3.9. **Der Divergenzsatz.**

**Definition 3.75.** Unter einer *Fläche-mit-Rand* verstehen wir eine abgeschlossene Teilmenge $S$ einer regulären Fläche $S_{\text{reg}} \subset \mathbb{R}^3$, so dass es zu jedem Punkt $p \in S$ eine lokale Parametrisierung $F : U \to S_{\text{reg}}$ von $S_{\text{reg}}$ gibt mit $p \in F(U)$, so dass entweder

- $F(U) \subset S$(dann heißt $p$ *innerer Punkt* von $S$) oder
- $F^{-1}(S) = \{(x, y) \in U \,|\, y \geq 0\}$ und $F^{-1}(p) = (x, 0)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ (dann heißt $p$ *Randpunkt* von $S$).

Die Menge der inneren Punkte bildet das *Innere* von $S$, die Menge der Randpunkte den *Rand* $\partial S$.

**Beispiel 3.76.** Die abgeschlossene Kreisscheibe

$$S = \left\{(x, y, 0) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ist eine Fläche-mit-Rand. Als reguläre Fläche können wir die $x - y-$Ebene $S_{\text{reg}} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ nehmen. Die Punkte $(x, y, 0)$ mit $x^2+y^2 < 1$ sind die inneren Punkte, denn wir erhalten durch $U := \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 < r^2\right\}$ und $F(\xi, \eta) = (\xi, \eta, 0)$ eine lokale Parametrisierung von $S_{\text{reg}}$, deren Bild ganz in $S$ enthalten ist. Hierbei ist $r := \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} > 0$.
Die Punkte $(x, y, 0)$ mit $x^2 + y^2 = 1$ dagegen sind Randpunkte, z.B. für den $(0, -1, 0)$ wählen wir

$$F : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^3, \qquad F(\xi, \eta) = \left(\xi, \eta - \sqrt{1 - \xi^2}, 0\right)$$

eine lokale Parametrisierung von $S_{\text{reg}}$ mit $F(0, 0) = (0, -1, 0)$ und $F^{-1}(S) = \left\{(\xi, \eta) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^3 \,|\, \eta \geq 0\right\}$.

*Bemerkung.*
a) Reguläre Flächen $S$ sind auch Flächen-mit-Rand, nämlich gerade solche, für die der Rand leer ist, $\partial S = \emptyset$.
b) Die Punkte aus $F\left(\{(x, y) \in U \,|\, y = 0\}\right)$ sind Randpunkte.
c) Sei $p \in \partial S$, so ist $c(t) := F(t, 0)$ eine reguläre Kurve mit $F(t, 0) \in \partial S$. Für $c(t_0) = p$ ist $c'(t_0) \in T_pS_{\text{reg}}$. Somit gibt es genau zwei Einheitsvektoren $\pm\nu(p) \in T_pS_{\text{reg}}$, diese nennen wir Einheitsnormalenvektoren an den Rand von $S$. Es gilt $(d_uF)^{-1}\left(c'(t_0)\right) = (1, 0)$ für $u = F^{-1}(p)$. Da $S_{\text{reg}}$ eine reguläre Fläche ist, gilt $\left\langle (d_uF)^{-1}\left(\pm\nu(p)\right), (0, 1)\right\rangle \neq 0$. Wählen wir $\nu(p)$ so, dass $\left\langle (d_uF)^{-1}\left(\pm\nu(p)\right), (0, 1)\right\rangle < 0$, so heißt $\nu(p)$ *äußerer Einheitsnormalenvektor* an den Rand im Punkt $p$, $-\nu(p)$ dagegen heißt *innerer Einheitsnormalenvektor*.

**Definition 3.77.** Sei $S$ eine Fläche-mit-Rand. Sei $f : \partial S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Wir schreiben $\partial S \cap supp f$ als disjunkte

Vereinigung, wobei jedes $c_j$ ein Stück des Randes ist, das sich durch eine reguläre Kurve parametrisieren lässt. Wir wählen Parametrisierungen nach der Bogenlänge $c_j : I_j \to \mathbb{R}^3$ mit $c_j(I_j) \subset c_j$ und definieren das *Randintegral*

$$\int_{\partial S} f\, ds := \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j} f \circ c_j(t)\, dt.$$

Zur Erinnerung: $f : S \to \mathbb{R}, \quad df : T_pS \to \mathbb{R}$. Das Gradientenfeld $\operatorname{grad} f$ ist definiert durch

$$d_pf(x) = I(\operatorname{grad} f, x), \quad x \in T_pS,$$

wobei $I$ die erste Fundamentalform von S ist. Nun betrachten wir $S$ mit riemannscher Metrik $g$ und definieren das Gradientenvektorfeld $\operatorname{grad} f$ durch

$$df(x) = g(\operatorname{grad} f, x), \quad \forall x \in T_pS.$$

$\operatorname{grad} f$ ist ein Vektorfeld auf $S$.
Sei $X$ ein differenzierbares Vektorfeld auf $S$. Für $p \in S$ können wir das kovariante Differential von $X$ als Endomorphismus von $T_pS$ auffassen

$$\nabla.X : T_pS \to T_pS, \qquad Y_p \mapsto \nabla_{Y_p} X.$$

**Definition 3.78.** Die Spur des Endomorphismus $\nabla.X$ nennen wir *Divergenz* von $X$ im Punkt $p$,

$$\operatorname{div} X(p) := \operatorname{Spur}\left(Y_p \mapsto \nabla_{Y_p} X\right).$$

**Lemma 3.79.** *Schreiben wir das Vektorfeld X bezüglich einer lokalen Parametrisierung F als*

$$\sum_i \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i},$$

*so gilt für die Divergenz*

$$\operatorname{div} X = \sum_j \left( \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma^j_{ij} \xi^i \right) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \sqrt{\det(g_{kl})}\xi^j \right).$$

*Beweis:* Wir berechnen die Matrixdarstellung des Endomorphismus $Y_p \mapsto \nabla_{Y_p} X$ in der Basis $\frac{\partial f}{\partial u^1}, \frac{\partial F}{\partial u^2}$.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial F}{\partial u^j}} X &= \nabla_{\frac{\partial F}{\partial u^j}} \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i} \right) \\
&= \sum_i \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial F}{\partial u^i} + \xi^i \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial F}{\partial u^k} \right) \\
&= \sum_k \left( \frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \sum_i \xi^i \Gamma^k_{ij} \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}.
\end{aligned}$$

Der Endomorphismus $Y_p \to \nabla_{Y_p} X$ ist also in der Matrixdarstellung

$$\left(\frac{\partial \xi^k}{\partial u^j} + \sum_i \xi^i \Gamma_{ij}^k\right)_{jk}.$$

Spurbildung liefert

$$\operatorname{div} X = \sum_j \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_i \Gamma_{ij}^j \xi^i\right).$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\xi^j\right) &= \sum_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\ln\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\right)\right)\xi^j \\
&= \sum_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u^j} + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\ln\det(g_{kl})\right)\xi^j
\end{aligned}$$

folgt der zweite Teil aus dem ersten, falls wir zeigen können, dass

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\ln\left(\det(g_{kl})\right)\right) = \sum_i \Gamma_{ji}^i.$$

Aus der Definition

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right) g^{km}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\sum_i \Gamma_{ji}^i &= \frac{1}{2}\sum_{ik} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right) g^{im} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{jm} \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} g^{im} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{spur}\left(g^{-1}\frac{\partial g}{\partial u^j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u^j}\ln\det(g).
\end{aligned}$$

□

**Satz 3.80.** *(Gaußscher Divergenzsatz) Sei $S_{reg}$ eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik $g$. Sei $X$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $S_{reg}$ mit kompaktem Träger. Sei $S \subset S_{reg}$ eine Fläche-mit-Rand. Sei $\nu$ das äußere Einheitsnormalenfeld von $S$. Dann gilt*

$$\int_S \operatorname{div} X \, dA = \int_{\partial S} g(X, \nu)\, ds.$$

*Beweis:* Da $\operatorname{supp} X \cap S$ kompakt ist, kann $\operatorname{supp} X \cap S$ durch endlich viele solcher Parameterbereiche überdeckt werden. Wir benutzen den Satz der Einheitsteilung und erhalten glatte Funktionen $\rho_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $0 \leq \rho_i \leq 1$ und $\sum_i \rho_i \equiv 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} X \cap S$, so dass jeder Träger $\operatorname{supp} \rho_j$ in einem solchen Parameterbereich enthalten ist. Wir setzen $X_j := \rho_j X$. Es gilt $X = \sum_j X_j$ auf $S$, und jedes $X_j$ hat seinen Träger in einem Parameterbereich. Wegen der Linearität des Integrals und der Divergenz genügt es, die Behauptung für die $X_j$ zu zeigen.
Nehmen wir also o.B.d.A. an, dass $\operatorname{supp} X \cap S$ in einem derartigen Parameterbereich enthalten ist. Betrachten wir zunächst den Fall, dass der Parameterbereich den Rand von $S$ trifft. Die lokale Parametrisierung $F : U \to \mathbb{R}^3$ hat also die Eigenschaft $F^{-1}(S) = \left\{ (u^1, u^2) \in U \,|\, u^2 \geq 0 \right\}$ und $\operatorname{supp} X \cap S \subset F(U)$. O.B.d.A. nehmen wir ferner an, dass

$$F : U = (-a, a) \times (-a, a) \to S$$

ein an $c$ angepasstes Fermi-Koordinatensystem ist, wobei $c$ eine Bogenlängenparametrisierung von $\partial S \cap F(U)$ sei. Hierbei ist das Fermi-Koordinatensystem definiert durch

$$F(t, s) := \exp_{c(t)}(sn(t)) \qquad n(t) = -\nu(c(t)).$$

Es ist leicht zu zeigen, dass längs des Randes von $S$ gilt

$$\left( g_{ij}\left(u^1, 0\right) \right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt dann $\sqrt{\det(g_{kl}\left(u^1, 0\right))} = 1$. Nach Lemma 3.79 rechnen wir für $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{div} X \, dA &= \int_0^a \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \sqrt{\det(g_{kl})} \xi^j \right) \sqrt{\det(g_{kl})} \, du^1 du^2 \\
&= \sum_{j=1}^2 \int_0^a \int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \sqrt{\det(g_{kl})} \xi^j \right) \, du^1 du^2.
\end{aligned}$$

Den Summanden mit $j = 1$ integrieren wir zuerst über $u^1$ und erhalten

$$\int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \sqrt{\det(g_{kl})} \xi^1 \right) \, du^1 = \left( \sqrt{\det(g_{kl})} \xi^1 \right) \Big|_{-a}^a = 0,$$

da $\xi^1(-a, u^2) = \xi^1(a, u^2) = 0$ wegen der Voraussetzung an den Träger. Für $j = 2$ integrieren wir ihn über $u^2$ und erhalten

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \sqrt{\det(g_{kl})} \xi^2 \right) \, du^2 = \left( \sqrt{\det(g_{kl})} \xi^2 \right) \Big|_0^a = -\xi^2(u^1, 0).$$

Also haben wir

$$\int_S \operatorname{div} X \, dA = -\int_{-a}^a \xi^2(u^1, 0) \, du^1.$$

Für das Randintegral gilt

$$\int_{\partial S} g(X,\nu)\,dS = \int_{-a}^{a} -\xi^2(u^1,0).$$

Wenn der Parameterbereich den Rand nicht trifft, zeigen die obigen Überlegungen

$$\int_S \operatorname{div} X\,dA = 0.$$

□

**Definition 3.81.** Sei $S$ eine reguläre Fläche mit riemannscher Metrik $g$. Wir definieren einen Operator

$$\Delta f := \operatorname{div}\operatorname{grad} f$$

für eine $C^2$-Funktion $f$. Der Operator $\Delta$ heißt Laplace-Operator. Eine Funktion, die

$$\Delta f = 0$$

erfüllt, heißt harmonisch. In einem lokalen Parameterbereich nach Lemma 3.79 erhalten wir

$$\Delta f(F) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{kl})}} \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\left(\sqrt{\det(g_{kl})}\right) g^{ij} \frac{\partial (f\circ F)}{\partial u^i}(F^{-1})\right),$$

da $\operatorname{grad} f$ gegeben ist durch

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial (f\circ F)}{\partial u^i}(F^{-1}) \frac{\partial F}{\partial u^j}(P).$$

**Korollar 3.82.** *Sei $S$ eine kompakte reguläre Fläche mit riemannscher Metrik $g$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $X$ und jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f$ auf $S$*

$$\int_S \operatorname{div} X\,dA = \;0\; = \int_S \Delta f\,dA.$$

**Beispiel 3.83.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine *Minimalfläche* mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik. Sei $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion, z.B. der drei kartesischen Koordinatenfunktionen. Dann ist

$$f := l|_S : S \to \mathbb{R}$$

harmonisch. Wir schreiben $l$ als

$$l(X) = \langle X, Z\rangle\,, \qquad \forall X$$

für einen Vektor $Z \in \mathbb{R}^3$. Der Gradient von $f$ an der Stelle $p$ ist gegeben durch Projektion von $Z$ auf $T_pS$

$$\operatorname{grad}\, f(p) = Z - \langle Z, N(p)\rangle\, N(p),$$

wobei $N$ eines der beiden Einheitsnormalenfelder an $S$ ist. Diese Formel für den Gradienten kÃ¶nnen wir so zeigen:

$$\langle \text{grad } f(p), X \rangle = \partial_X f = \langle X, Z \rangle, \qquad \forall X \in T_pS.$$

Für die kovariante Ableitung gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_X \text{ grad } f &= d\,\text{grad } f(X) - \langle d\,\text{grad } f(X), N \rangle N \\
&= - \langle Z, dN(X) \rangle N - \langle Z, N \rangle dN(X) \\
&\quad + \langle \langle Z, dN(X) \rangle N, N \rangle N + \langle \langle Z, N(X) \rangle dN(X), N \rangle N \\
&= \langle Z, W(X) \rangle N + \langle Z, N \rangle W(X) - \langle Z, W(X) \rangle N + 0 \\
&= \langle Z, N \rangle W(X).
\end{aligned}$$

$$\Delta f = \text{div grad} f\, f = \textit{spur}\,(Y \mapsto \nabla_Y \text{ grad } f)\, \langle Z, N \rangle H = 0.$$

**Definition 3.84.** Sei $S$ eine reguläre Fläche. Ein *symmetrisches* $(2,0)$-*Tensorfeld* auf $S$ ist eine Zuordnung, die jedem Punkt $p \in S$ eine symmetrische Bilinearform $b_p$ auf $T_pS$ zuordnet, so dass bezüglich lokaler Parametrisierungen $F : U \to S$ die Funktionen

$$b_{ij} : U \to \mathbb{R}, \quad b_{ij}(u) := b_{F(u)} \left( \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right),$$

stets glatt sind.

**Beispiel 3.85.** Riemannsche Metrklen sind gerade diejenigen symmetrischen $(2,0)$-Tensorfelder, die in jedem Punkt $p \in S$ positiv definit sind.

**Definition 3.86.** Sei nun $S$ eine reguläre Fläche mit einer riemannschen Metrik $g$ und einem weiteren symmetrischen $(2,0)$-Tensorfeld $b$. Die *Spur* von $b$ ist die Funktion $\text{Spur}\, b : S \to \mathbb{R}$, die bezüglich einer lokalen Parametrisierung $F$ gegeben ist durch

$$(\text{Spur}\, b) \circ F = \sum_{i,j} g^{ij} b_{ij}.$$

Die *Divergenz* von $b$ ist das Vektorfeld div $b$ auf, das bezüglich einer lokalen Parametrisierung gegeben ist durch

$$(\text{div } b)^l = \sum_{i,j,k} g^{kl} g^{ij} \left( \frac{\partial b_{jk}}{\partial u^i} \sum_\alpha \left( \Gamma^\alpha_{ij} b_{\alpha k} + \Gamma^\alpha_{ik} b_{\alpha j} \right) \right).$$

*Bemerkung.* Ist $p \in S$ fest, so gibt es zu der symmetrischen Bilinearform $b_p$ auf $T_pS$ genau eunen bezüglich $g_p$ selbstadjungierten Endomorphismus $B_p : T_pS \to T_pS$ mit $b_p(X,Y) = g_p(B_p(X), Y)$ für alle $X, Y \in T_pS$. In einer lokalen Parametrisierung $B^i_j = \sum_k g^{ik} b_{kj}$ und es gilt

$$(\text{Spur}\, b)\,(p) = \text{Spur}\,(B_p).$$