**.** Eine reguläre Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Minimalfläche*, falls die mittlere Krümmung

$$H = 0.$$

Bemerkung. Minimalflächen müssen nicht unbedingt Flächenminimierend sein!

Bemerkung. Ist die Fläche S orientierbar, so gibt es ein glattes Einheitsnormalenfeld N auf S und $\mathcal{H} = HN$, wobei H die mittlere Krümmung ist. Die Minimalflächenbedingung lautet dann $H \equiv 0$.

Proposition 2.51. *Sei S der Graph der Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$-offen. S ist genau dann eine Minimalfläche, wenn φ folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:*

$$(1 + (\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + (1 + (\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Beweis. Übung! ■

Lemma 2.52 (Ableitung der Determinante)**.** *Sei $t \to g(t)$ eine differenzierbare Kurve von invertierbaren reellen $n \times n$- Matrizen. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dt}\ln\det(g) = \mathrm{Spur}(g^{-1}\frac{d}{dt}g)$$

Beweis. Zunächst weisen wir die Gleichung in $t = t_0$ nach, falls $g(t_0) = Id$. Dann lautet die Behauptung einfach

$$\frac{d}{dt}\det(g(t_0)) = \mathrm{Spur}(\frac{dg}{dt}(t_0))$$

Wegen

$$\det(g) = \sum_\sigma sign(\sigma)(g_{1\sigma(1)} \cdots g_{n\sigma(n)})$$

wobei die Summe über alle Permutationen $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ zu bilden ist, haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(g(t_0)) &= \sum_\sigma sign(\sigma)\left(\frac{dg_{1\sigma(1)}}{dt}(t_0)\cdots g_{n\sigma(n)}(t_0) + \cdots + g_{1\sigma(1)}(t_0)\cdots\frac{dg_{n\sigma(n)}}{dt}(t_0)\right) \\
&= \frac{dg_{11}}{dt}(t_0)\cdots g_{nn}(t_0) + \cdots + g_{11}(t_0)\cdots\frac{dg_{nn}}{dt}(t_0) \\
&= \mathrm{Spur}(\frac{d}{dt}g(t_0))
\end{aligned}$$

Für den allgemeineren Fall, setzen wir $h(t) := (g(t_0))^{-1}g(t)$. Für $h(t)$ gilt

$$\begin{aligned}
\det((g(t_0))^{-1})\frac{d}{dt}\det(g(t_0)) &= \frac{d}{dt}\det(h(t_0)) \\
&= \mathrm{Spur}(\frac{dh}{dt}(t_0)) \\
&= \mathrm{Spur}((g(t_0))^{-1}\frac{d}{dt}g(t_0))
\end{aligned}$$

∎

Beispiel 1 Das einfachste und uninteressante Beispiel ist sicherlich eine affine Ebene $S \subset \mathbb{R}^3$. Für diese gilt

$$K \equiv H \equiv 0$$

Beispiel 2 Die *Enneper-Fläche* kann durch eine einzige Parametrisierung beschrieben werden:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$F(u^1, u^2) = (u^1 - \frac{(u^1)^3}{3} + u^1(u^2)^2, u^2 - \frac{(u^2)^3}{3} + u^2(u^1)^2, (u^1)^2 - (u^2)^2).$$

Beispiel 3 Die *Kettenfläche* (oder das *Katenoid*):

$$F(u^1, u^2) = (\cosh u^1 \cos u^2, \cosh u^1 \sin u^2, u^1).$$

Beispiel 4 Die *Wendelfläche* (oder das *Helikoid*):

$$F(u^1, u^2) = (u^1 \sin u^2, -u^1 \cos u^2, u^2).$$

Satz 2.53. *Für jede regulare Fläche gilt*

$$K \leq H^2.$$

Beweis.
$$4(H^2 - K) = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2 = (k_1 - k_2)^2 \geq 0$$
■

Korollar 2.54. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche. Dann gilt*
$$K \leq 0$$
Somit gibt es keine kompakte Minimalflächen.

Beweis. ■

Definition 2.55 (Konforme Parametrisierung)**.** Sei S eine reguläre Flache, und sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S. Wir nennen $F(U)$ paramerisierte Fläche, oder Flächenstück. In der Reste des Abschnitts betrachten wir den Flächenstücke. F heißt *konform* oder *winkeltreu*, wenn die erste Fundamentalform (g_{ij}) bzgl. der lokalen Parametrisung ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix ist, also wenn die Gleichung
$$(g_{ij})(u) = \lambda(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
gilt mit einer gewissen Funktion $\lambda : U \to \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Eine konforme Parametrisierung heißt auch *isotherm*, die zugehörigen Parameter heißen *isotherme Parameter*. λ heißt *konform Faktor* von konformer Parametrisierung (U, F, V).

Proposition 2.56. *Für eine konforme Parametrisierung (U, F, V) mit dem konformen Faktor λ gilt*
$$\Delta F = 2\lambda \mathcal{H} = 2\lambda H \cdot N.$$
wobei
$$\Delta = \frac{\partial}{\partial u^1}\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial u^2}$$
der Laplace-Operator ist. Insbesondere definiert eine konforme Parametrisierung F genau dann eine Minimalfläche, wenn die drei Komponentenfunktionen f_1, f_2, f_3 von F harmonisch sind,

Beweis. Leiten wir die Gleichungen
$$\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^1} \rangle = \lambda, \quad \langle \frac{\partial F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \rangle = \lambda, \quad \langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \rangle = 0,$$
ab und erhalten wir
$$\langle \frac{\partial}{\partial u^1}\frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^1} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial u^1}\frac{\partial F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^2} \rangle = -\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial u^2} \rangle.$$
Es folgt
$$\langle \Delta F, \frac{\partial F}{\partial u^1} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial u^1}\frac{\partial F}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^1} \rangle = 0.$$
Analog, erhalten wir
$$\langle \Delta F, \frac{\partial F}{\partial u^2} \rangle = 0.$$

D.h., ΔF steht senkrecht auf der Tangentialebene, ist also propotional zur Einheitsnormalen N. Nun ist aber $2H = \lambda^{-2}(g_{22}h_{11} + g_{11}h_{22}) = \lambda^{-1}(h_{11} + h_{22})$, folglich

$$\langle \Delta F, N\rangle = \langle \frac{\partial}{\partial u^1}\frac{\partial F}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial u^2}, N\rangle = h_{11} + h_{22} = 2H\lambda.$$

■

Wir verwenden die folgende grundlegende Tatsache aus der Funktionentheorie: Eine komplexe Funktion

$$\phi(u_1 + iu_2) = x(u_1, u_2) + iy(u_1, u_2)$$

mit reellen Größen u_1, u_2, x, y ist komplex analytisch oder holomorph genau dann, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \frac{\partial y}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = -\frac{\partial y}{\partial u_1}.$$

Fur ein Parametrisierung (U, F, V) mit Komponenten $F = (f_1, f_2, f_3)$ definieren wir eine Abbildung $\phi : U \to C^3$ durch

$$\phi(u_1 + iu_2) = \frac{\partial F}{\partial u_1} - i\frac{\partial F}{\partial u_2},$$

bzw.

$$\phi_j(u_1 + iu_2) = \frac{\partial f_j}{\partial u_1} - i\frac{\partial f_j}{\partial u_2}, \qquad \text{für } j = 1, 2, 3$$

Proposition 2.57. *Es gilt:*

(a) *F ist konform genau dann, wenn*

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \tag{5}$$

(b) *Falls F eine konforme Parametrisierung ist, so ist $F(U)$ eine Minimalfläche genau dann, wenn ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 holomorph sind.*

(c) *Falls umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 holomorph sind mit*

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0,$$

dann ist das durch die obigen Gleichungen definierte F regulär genau dann, wenn

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0. \tag{6}$$

Beweis. (a) Nach Definition gilt

$$\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2 = \langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^1}\rangle + i^2\langle \frac{\partial F}{\partial u^2}, \frac{\partial F}{\partial u^2}\rangle - 2i\langle \frac{\partial F}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}\rangle = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} = 0.$$

(b) Berechne die zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{Re}\phi_k) = \frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{Im}\phi_k) \\
\frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2} &= -\frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{Im}\phi_k) \\
\frac{\partial^2 f_k}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{Re}\phi_k) = -\frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{Im}\phi_k)
\end{aligned}$$

denn ϕ_k holomorph sind. Daraus folgt es

$$\Delta f_k = \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial v^2} = 0,$$

also $\Delta F = 0$. Es folgt aus Proposition 2.56

$$H = 0.$$

(c) Es ist leicht zu sehen, dass

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k \bar{\phi}_k = \sum_{k=1}^{3} (\frac{\partial f_k}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f_k}{\partial v})^2 = \langle \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial u} \rangle + \langle \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial v} \rangle \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0$.

■

Bemerkung. Der Beweis von (b) impliziert, dass F harmonisch ist genau dann, wenn ϕ_k $(k = 1, 2, 3)$ holomorphi sind.

Korollar 2.58. *In einem einfach zusammenhängendes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ seien drei holomorphe Funktionen $\phi_k : U \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, 3)$ gegeben mit Bedingungen* (5) *und* (6)*. Dann ist für festes $u_0 \in U$ die durch*

$$f_k(z) = \operatorname{Re} \int_{u_o}^{u} \phi_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2, 3$$

definierte Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein reguläre Minimalfläche (oder reguläres Minimalflächenstück).

Lemma 2.59 (isotherme Parameter)**.** *Wenn man von Krümmungslinienparametern (u 1 , u 2) einer Minimalfläche mit $K \neq 0$ ausgeht ($g_{12} = h_{12} = 0$), dann kann man daraus durch einfache Integration eine konforme Parametrisierung konstruieren, also isotherme Parameter.*

*Beweis:*In Krümmungslinienparametern gilt

$$\frac{\partial N}{\partial u^j} = -\kappa_j \frac{\partial F}{\partial u^j}.$$

Das Ableiten von obigen Gleichung liefert

$$\frac{\partial^2 N}{\partial u^1 \partial u^2} = -\frac{\partial}{\partial u^1}(\kappa_2 \frac{\partial F}{\partial u^2}) = -\frac{\partial}{\partial u^2}(\kappa_1 \frac{\partial F}{\partial u^1}).$$

Setze $\kappa = \kappa_1 = -\kappa_2 > 0$ (da F Minimalfläche ist). Es folgt

$$\frac{\partial\kappa}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial u^1} + 2\kappa\frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial\kappa}{\partial u^1}\frac{\partial F}{\partial u^2} = 0.$$

Das Skalarprodukt von der Gleichung mit $\frac{\partial F}{\partial u^1}$ liefert

$$0 = \frac{\partial\kappa}{\partial u^2} g_{11} + 2\kappa\frac{\partial^2 F}{\partial g_{11}}\partial u^2 + \frac{\partial\kappa}{\partial u^1}\cdot 0 = \frac{\partial}{\partial u^2}(\kappa \cdot g_{11}).$$

Also ist $\kappa \cdot g_{11}$ konstant in u^2-Richtung, ist also eine Funktion nur von u^1. Setze $k \cdot g_{11} = \Phi_1(u^1) > 0$. Analog ist $\kappa \cdot g_{22}$ eine Funktion nur von u^2. Wir setzen $k \cdot g_{22} = \Phi_1(u^2) > 0$. Betrachte nun

$$v^i := \int \sqrt{\Phi_i(u^i)} du^i, \quad i = 1, 2$$

und die Transformation $(u^1, u^2) \mapsto (v^1, v^2)$, denn

$$(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\Phi_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Phi_2} \end{pmatrix}$$

hat den Maximalen Rang. Sei Ψ die Inverse der Tranformation und setze $\widetilde{F} = F \circ \Psi$ Der erste Fundamentalform bzgl. $\widetilde{F}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
(\tilde{g}_{ij}) &= (D\Psi)^*(g_{ij})D\Psi \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{\Phi_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Phi_2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\Phi_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Phi_2} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\kappa}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Korollar 2.60 (Analytizität der Minimalflchen)**.** *Sei (U, F, V) ein Minimalflächenstück ohne Flachpunkte. Dann gibt es eine Parametrisierung derart, dass die drei Komponentenfunktionen reell-analytisch, sind, also lokal in ihre Taylorreihe entwickelbar.*

Lemma 2.61. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend ist. Drei beliebig gegebenen holomorphen Funktionen $\phi_k : U \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, 3)$ mit $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ (keines der ϕ_k identisch verschwindet) kann man eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und eine meromorphe Funktion $h : U \to C \cup \{\infty\}$ zuordnen derart, dass fh^2 holomorph ist und*

$$\phi_1 = \frac{f}{2}(1 - h^2), \quad \phi_2 = i\frac{f}{2}(1 + h^2), \quad \phi_3 = fh. \tag{7}$$

Umgekehrt induziert jedes gegebene f und h mit den angegebenen Eigenschaften ein entsprechendes ϕ mit $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$.

*Beweis:*Setzen wir

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad h = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Dies ist wohldefiniert auÃer in dem Fall $\phi_1 = i\phi_2$, woraus notwendig $\phi_3 = 0$ folgt, was nach Voraussetzung aber ausgeschlossen ist. Wir haben

$$fh^2 = \frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -\frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -(\phi_1 + i\phi_2),$$

also eine holomorphe Funktion. Die Gleichungen (7) verifiziert man leicht anhand der Definition.

Umgekehrt seien f und h gegeben, dann erfüllen die durch Gleichungen (7) definierten ϕ_k $(k = 1, 2, 3)$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2 = 0.$$

Ferner sind ϕ_1 , ϕ_2 holomorph, weil f und fh^2 holomorph sind. Folglich ist ϕ_3^2 holomorph. Da $\phi_3 = fh$ meromorph ist, ist ϕ_3 holomorph. □

Satz 2.62 (Weierstraß-Darstellung)**.** *Jede konform parametrisierte Minimalfläche* (U, F, V) *, die keine Ebene ist, lässt sich lokal darstellen durch*

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \operatorname{Re} \int_{u_0}^{u} \frac{f}{2}(1 - h^2) d\zeta \\ f_2(u) &= \operatorname{Re} \int_{u_0}^{u} i\frac{f}{2}(1 + h^2) d\zeta \\ f_3(u) &= \operatorname{Re} \int_{u_0}^{u} fh d\zeta \end{aligned}$$

wobei f *und* h *wie oben in Lemma 2.61 gewählt sind. Der Parameterbereich muss dabei so gewählt werden, dass die auftretenden Integrale wegunabhängig sind (z.B. als eine kleine Kreis- scheibe oder ein einfach zusammenh "angendes Gebiet).*

Umgekehrt definiert jedes vorgegebene Paar $(f(z), h(z))$ *mit holomorphem* f*, meromorphem* h *und holomorphem* fh^2 *ein konform parametrisiertes Minimalflächenstück* $F(U)$ *. Dieses Flächenstück* F *ist jedenfalls dann regulär, wenn* f *höchstens an den Polar von* h *verschwindet und dort* $fh^2 \neq 0$ *gilt.*

Beispiel 1. Die Weierstraß-Darstellung der Enneper-Fläche

$$F(u^1, u^2) = (u^1 - \frac{(u^1)^3}{3} + u^1(u^2)^2, -u^2 + \frac{(u^2)^3}{3} - u^2(u^1)^2, (u^1)^2 - (u^2)^2).$$

ist durch $f = 2, h(z) = z$ gegeben mit $\phi_1 = 1 - z^2$, $\phi_2 = i(1 + z^2)$, $\phi_3 = 2z$.

Für die Wahl von $f = 2z^2$, $h = z^{-1}$ ergibt sich $\phi_1 = z^2 - 1$, $\phi_2 = i(z^2 + 1)$, $\phi_3 = 2z$ und damit wieder (bis auf die Spiegelung $f_1 \mapsto -f_1$) die Enneper-Fl äche. Die Weierstraß-Darstellung ist also im geometrischen Sinne keineswegs eindeutig.

Beispiel 2. Das Katenoid $F(u_1, u_2) = (\cosh u_1 \cos u_2, \cosh u_1 \sin u_2, u_1)$ ist die von der Kettenlinie erzeugte Drehfläche. Hier gilt

$$\begin{aligned}
\phi_1(u_1 + iu_2) &= \sinh u_1 \cos u_2 + i \cosh u_1 \sin u_2 = \sinh(u_1 + iu_2) \\
\phi_2(u_1 + iu_2) &= \sinh u_1 \sin u_2 - i \cosh u_1 \cos u_2 = -i \cosh(u_1 + iu_2) \\
\phi_3(u_1 + iu_2) &= 1
\end{aligned}$$

Offenbar sind ϕ_k $(k = 1, 2, 3)$ holomorph mit $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \sinh^2 z + i^2 \cosh^2 z + 1 = 0$. Nach 3.31 ist dann F eine konform parametrisierte Minimalfläche. Die Weierstraß- Darstellung ist

$$f(z) = -e^{-z}, h(z) = -e^{z}.$$

Beispiel 3. Die Wendelfläche (oder das Helikoid) ist zugleich Regelfläche und Minimalfläche:

$$F(u_1, u_2) = (0, 0, -u_1) + u_2(-\sin u_1, \cos u_1, 0) = (-u_2 \sin u_1, u_2 \cos u_1, -u_1)$$

Wenn wir die Fläche umparametrisieren als

$$\widetilde{F}(u_1, u_2) = (-\sinh u_1 \sin u_2, \sinh u_1 \cos u_2, -u_2),$$

dann wird die zugehörige ϕ_k

$$\phi_1(z) = i \sinh z, \quad \phi_2(z) = \cosh z, \quad \phi_3(z) = i.$$

Dies sind nun -bis auf den Faktor i- genau dieselben Funktionen $\phi_k(k = 1, 2, 3)$ wie oben für das Katenoid. Wir sehen daran auch, dass das Katenoid F und das Helikoid $\widetilde{F}$ lokal isometrisch. (Die Definition wird später gegeben.)