

3. INNERE GEOMETRIE VON FLÄCHEN

3.1. Isometrien.

Definition 3.1 (lokale Isometrien). Seien S_1 und S_2 reguläre Flächen im \mathbb{R}^3 . Eine glatte Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ heißt *lokale Isometrie*, falls für jeden Punkt $p \in S_1$ das Differential

$$d_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

eine lineare Isometrie bzgl. der ersten Fundamentalform, d.h.,

$$\langle d_p f(X), d_p f(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

für alle $X, Y \in T_p S_1$.

Beispiel 3.2. Sei $S_1 = \{\mathbb{R}^2\} \times \{0\}$ die x - y -Ebene, $S_2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche. Die Abbildung

$$f : S_1 \rightarrow S_2, \quad f(x, y, 0) = (\cos(x), \sin(y), y)$$

ist eine lokale Isometrie.

Beispiel 3.3. Sei $S_1 = \{\mathbb{R}^2\} \times \{0\}$ die x - y -Ebene, $S_2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{3}\zeta^2, \zeta > 0\}$ die Kegelfläche. Die Abbildung

$$f : S_1 \rightarrow S_2, \quad f(x, y, 0) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x^2 - y^2, 2xy, \sqrt{3}(x^2 + y^2) \right)$$

ist eine lokale Isometrie.

Beweis. Für $e_1, e_2 \in T_p S_1$ und $p = (x_0, y_0, 0)$

$$\langle d_p f(e_i), d_p f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$$

wobei $e_1 = \frac{d}{dt}|_{t=0} (p + t(1, 0, 0)) = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$.

We berechnen

$$\begin{aligned} d_p f(e_1) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\frac{1}{2\sqrt{(x_0+t)^2 + y_0^2}} \left((x_0+t)^2 - y_0^2, 2(x_0+t)y_0, \sqrt{3}((x_0+t)^2 + y_0^2) \right) \right) \\ &= -\frac{x_0}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(x_0^2 - y_0^2, 2y_0x_0, \sqrt{3}(x_0^2 + y_0^2) \right) + \frac{1}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}} \left(2x_0, 2y_0, 2\sqrt{3}x_0 \right) \\ &= \frac{1}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(x_0^3 + x_0y_0^2, 2y_0^3, \sqrt{3}x_0(x_0^2 + y_0^2) \right) \\ d_p f(e_2) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\frac{1}{2\sqrt{x_0^2 + (y_0+t)^2}} \left(x_0^2 - (y_0+t)^2, 2x_0(y_0+t), \sqrt{3}(x_0^2 + (y_0+t)^2) \right) \right) \\ &= -\frac{y_0}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(x_0^2 - y_0^2, 2x_0y_0, \sqrt{3}(x_0^2 + y_0^2) \right) + \frac{1}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}} \left(-2y_0, 2x_0, 2\sqrt{3}y_0 \right) \\ &= \frac{1}{2(x_0^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-3x_0^2y_0 - y_0^3, 2x_0^3, \sqrt{3}y_0(x_0^2 + y_0^2) \right) \end{aligned}$$

Also $\langle d_p f(e_1), d_p f(e_1) \rangle = \langle d_p f(e_2), d_p f(e_2) \rangle = 1$ und $\langle d_p f(e_1), d_p f(e_2) \rangle = 0$.

Bemerkung. Die Länge von Kurven, die auf der Fläche verlaufen, und der Winkel zwischen zwei Tangentialvektoren hängen nur von der ersten Fundamentalform ab. Falls es also eine lokale Isometrie f gibt, verändert sich die Länge und der Winkel *nicht* durch die Abbildung f .

Definition 3.4 (Größen der inneren Geometrie). Die geometrische Größen, die sich unter lokalen Isometrien nicht verändern, heißen *Größen der inneren Geometrie*.

Frage: Ist die Gauß-Krümmung oder die mittlere Krümmung eine Größe der inneren Geometrie, d.h. für jede lokale Isometrie $f : S_1 \rightarrow S_2$ gilt

$$K_{S_1} = F_{S_2} \circ f \quad \text{oder} \quad H_{S_1} = H_{S_2} \circ f?$$

Beispiel 3.5. Die mittlere Krümmung ist keine Größe der inneren Geometrie, denn für die Ebene inst $H_{\text{EBENE}} \equiv 0$, während für die Zylinderfläche $H_{\text{ZYLINDER}} \equiv \frac{1}{2}$ gilt. Da Ebene und Zylinder lokal isometrisch sind, müsste $H_{\text{ZYLINDER}} = H_{\text{EBENE}} \circ f$ gelten, falls die mittlere Krümmung eine Größe der inneren Geometrie wäre. Die Hauptkrümmungen sind auch keine Größen der inneren Geometrie.

Aber die Gauß-Krümmung ist dagegen eine Größe der inneren Geometrie (das Theorema Egregium von Gauß).

Bemerkung. Da das Differential einer lokalen Isometrie insbesondere stets maximalen Rang hat, ist nach dem Umkehrsatz eine solche lokale Isometrie stets ein lokaler Diffeomorphismus. Im allgemeinen ist sie jedoch kein globaler Diffeomorphismus, d.h. nicht bijektiv.

Proposition 3.6. Sei $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine lokale Isometrie. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S_1 . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $V \cap S_1 \subset S_1$ so klein, dass $f_{V \cap S_1} : V \cap S_1 \rightarrow f(V \cap S_1)$ ein Diffeomorphismus ist. Damit ist $f \circ F$ eine lokale Parametrisierung von S_2 . Dann übereinstimmen die Koeffizientenfunktionen der Matrixdarstellungen $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ von S_1 bzgl. F und $\tilde{g}_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ bezg. $f \circ F$.

Beweis: Setze $\tilde{F} := f \circ F$. Die Koeffizientenfunktionen der Matrixdarstellung $g_{ij} : v \rightarrow \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle.$$

Und \tilde{g}_{ij} ist

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij}(u) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u^i}(u), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u^j}(u) \right\rangle = \left\langle df \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} \right), df \left(\frac{\partial F}{\partial u^j} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right\rangle = g_{ij}(u), \end{aligned}$$

denn f ist eine lokale Isometrie. □

Definition 3.7 (Isometrien). Eine lokale Isometrie $f : S_1 \rightarrow S_2$, die zusätzlich bijektiv ist, heißt *Isometrie*. Existiert es eine solche Isometrie $f : S_1 \rightarrow S_2$, so heißen die Flächen S_1 und S_2 *isometrisch*. Die Flächen S_1 und S_2 heißen *lokal isometrisch*, falls es zu jedem Punkt $p \in S_1$ eine offene Umgebung $U_1 \subset S_1$ von p gibt, eine offene Teilmenge $U_2 \subset S_2$ und eine Isometrie $f : U_1 \rightarrow U_2$ und umgekehrt, zu jedem Punkt $q \in S_2$ eine offene Umgebung $U'_2 \subset S_2$ von q , eine offene Teilmenge $U'_1 \subset S_1$ und eine Isometrie $f' : U'_2 \rightarrow U'_1$.

Bemerkungen.

- Ist $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine Isometrie, so ist auch $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ eine Isometrie. (Ü)
- Der Zylinder und die Ebene sind lokal isometrisch. Aber sie sind nicht isometrisch, da sie nicht einmal diffeomorph sind.
- Die Beziehungen “isometrisch” und “lokal isometrisch” bilden offensichtlich Äquivalenzrelationen auf der Menge der regulären Flächen.

3.2. Vektorfelder und kovariante Ableitung.

Definition 3.8 (das Vektorfeld). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein Vektorfeld auf S ist eine Abbildung $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $v(p) \in T_p S$ für alle $p \in S$.

Beispiel 3.9 (Gradientenfeld). Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Da die erste Fundamentalform nicht ausgeartet ist, existiert, bei festgehaltenem Punkt p , genau ein Vektor $v(p) \in T_p S$ mit der Eigenschaft

$$d_p f(X) = I(v(p), X)$$

für alle $X \in T_p S$. Dadurch wird das Gradientenvektorfeld $v := \text{grad } f$ definiert.

Definition 3.10. Ein Vektorfeld v auf S ist stetig, bzw. glatt, falls $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig bzw. glatt ist.

Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung der regulären Fläche S . Für jeden Punkt $p \in V \cap S$ bilden die Vektoren $\frac{\partial F}{\partial u^1}(F^{-1}(p))$ und $\frac{\partial F}{\partial u^2}(F^{-1}(p))$ eine Basis von $T_p S$. Ein Vektorfeld v auf S ist für alle $p \in V \cap S$ in der Form

$$v(p) = \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p))$$

darstellbar. Da $\frac{\partial F}{\partial u^j}$ glatt sind, ist v auf $V \cap S$ stetig bzw. glatt genau dann, wenn die Koeffizientenfunktionen

$$\xi^i : V \cap S \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig bzw. glatt sind. Diese ist äquivalent zu der Aussage, dass $\xi^i \circ F$ stetig bzw. glatt ist.

Beispiel 3.11. Das Gradientenvektorfeld $\text{grad } f$ einer glatten Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt. Sei dazu (U, F, V) eine lokale Parametrisierung. Dann ist $\tilde{f} := f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls eine glatte Funktion. Wir müssen die Funktionen ξ^j in der lokalen Darstellung

$$\text{grad } f = \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p)).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) &= d_p f \left(\frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right) \\
&\stackrel{\text{Def.}}{=} I \left(\text{grad } f(p), \frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right) \\
&= I \left(\sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p)), \frac{\partial F}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \right) \\
&= \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) g_{jk}(F^{-1}(p)).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\xi^j \circ F = \sum_{k=1}^2 g^{jk} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}.$$

Damit sind die Funktionen ξ^j glatt, d.h. $\text{grad } f$ ist ein glattes Vektorfeld.

Insbesondere, ist das Gradientenvektorfeld $\text{grad } f$

$$\text{grad } f(p) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 g^{jk}(F^{-1}(p)) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(F^{-1}(p)) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p))$$

in der lokalen Darstellung bzgl. (U, F, V) .

Definition 3.12 (Richtungsableitung). Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$ ein Punkt, $X_p \in T_p S$ ein Tangentialvektor und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann heißt

$$\partial_{X_p} f := d_p f(X_p) = I(\text{grad } f, X_p) \in \mathbb{R}$$

Richtungsableitung von f nach X_p . Ist X ein Vektorfeld auf S , so heißt auch die Funktion

$$\partial_X f : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \partial_X f(p) := \partial_{X(p)} f$$

Richtungsableitung von f nach dem Vektorfeld X .

Seien (U, F, V) und $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ lokale Parametrisierungen der regulären Fläche. Ein Vektorfeld X auf S für $p \in V \cap \tilde{V} \cap S$ hat mit $V \cap \tilde{V} \cap S = \emptyset$ zwei Formen

$$X(p) = \sum_{j=1}^2 \xi^j(p) \frac{\partial F}{\partial u^j}(F^{-1}(p)) = \sum_{j=1}^2 \tilde{\xi}^j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{F}^{-1}(p)).$$

Setze $\tilde{u} := \phi(u) = \tilde{F}^{-1} \circ F$. Nach der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial F}{\partial u^i}(u) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}) \frac{\partial \phi^j}{\partial u^i}(u) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} X(p) &= \sum_{j=1}^2 \tilde{\xi}^j(p) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j} (F^{-1}(p)) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \xi^i(p) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} (u) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \xi^i(p) \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} (u) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^j} (\tilde{u}). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\tilde{\xi}^j(p) = \sum_{i=1}^2 \xi^i(p) \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} (F^{-1}(u)).$$

Definition 3.13 (Lie-Klammer). Das Vektorfeld

$$Z := [X, Y] := XY - YX$$

heißt *Lie-Klammer* von X und Y .

Das Vektorfeld $[X, Y]$ ist also durch die Bedingung

$$\partial X (\partial Y f) - \partial Y (\partial X f) = \partial_{[X, Y]} f$$

für alle f charakterisiert.

Bemerkung. Wenn X und Y Koordinatenfelder sind, d.h. $X = \frac{\partial F}{\partial u^i}$ und $Y = \frac{\partial F}{\partial u^j}$, verschwindet die Lie-Klammer

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right] = 0.$$

(Der Satz von Schwarz).

Definition 3.14 (das Vektorfeld längs Kurven). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Ein *Vektorfeld an S längs c* ist eine Abbildung $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $v(t) \in T_{c(t)}S$ ist für alle $t \in I$.

Beispiel 3.15. Das Geschwindigkeitsfeld $v(t) = c'(t)$ ist ein solches Vektorfeld längs c .

Beispiel 3.16. Sei S eine Regelfläche gegeben durch die Parametrisierung $F(t, s) = c(t) + s \circ v(t)$ wie oben. Dann ist v ein Vektorfeld an S längs der Kurve c .

Definition 3.17 (die kovariante Ableitung). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve, und sei $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld an S längs c . Für jeden Punkt $p \in S$ sei $\Pi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p S$ die Orthogonalprojektion, d.h., ist $N(p)$ einer der beiden Einheitsnormalenvektoren an S im Punkt p , so ist

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p) \rangle N(p)$$

Dann heißt

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) := \Pi_{c(t)}(v'(t)),$$

$t \in I$, die kovariante Ableitung von v .

Bemerkung. $\frac{\nabla}{dt}v(t)$ ist auch ein Vektorfeld an S längs c .

Beispiel 3.18. Sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die x - y -Ebene und c eine parametrisierte ebene Kurve, $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$. Ein Vektorfeld v an S längs c ist dann von der Form $v(t) = (v_1(t), v_2(t), 0)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}v(t) &= \pi_{c(t)}(v'(t)) \\ &= \pi_{c(t)}(v'_1(t), v'_2(t), 0) \\ &= (v'_1(t), v'_2(t), 0) \\ &= v'. \end{aligned}$$

Beispiel 3.19. Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Kugel. Berechne die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes der Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow S, \quad c(t) = (\cos(t), \sin(t), 0).$$

Die gewöhnliche Ableitung von c ist $c'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$ und $c''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0) = -c(t)$. Wir wählen ein Einheitsnormalenvektorfeld $N(c(t)) = (\cos(t), \sin(t), 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}c'(t) &= c''(t) - \langle c'', N(c(t)) \rangle N(c(t)) \\ &= (-\cos(t), -\sin(t), 0) - 1(\cos(t), \sin(t), 0) = 0. \end{aligned}$$

(Die Kurve c durchläuft gerade den Äquator von \mathbb{S}^2 und ist Geodätisch).

Lemma 3.20. Sei S eine reguläre fläche, $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve, sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und sei $\varphi : J \rightarrow I$ eine Umparametrisierung. Seien ferner v und w Vektorfelder an S längs c . Dann sind auch v_w und $f v$ Vektorfelder an S längs c und es gilt:

- Additivität: $\frac{\nabla}{dt}(v + w)(t) = \frac{\nabla}{dt}v(t) + \frac{\nabla}{dt}w(t)$,
- Produktregel I: $\frac{\nabla}{dt}(f v)(t) = f'(t)v(t) + f(t)\frac{\nabla}{dt}v(t)$,
- Produktregel II: $\frac{d}{dt}I(v, w)(t) = I(\frac{\nabla}{dt}v(t), w(t)) + I(v(t), \frac{\nabla}{dt}w(t))$,
- Umparametrisierung:

$$\frac{\nabla}{dt}(v \circ \varphi)(t) = \left(\frac{\nabla}{dt}v\right) \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) = \varphi'(t) \left(\frac{\nabla}{dt}v\right) \circ \varphi(t).$$

Mit Hilfe lokaler Parametrisierungen berechnen kann man die kovariante Ableitung berechnen.

Sei (U, F, V) einer Parametrisierung der regulären Fläche S . Die Vektoren $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) \in \mathbb{R}^3$ sind darstellbar durch die Basis $\frac{\partial F}{\partial u^1}(u), \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)$ und $N(F(u))$:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(u) = \Gamma_{ij}^1(u) \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) + \Gamma_{ij}^2(u) \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) + h_{ij}(u) N(F(u)),$$

wobei (h_{ij}) die Koeffizientenmatrix von der zweiten Fundamentalform ist.

Definition 3.21 (Christoffel-Symbole). Die Koeffizientenfunktionen

$$\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R},$$

$1 \leq i, j, k \leq 2$, heißen *Christoffel-Symbole*.

Bemerkung. Die Christoffel-Symbole sind symmetrisch in den unteren Indizes, d.h. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, da $\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}$.

Nun berechnen wir die lokale Formel für die kovariante Ableitung. Sei (U, F, V) einer Parametrisierung von S . Sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve mit $c(I) \subset V$. Setze $\tilde{c} := F^{-1} \circ c : I \rightarrow U$. Sei $v : I \rightarrow S$ ein glattes Vektorfeld an S längs c . Wir drücken v in der durch die Parametrisierung gegebenen Basis aus

$$v(t) = \xi^1(t) \frac{\partial F}{\partial u^1}(\tilde{c}(t)) + \xi^2(t) \frac{\partial F}{\partial u^2}(\tilde{c}(t))$$

und berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} v(t) &= \Pi_{c(t)}(v'(t)) \\ &= \Pi_{c(t)}\left(\sum_{i=1}^2 (\dot{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \xi^i(t) \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}(\tilde{c}(t)) \dot{\tilde{c}}^j(t))\right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \dot{\xi}^i(t) \frac{\partial F}{\partial u^i}(\tilde{c}(t)) + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{\tilde{c}}^j(t) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)) \\ &= \sum_{k=1}^2 (\dot{\xi}^k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{\tilde{c}}^j(t)) \frac{\partial F}{\partial u^k}(\tilde{c}(t)). \end{aligned}$$

Ausgedrückt in der Koeffizientenfunktionen ξ^1 und ξ^2 entspricht die Kovariante Ableitung der folgenden Abbildung

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 \\ \dot{\xi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{\tilde{c}}^j(t) \\ \dot{\xi}^2 + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\tilde{c}(t)) \xi^i(t) \dot{\tilde{c}}^j(t) \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.22. Für die Christoffel-Symbole gilt die Formel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right).$$

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle \\
 &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^m} \right\rangle \\
 (\text{da } \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}, N \right\rangle &= 0) &= \left\langle \sum_{i=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k}, \frac{\partial F}{\partial u^m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^j}, \sum_{k=1}^2 \Gamma_{im}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right\rangle \\
 &= \sum_{k=1}^2 \left(\Gamma_{ij}^k g_{km} + \Gamma_{im}^k g_{kj} \right).
 \end{aligned}$$

Analog haben wir

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^2 \left(\Gamma_{ji}^k g_{km} + \Gamma_{jm}^k g_{ki} \right)$$

und

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = \sum_{k=1}^2 \left(\Gamma_{mi}^k g_{kj} + \Gamma_{mj}^k g_{ki} \right).$$

Es folgt

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = 2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{km}.$$

Hier haben wir benötigt, dass $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Durch Multiplikation mit (g^{km}) erhalten wir

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g_{mk}.$$

□

Bemerkung. Die kovariante Ableitung ist eine Größe der inneren Geometrie.

Definition 3.23. Sei S eine reguläre Fläche, v ein Vektorfeld auf S , $w_p \in T_p S$ ein Tangentialvektor. Dann ist die kovariante Ableitung $\nabla_{w_p} v \in T_p S$ von v in Richtung w_p wie folgt definiert: Wähle eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = w_p$ und setze

$$\nabla_{w_p} v := \frac{\nabla}{dt} (v \circ c)(0).$$

Lemma 3.24. Diese Definition hängt nicht davon ab, welche Kurve c mit $c(0) = p$ und $c'(0) = w_p$ man nimmt.

(Übung)

(*Hinweis.* Sie zeigen, dass die kovariante Ableitung in Richtung $w_p = \sum_{k=1}^2 \eta^k \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$

$$(9) \quad \nabla_{w_p} \left(\sum_k \xi^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right) = \sum_k \left(\sum_l \frac{\partial \xi^k}{\partial u^l}(u) \eta^l + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \xi^i(u) \eta^j \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}$$

gilt für $v = \sum_{k=1}^2 \xi^k(u) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$.

Lemma 3.25. Sei S eine reguläre Fläche, seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, v, v_1, v_2, w_1, w_2 und w Vektorfelder auf S , und sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gilt

a) *Linearität im zu differenzierenden Vektorfeld:*

$$\nabla_w(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 \nabla_w v_1 + c_2 \nabla_w v_2.$$

b) *Produktregel I:*

$$\nabla_w(fv) = df(w)v + f \nabla_w v.$$

c) *Produktregel II:*

$$dI(v_1, v_2)(w) = I(\nabla_w v_1, v_2) + I(v_1, \nabla_w v_2).$$

d) *Linearität in dem Vektorfeld, nach dem differenziert wird:*

$$\nabla(c_1 w_1 + c_2 w_2)v = c_1 \nabla_{w_1} v + c_2 \nabla_{w_2} v.$$

e) *Funktionen-Linearität in dem Vektorfeld, nach dem differenziert wird:*

$$\nabla_{fw} v = f \nabla_w v.$$

3.3. Krümmungstensor und Theorema Egregium.

Definition 3.26 (die zweite kovariante Ableitung). Die zweite kovariante Ableitung von Z nach v und w ist durch

$$\nabla_{v,w}^2 z := \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z$$

definiert.

Lemma 3.27. Sei S eine reguläre Fläche und v, w und z Vektorfelder auf S . Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Dann ist $\nabla_{v,w}^2 z$ in der Basis $\frac{\partial F}{\partial u^m}$ gegeben durch die Koeffizienten

$$\left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 z^m}{\partial u^i \partial u^j} v^i w^j + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^m \frac{\partial z^i}{\partial u^k} (v^j w^k + w^j v^k) - \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial z^m}{\partial u^k} v^i w^j + \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial u^i} + \sum_l (\Gamma_{li}^m \Gamma_{kj}^l - \Gamma_{kl}^m \Gamma_{ij}^l) \right) v^i w^j z^k \right)_{m=1,2}$$

Korollar 3.28. Der Wert der zweiten kovarianten Ableitung $\nabla_{v,w}^2 z$ hängt im Punkte $p \in S$ nur von $v(p)$, $w(p)$ und den Ableitung von z in p bis zur Ordnung 2 ab.

Damit können wir für ein Vektorfeld z auf S das zweite kovariante Differential von z definieren als

$$\begin{aligned} \nabla^2 z : T_p S \times T_p S &\rightarrow T_p S \\ (v_p, w_p) &\mapsto (\nabla_{v,w}^2 z)(p), \end{aligned}$$

wobei v und w beliebige Vektorfelder auf S mit $v(p) = v_p$ und $w(p) = w_p$ sind.

Beweis vom Lemma 3.27. Setze $\phi^k = \sum_l \frac{\partial z^k}{\partial u^l} w^l + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k z^i w^j$ ($k = 1, 2$). Aus (9) gilt

$$\nabla_w z = \sum_k \phi^k \frac{\partial F}{\partial u^k}$$

in der lokalen Parametrisierung. Für $\nabla_v(\nabla_w z)$ ergibt sich (für $\alpha = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
& \sum_m \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial u^m} v^m + \sum_{\beta, \gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \phi^\beta v^\gamma \\
(10) \quad &= \sum_{m,l} \left(\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial u^l \partial u^m} w^l v^m + \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^l} \frac{\partial w^l}{\partial u^m} v^m \right) \\
&+ \sum_{i,j,m} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial u^m} z^i w^j v^m + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial z^i}{\partial u^m} w^j v^m + \Gamma_{ij}^\alpha z^i \frac{\partial w^j}{\partial u^m} v^m \right) \\
&+ \sum_{j,\beta,\gamma} \frac{\partial z^\beta}{\partial u^l} w^l \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma + \sum_{i,j,\beta,\gamma} \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^i w^j v^\gamma.
\end{aligned}$$

Für $\nabla_v w$ setzen wir $\psi^k = \sum_l \frac{\partial w^k}{\partial u^l} v^l + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k w^i v^j$ ($k = 1, 2$) und erhalten für $\nabla_{\nabla_v w} z$ ($\alpha = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
& \sum_m \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} v^l \psi^m + \sum_{i,j} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^\beta \psi^\gamma \\
(11) \quad &= \sum_{l,m} \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \frac{\partial w^m}{\partial u^l} v^l + \sum_{i,j,m} \frac{\partial z^\alpha}{\partial u^m} \Gamma_{ij}^m v^i w^j \\
&+ \sum_{l,\beta,\gamma} \frac{\partial w^\gamma}{\partial u^l} v^l \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha z^\beta + \sum_{i,j,\beta,\gamma} \Gamma_{ij}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^i w^j z^\beta.
\end{aligned}$$

Bei Subtraktion von (10) und (11) heben sich die Terme weg, welche die Ableitungen von v und w enthalten. ■

Definition 3.29 (riemannsche Krümmungstensor). Sei S eine reguläre Fläche, $p \in S$ ein Punkt, $v_p, w_p \in T_p S$ Tangentialvektoren, und z ein Vektorfeld auf S . Dann ist der *riemannsche Krümmungstensor* definiert durch

$$R(v_p, w_p)z := \nabla_{v_p, w_p}^2 z - \nabla_{w_p, v_p}^2 z.$$

Lemma 3.30. *Der riemannsche Krümmungstensor hat bezüglich der lokalen Parametrisierung die Form wenn*

$$R(v_p, w_p)z = \sum_{i,j,k,l=1}^2 R_{ijk}^l(u_0) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u_0),$$

wobei

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m)$$

Korollar 3.31. *a) Der Tangentialvektor $R(v_p, w_p)z$ hängt an der Stelle $p \in S$ nur von $z(p)$ ab, nicht aber von den Werten des Vektorfeld z auf $S - \{p\}$. Daher ist die Abbildung*

$$R_p : T_p S \times T_p S \rightarrow T_p S$$

$$R_p(v_p, w_p)z_p := R(v_p, w_p)z,$$

wohldefiniert, wobei z ein beliebiges Vektorfeld auf S mit $z(p) = z_p$ ist.

b) R ist linear in jedem Argument, insbesondere

$$R(v_p, w_p)(fz_p) = f \cdot R(v_p, w_p)z_p.$$

c) R_p ist schiefsymmetrisch in der ersten beiden Argumenten

$$R_p(v_p, w_p)z_p = -R(w_p, v_p)z_p.$$

Satz 3.32 (Gauß-Gleichung). Sei $S \in \mathbb{R}^3$ eine orientiert Fläche, $p \in S$. Dann gilt für $v, w, z \in T_p S$

$$R(v, w)z = II(w, z)W(z) - II(v, z)W(w).$$

Bezüglich einer lokalen Parametrisierung drückt sich dies folgendermaßen aus:

$$R_{ij}^l = h_{jk}w_i^l - h_{ik}w_j^l.$$

Beweis: Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S . Erinnerung: (8)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial u^k} + h_{ij} \cdot (N \circ F).$$

Differenzieren wir die Gleichung nach u^l

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 F}{\partial u^l \partial u^k} \right) \\ &\quad + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^l} \cdot (N \circ F) + h_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial u^l} (N \circ F) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial u^l} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \Gamma_{ij}^k \sum_m \Gamma_{lk}^m \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Normallenanteil} \right) \\ &\quad + \text{Normallenanteil} + h_{ij} \cdot \left(-W \left(\frac{\partial F}{\partial u^l} \right) \right) \\ &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - h_{ij} w_l^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} \\ &\quad + \text{Normallenanteil} \end{aligned}$$

Nach Satz von Schwarz gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^3 F}{\partial u^i \partial u^l \partial u^j} \\ &= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial u^j} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \sum_k \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} \\ &\quad + \text{Normallenanteil} \\ &= \sum_m \left(R_{ij}^m - h_{ij} w_l^m + h_{lj} w_i^m \right) \frac{\partial F}{\partial u^m} + \text{Normallenanteil} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$R_{lij}^m - h_{ij}w_l^m + h_{lj}w_i^m = 0.$$

□

Satz 3.33 (Theorema Egregium). *Die Gauß-Krümmung kann folgendermaßen aus dem riemannschen Krümmungstensor berechnet werden: Sei $p \in S$ ein Punkt. Wähle eine orthonormalbasis v, w von $T_p S$. Dann gilt*

$$K(p) = I(R_p(v, w)w, v).$$

Insbesondere ist die Gauß-Krümmung eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis: Gemäß der Gauß-Gleichung gilt

$$\begin{aligned} I(R(v, w)w, v) &= I(II(w, w) \cdot W(v) - II(v, w) \cdot W(v), v) \\ &= II(w, w)II(v, v) - II(v, w)^2 \\ &= \det(W) = K. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.34. *Sei $S \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$, seien $v, w, x, y \in T_p S$. Der Krümmungstensor hat die folgenden Symmetrien:*

- a) $R(v, w)x = -R(w, v)x$.
- b) $I(R(v, w)x, y) = -I(R(v, w)y, x)$.
- c) $I(R(v, w)x, y) = I(R(x, y)v, w)$.
- d) *Bianchi-Identität;*

$$R(v, w)x + R(x, v)w + R(w, x)v = 0.$$

Beweis: a) ist trivial. c) folgt aus der Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned} I(R(v, w)x, y) &= I(II(w, x) \cdot W(v) - II(v, x) \cdot W(v), y) \\ &= II(w, x)II(v, y) - II(v, x)II(w, y), \end{aligned}$$

denn dieser Ausdruck ändert sich nicht bei Vertauschung der Paare v, w und x, y . b) folgt aus a) und c). d) folgt auch aus Gauß-Gleichung

$$\begin{aligned} R(v, w)x + R(x, v)w + R(w, x)v &= II(w, x)W(v) - II(v, x)W(w) \\ &\quad + II(v, w)W(x) - II(x, w)W(v) \\ &\quad + II(x, v)W(w) - II(w, v)W(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Größen der inneren Geometrie

1. Fundamentalform	I	g_{ij}
Flächenelement	dA	$dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2$
kovariante Ableitung	∇	$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{mk} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$
riemannscher Krümmungstensor	R	$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m)$
Gauß-Krümmung	K	$K = \frac{1}{2} \sum_{ijk} g^{jk} R_{ijk}^i$

Größen, die nicht unter lokalen Isometrien invariant sind

2. Fundamentalform	II	h_{ij}
Weingarten-Abbildung	W	$w_i^j = \sum_k h_{ik} g^{kj}$
Hauptkrümmungen	κ_i	
mittlere Krümmung	H	$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$

3.4. Riemannsche Metriken.

Definition 3.35 (riemannsche Metrik). Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Eine *riemannsche Metrik* g auf S ordnet jedem Punkte $p \in S$ ein euklidische Skalarprodukt g_p auf der Tangentialebene $T_p S$ zu, so dass für jede lokale Parametrisierung (U, F, V) von S die Funktion

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_{ij}(u) := g_{F(u)}\left(\frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u)\right).$$

glatt sind.

Bemerkung. Die erste Fundamentalform ist natürlich ein Beispiel für eine riemannsche Metrik. Es gibt aber auch andere wichtige Beispiele von riemannschen Metriken, die nicht erste Fundamentalform sind. Die riemannsche Metrik also ist eine verallgemeinerte erste Fundamentalform.

Alle Größen der inneren Geometrie, wie Flächenelement, kovariante Ableitung, Gauß-Krümmung und riemannsche Krümmungstensor, sind auch für reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik definiert.

Definition 3.36. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik g . Wir definieren:

a) (Die Christoffel-Symbole)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{mk} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

b) (Die kovariante Ableitung) Für Vektorfelder $v = \sum_i v^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$ und $w = \sum_i w^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$ ist die kovariante Ableitung definiert durch

$$\nabla_w v(F(u)) := \sum_k (d_u v^k \left(\begin{matrix} w^1(u) \\ w^2(u) \end{matrix} \right) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(u) v^i(u) w^j(u)) \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

c) (Der riemannsche Krümmungstensor)

$$R(v, w)z := \nabla_{v,w}^2 z - \nabla_{w,v}^2 z$$

$$=: \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l(u) v^i w^j z^k \frac{\partial F}{\partial u^l}(u),$$

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} + \sum_m (\Gamma_{mi}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ki}^m)$$

d) (Die Gauß-Krümmung)

$$K(p) = g(R(v, w)w, v)$$

für eine Orthonormalbasis v, w von $T_p S$ bzgl g .

Beispiel 3.37. Der Torus mit der Parametrisierung

$$F(t, \varphi) = \begin{pmatrix} (1 - r \cos \varphi) \cos t \\ (1 - r \cos \varphi) \sin t \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{für } r < 1.$$

Für die erste Fundamentalform I erhalten wir

$$\begin{aligned} I\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}, \frac{\partial F}{\partial \phi}\right) &= g_{11}(t, \varphi) = r^2 \\ I\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) &= g_{12}(t, \varphi) = 0 \\ I\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) &= g_{22}(t, \varphi) = (1 - r \cos \varphi)^2. \end{aligned}$$

Also die beiden Vektoren $\frac{\partial F}{\partial t}(t, \varphi)$ und $\frac{\partial F}{\partial \phi}(t, \varphi)$ sind zwar eine Basis der Tangentialebene $T_{F(t, \varphi)}S$, aber sie sind bezüglich der ersten Fundamentalform i.A. nicht orthonormal. Nun definieren wir eine neue riemannsche Metrik, so dass

$$\begin{aligned} g_{F(t, \varphi)}\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) &= g_{F(t, \varphi)}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}, \frac{\partial F}{\partial \phi}\right) = 1 \\ g_{F(t, \varphi)}\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial \phi}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Man muss nachprüfen, ob g wohldefiniert ist. In obiger Parametrisierung hat die riemannsche Metrik die Komponenten

$$(g_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die g_{ij} konstant sind, verschwinden alle Christoffel-Symbole, damit auch der riemannsche Krümmungstensor und die Gauß-Krümmung $K \equiv 0$.

Aber die Gauß-Krümmung für den Torus ist

$$K(t, \varphi) = -\frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{1 - r \cos \varphi}.$$

Also ist g keine erste Fundamentalform. Es ist auch nicht möglich, dass g die erste Fundamentalform auf einer kompakten Fläche, da dann die Gauß-Krümmung irgendwo positiv sein muss.

Definition 3.38 (zurückgezogene riemannsche Metrik). Seien S_1 und S_2 reguläre Flächen, sei $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ ein Diffeomorphismus. Sei g eine riemannsche Metrik auf S_2 . Die *zurückgezogene riemannsche Metrik* $\Phi^*(g)$ aus S_1 ist definiert durch

$$(\Phi^*(g))_p(X, Y) := g_{\Phi(p)}(d_p\Phi(X), d_p\Phi(Y))$$

für alle $p \in S_1$, $X, Y \in T_p S_1$.

Bemerkungen.

- (a) $\Phi^*(g)$ ist eine riemannsche Metrik
- (b) $\Phi^*(g)$ ist eine eindeutige riemannsche Metrik auf S_1 , für die $\Phi : S_1 \rightarrow S_2$ eine Isometrie ist.
- (c) Ist F eine lokale Parametrisierung von S_1 , dann ist $\Phi \circ F$ eine solche von S_2 .

Sei $F_2 = \phi \circ F$

$$\begin{aligned}
 ((\phi^*g)_{F(u)})_{ij} &= (\phi^*g)_{F(u)} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i}, \frac{\partial F}{\partial u^j} \right) \\
 &\stackrel{\text{Def.4.4}}{=} g_{\phi \circ F(u)} \left(d_{p_2} \phi \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} \right), d_{p_2} \phi \left(\frac{\partial F}{\partial u^j} \right) \right) \\
 &\stackrel{\text{KR}}{=} g_{\phi \circ F(u)} \left(\frac{\partial(\phi \circ F)}{\partial u^i}, \frac{\partial(\phi \circ F)}{\partial u^j} \right) \\
 &= g_{ij}
 \end{aligned}$$

(d) $K_{\phi^*(g)} = K_g \circ \phi$.

Beispiel 3.39. Sei $S_1 = \mathbb{S}^2$ die Sphäre. Sei $S_2 = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ ein Ellipsoid. $\phi : S_1 \rightarrow S_2$, $\phi(x, y, z) = (ax, by, cz)$ ist ein Diffeomorphismus. Sei I die erste Fundamentalform von S_2 und $g = \phi^*(I)$ die zurückgezogene riemannsche Metrik. g stimmt nicht mit der ersten Fundamentalform von \mathbb{S}^2 überein, da die Gauß-Krümmung des Ellipsoids nicht konstant ist, und damit auch nicht die zurückgezogene Metrik g .

3.5. Geodätische.

Definition 3.40 (die Länge). Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher metrik g . Sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die *Länge* von c (bzgl. (S, g)) definiert durch

$$L[c] := \int_I \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

Falls g die erste Fundamentalform ist, stimmt dieser Längenbegriff gegeben früher überein.

Definition 3.41 (die Energie). Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher metrik g . Sei $c : I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist die *Energie* von c (bzgl. (S, g)) definiert durch

$$E[c] := \frac{1}{2} \int_I g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) dt.$$

Lemma 3.42. *ei S eine reguläre Fläche mit riemannscher metrik g . Sei $c : [a, b] \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Dann ist*

$$L[c]^2 \leq 2(b-a)E[c]$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, d.h., wenn

$$g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) \equiv \text{const.}$$

Beweis: Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} L[c]^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt \right)^2 \\ &\leq \int_a^b g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) dt \int_a^b 1^2 dt \\ &= 2(b-a)E[c]. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $g_{c(t)}(c'(t), c'(t))$ konstant ist. \square

Lemma 3.43. *Sei S eine reguläre fläche mit riemannscher metrik g . Sei $c : I \times J \rightarrow S$, $(s, t) \rightarrow c(s, t)$, eine glatte Abbildung. Dann gilt*

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial s}.$$

Beweis: Da $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) g^{mk}$, wissen wir $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung. Setze

$$\xi : I \times J \rightarrow U, \quad \xi := F^{-1} \circ c.$$

Es gilt also $c = F \circ \xi$ und nach der Kettenregel daher

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial F}{\partial u^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial \xi^k}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

Es folgt nach Definition

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial s \partial t} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \frac{\partial \xi^j}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

Analog

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s} = \sum_k \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial t \partial s} \frac{\partial F}{\partial u^k} + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \xi^i}{\partial s} \frac{\partial \xi^j}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u^k}.$$

Nach $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, folgt $\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s}$. \square

Satz 3.44 (Variation der Energie). *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Seien $p, q \in S$. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow S$, eine glatte Abbildung, so dass für $c_s : [a, b] \rightarrow S$, $c_s(t) := c(s, t)$, gilt $c_s(a) = p$, $c_s(b) = q$. Sei $V(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$ das so genannte Variationsvektorfeld längs $c_0 = c(0, \cdot)$. Dann gilt*

$$\frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} = - \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} c'_0(t), V(t) \right) dt.$$

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} g_{c_s(t)} (c'_s(t), c'_s(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{ds} \Big|_{s=0} c'_s(t), c'_0(t) \right) + g_{c_0(t)} \left(c'_0(t), \frac{\nabla}{ds} \Big|_{s=0} c'_s(t) \right) dt \\ &= \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial c}{\partial t}(0, t), c'_0(t) \right) dt \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.43}}{=} \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial c}{\partial s}(0, t), c'_0(t) \right) dt \\ &= \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} V(t), c'_0(t) \right) dt \end{aligned}$$

Wegen $V(a) = V(b) = 0$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} &= \int_a^b g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} V(t), c'_0(t) \right) dt \\ &= - \int_a^b g_{c_0(t)} \left(V(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt + g_{c_0(t)} (V(t), c'_0(t)) \Big|_a^b \\ &= - \int_a^b g_{c_0(t)} \left(V(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.45. Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Seien $p, q \in S$. Sei $c : [a, b] \rightarrow S$, eine Verbindungskurve von p nach q mit minimaler Energie, so gilt

$$\frac{\nabla}{dt} c'_0(t) = 0.$$

Definition 3.46 (die Geodätische). Sei S eine reguläre Fläche, I ein Intervall. Eine parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow S$ heißt *Geodätische*, falls

$$\frac{\nabla}{dt} c'_0(t) = 0,$$

für alle $t \in I$ gilt.

Beispiel 3.47. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ die x - y -Ebene mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik. In diesem Fall stimmt die kovariante Ableitung mit der gewöhnlichen Ableitung überein

$$\frac{\nabla}{dt} c'(t) = c''(t).$$

Also sind die Geodätischen von folgender Form

$$c(t) = p + zv.$$

Beweis: (Beweis von Korollar 3.45) Aus Stetigkeitsgründen genügt es, die Behauptung für alle $t \in (a, b)$ zu zeigen. Angenommen, für ein $t_0 \in (a, b)$ wäre $\frac{\nabla}{dt} c'_0(t_0) \neq 0$. Wir wählen eine lokale Parametrisierung (U, F, V) und $\delta > 0$, so dass $c(t_0) \in V$ und

- $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (a, b)$
- $c_0(t) \in V$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Setze

$$u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow U, \quad u(t) := F^{-1}(c_0(t))$$

und

$$X : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X(t) := (D_{u(t)}F)^{-1} \left(\frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right).$$

Aus der Definition folgt also

$$\frac{\nabla}{dt} c'_0(t) = D_{u(t)}F(X(t)).$$

Wir wählen eine glatte Funktion $\varphi : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \geq 0$, $\varphi(t_0) > 0$ und $\text{Supp}(\varphi) \subset\subset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, dass $u(t) + sX(t) \in U$. Nun definieren wir

$$c_s(t) := F(u(t) + s\varphi(t)X(t)) \subset V \subset S$$

für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ und alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ setzen wir $c_s(t) := c(t)$. Das Variationsfeld ist

$$(12) \quad V(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [a, b] - [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ \varphi(t) \frac{\nabla}{dt} c'(t) & \text{für } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Z.z.:(12); für $t \in [a, b] - [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ gilt offensichtlich

$$v(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c_s(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} F(u(t) + s\varphi(t)X(t)) \\ \stackrel{KR}{=} D_{u(t)} F(\varphi(t)X(t)) = \varphi(t) \frac{\nabla}{dt} c'_0(t).$$

Nach dem Satz 3.44 erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E[c_s] \Big|_{s=0} &= - \int_a^b g_{c_0(t)} \left(V(t) \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt \\ &= - \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi_{c_0(t)} \left(\varphi(t) \frac{\nabla}{dt} c'_0(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt \\ &= - \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) g_{c_0(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} c'_0(t), \frac{\nabla}{dt} c'_0(t) \right) dt < 0. \end{aligned}$$

Wegen der Energieminimalität der Kurve c_0 muss

$$\frac{d}{dt} E[c_s] \Big|_{s=0} = 0$$

gelten, dies ist ein Widerspruch. \square

Beispiel 3.48. Sei $S = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre, Wir haben bereits gesehen, dass von den Breitenkreisen

$$c(t) = (\cos t \cos \theta, \sin t \cos \theta, \sin \theta),$$

θ fest, lediglich der Äquator $\theta = 0$ die Geodätengleichung erfüllt.

Lemma 3.49. *Geodätische sind proportional zur Bogenlänge parametrisiert.*

Beweis: Sei c eine Geodätische. Wir differenzieren und verwenden die Produktregel II

$$\frac{d}{dt} g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = g_{c(t)} \left(\frac{\nabla}{dt} c'(t), c'(t) \right) + \left(c'(t), \frac{\nabla}{dt} c'(t) \right) = 0.$$

Also ist $g_{c(t)}(c'(t), c'(t))$ konstant. \square

Lemma 3.50. *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Seien $p, q \in S$. Ist $c_0 : [a, b] \rightarrow S$ eine Verbindungskurve von p nach q . c_0 ist minimale Energie genau dann, wenn sie minimale Länge hat und proportional zur Bogenlänge.*

Beweis: " \Rightarrow ": Sei c_0 minimale Energie. Angenommen, es gäbe eine Verbindungskurve von p nach q , so dass $L[c] < L[c_0]$. Da sich die Länge einer parametrisierten Kurve bei einer Umparametrisierung nicht ändert, können wir annehmen, dass c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Somit

$$L[c] = 2(b-a)E(c) \geq 2(b-a)E(c_0) \geq L[c_0],$$

ein Widerspruch. Es folgt also $L[c] \geq L[c_0]$ für alle Verbindungskurven. Wähle nun eine Umparametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ so, dass $\tilde{c}_0 = c_0 \circ \varphi$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Wir erhalten

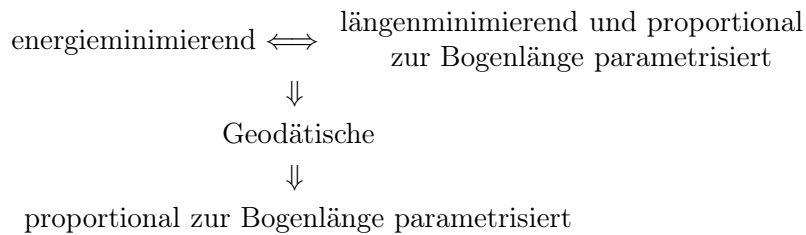
$$L[c_0] = L[\tilde{c}] = 2(b-a)E(\tilde{c}) \stackrel{\text{Vor.}}{\geq} 2(b-a)E(c_0).$$

Damit ist c_0 auch proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

" \Leftarrow ": Für jede Verbindungskurve c gilt

$$E(c) \geq \frac{1}{2(b-a)}L[c] \stackrel{\text{Vor.}}{\geq} \frac{1}{2(b-a)}L[c_0] = E(c_0).$$

□



Es existiert eine Geodätische, die nicht energiminimierend ist.

Die Geodätengleichung in der lokalen Parametrisierung:

Für eine lokale Parametrisierung (U, F, V) von S und eine Kurve c schreiben wir, wo definiert, $u := f^{-1} \circ c$, d.h., $c = F \circ u$. Die Geodätengleichung lautet dann

$$(13) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(u(t)) \frac{\partial}{\partial t} u^i(t) \frac{\partial}{\partial t} u^j(t) = 0, \quad \text{für } k = 1, 2.$$

Diese ist ein System (nichtlinearer) gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Satz 3.51 (Existenz von Geodätischen). *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher metrik g . Seien $p \in S$, $v \in T_p S$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine Geodätische $c : I \rightarrow S$ mit den "Anfangsbedingung"*

$$c(t_0) = p \text{ und } c'(t_0) = v.$$

Beweis: Wir wählen eine lokale Parametrisierung (U, F, V) so, dass $p \in V$. Setze $u_0 := F^{-1}(p) \in U$ und $X := (D_u \circ F^{-1})(v) \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen hat die Geodätengleichung

(13) mit den Anfangsbedingungen $u(t_0) = u_0$ und $u'(t_0) = X$ eine Lösung $u(t)$. Mit $c := F \circ u$ haben wir dann eine Geodätische mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. □

Satz 3.52 (Eindeutigkeit von Geodätischen). *Sei S eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$. Sei $c : I \rightarrow S$ eine Geodätische. Dann ist c durch $c(t_0) \in S$ und $c'(t_0) \in T_{c(t_0)}S$ eindeutig festgelegt.*

Beweis: Wenn wir wüssten, dass die Spur von c ganz in einem Parameterbereich enthalten ist, könnten wir ähnlich wie im Beweis von Satz 3.51 argumentieren und bekommen die Eindeutigkeit der Geodätischen. Dies können wir jedoch nicht voraussetzen. Also benutzen wir ein Widerspruchssargument. Seien c_1 und c_2 Geodätische mit denselben Anfangsbedingungen $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ und $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$. Angenommen es existiert ein $t \in I$, $t > t_0$ mit $c_1(t) \neq c_2(t)$. Setze

$$t_1 = \sup \left\{ t \in I \mid t > t_0, \text{ so dass } c_1(\bar{\tau}) = c_2(\bar{\tau}) \text{ für alle } \tau \in [t_0, t] \right\}.$$

Nun wählen wir eine lokale Parametrisierung (U, F, V) mit $c_1(t_0) \in V$. Wegen $c_1(t) = c_2(t)$ für alle $t > t_0$ gilt $c(t_1) = c_2(t_1)$ und $c_1'(t_1) = c_2'(t_1)$. Der Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen sagt uns nun, dass $c_1(t) = c_2(t)$ solange $c_1(t) \in V$ und $c_2(t) \in V$, damit $c_1(t) = c_2(t)$ für $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ hinreichend $\varepsilon > 0$, ein Widerspruch. □

Satz 3.53 (Clairaut). *Sei S eine Drehfläche, gegeben durch die Parametrisierung $F(t, \varphi) = (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, t)$. Wir nehmen die erste Fundamentalform als riemannsche Metrik. Sei $c : I \rightarrow S$ eine Geodätische, $c(t) = F(r(t), \varphi(t))$. Sei $\theta(t)$ der Winkel zwischen $c'(t)$ und dem Breitenkreis durch $c(t)$. Dann ist*

$$r(t) \cos(\theta(t)) = \text{const.}$$

Beweis: Die erste Fundamentalform wurde im Abschnitt über Drehflächen bereits berechnet. Sie ist

$$(g_{ij}(t, \varphi))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + r(t)^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Setze

$$v := \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{und} \quad w := \frac{\partial F}{\partial \varphi}.$$

Das Vektorfeld w ist stets tangential an die Breitenkreise und v an die Meridiane. Wir berechnen

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, w \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (g_{22}) = 0.$$

Da $\langle v, w \rangle = 0$ gilt, ist der Tangentialteil von $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$ proportional zu v ,

$$\nabla_w w = \alpha v$$

für geeignete Funktion α . Ähnlich haben wir

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial t}, v \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (g_{11}) = 0$$

und damit

$$\nabla_w v = \beta w$$

für eine geeignete Funktion β . Ferner haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle \stackrel{\text{Produktregel II}}{=} \langle \nabla_w v, w \rangle + \langle v, \nabla_w w \rangle \\ &= \langle \beta w, w \rangle + \langle v, \alpha v \rangle \\ &= \beta |w|^2 + \alpha |v|^2. \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Tangentialvektor $z = \gamma v + \delta w$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \nabla_z w, z \rangle &= \gamma^2 \underbrace{\langle \nabla_v w, v \rangle}_{=0} + \gamma \delta \left\langle \underbrace{\nabla_w w, v}_{\alpha v} \right\rangle \\ &\quad + \gamma \delta \left\langle \underbrace{\nabla_v w, w}_{\beta w} \right\rangle + \delta^2 \underbrace{\langle \nabla_w w, w \rangle}_{=0} \\ &= \gamma \delta (\alpha |v|^2 + \beta |w|^2) = 0. \end{aligned}$$

Für eine Geodätische c gilt also

$$\frac{d}{dt} \langle w(c(t)), c'(t) \rangle = \underbrace{\langle \nabla_{c'(t)} w, c'(t) \rangle}_{=0} + \left\langle w(c(t)), \underbrace{\nabla_{c'(t)} c'(t)}_{=0} \right\rangle = 0.$$

Somit ist $\langle w(c(t)), c'(t) \rangle = \text{const.} \cos(\theta(t)) r(t) = \text{const.}$ □

Lemma und Definition 3.54. Sei S eine orientierte reguläre Fläche mit riemannscher Metrik g . Sei $c : I \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld längs c , das c' zu positiv orientierten Orthonormalbasen ergänzt, d.h. für jedes $t \in I$ ist $(c'(t), n(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_{c(t)}S$. Dann gilt

$$\left\langle \frac{\nabla}{dt} c'(t), c'(t) \right\rangle = 0,$$

d.h., $\frac{\nabla}{dt} c'(t)$ ist proportional zu $n(t)$. Wir nennen die Funktion

$$\kappa_g := \left\langle \frac{\nabla}{dt} c'(t), n(t) \right\rangle$$

geodätische Krümmung von c in S bzgl. g . Aus der Definition ist klar, dass c genau dann eine Geodätische ist, wenn $\kappa_g \equiv 0$. Die geodätische Krümmung

ist eine verallgemeinerte Krümmung ebener Kurven. Falls S die $x-y$ -Ebene mit der ersten Fundamentalform als riemannsche Metrik ist, ist κ_g gerade die Krümmung von c .