Beispiel 8.12 (Tangentialbündel)**.** Das Tangentialbünel $\pi : TM \to M$ is ein Vektorbündel mit Übergangsfunktionen

$$\Phi_{\alpha\beta} = d(x_\beta \circ x_\alpha^{-1}) : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(R, r),$$

wobei (x_α, U_α) $(\alpha \in A)$ die Karten sind.

Die Vektorfelder $X \in \mathcal{V}(M)$ sind die Schnitte von $\pi, TM \to M$. Lokal schreiben wir $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit Transformation unter der Kartenwechseln

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

oder

$$\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Hierbei ist $y^j = (y \circ x^{-1})^j$.

Definition 8.13 (Das zerückgezogene Bündel)**.** Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung unf $\pi : V \to N$ ein Vektorbündel über N. Dann heißt

$$f^*V = \cap_{p\in M} V_{f_p}$$

das zerückgezogene Bündel von f.

Ein spezieler Fall ist:

Definition 8.14. Sei $i : M \to N$ eine Untermanifaltigkeit und sei $\pi : V \to N$ ein Vektorbündel über N. Die Einschränkung von V auf M

$$V_M := \cup_{p\in M} V_p$$

ist ein Vektorbündel über M.

Definition 8.15 (Das Unterbündel und Quotientenbündel)**.** 1) Sei $\pi : V \to M$ ein Vektorbündel und sei für $p \in M$ durch $F_p \subseteq V_p$ ein s-dimensionaler Unterraum von V_p gegeben. So heißt $F = \cup_{p\in p\in M} F_p$ ein Unterbündel vom Rang s, falls es für jedes $p \in M$ Trivialisierung $\Phi : V_{|U} \to U \times \mathbb{R}^r$ um p und $\Phi_{|F_{|U}} : F_{|U} \to U \times R^s$ gibt.

2) Sei $F \subseteq V$ ein Untervektorbündel eines Vektorbündels $V \to M$. Dann ist das Quotientenbündel durch

$$V/F := \cup_{p\in M} V_p/F_p$$

definiert, weches ein Vektorbündel vom Rang $r - s$ ist.

Das Unterbündel ist ein Vektorbündel.

Beispiel 8.16. Sei $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit N. Seien TN, TM das Tangentialbündel von N, bzw von M. Sei $i^*(TN)$ die Einschränkung von TN aud M. TM ist ein Unterbündel von i^*TN. Das Quotientenbündel $i^*(TN)/TM$ heißt das Normalbündel von der Einbettung $M \subset N$. (Mit einer Riemannschen Metrik g auf N können wir einen Normalbündel durch $T^\perp M := \cup_{p\in M} T_p^\perp M$ definiert, wobei $T_p^\perp M = \{v \in T_pN \,|\, g(v, \xi) = 0, \forall \xi \in T_pM \subset T_pN\}$. Dieser Bündel ist isomorph zu dem Quotientenbündel $i^*(TN)/TM$.)

Theorem 8.17 (Duales Bündel)**.** *Sei $\pi : V \to M$ ein Vektorbündel , dann ist das duale Bündel V^* von V durch*

$$V^* := V^{-1} := \cup_{p\in M} V_p^* \to M$$

definiert, wobei V_p^* der duale Raum vom V_p ist, d.h. $V_p^* = \{\alpha : V_p \to \mathbb{R} \,|\, \alpha$ linear $\}$.

Proof. Sei $T : E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräume E und F. Die duale Abbildung $T^* : F^* \to E^*$ ist definiert durch

$$T^*(l) = l \circ T, \quad \forall l \in F^*$$

.

Sei $\Phi_{\alpha_\beta} : u_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{R}, r)$ die Übergangsfunktionen. Definiere die neue Funktionen durch

$$\Phi_{\alpha\beta}^{V^*}(p) = ((\Phi_{\alpha\beta})^*)^{-1},$$

Man kann zeigen, dass $((\Phi_{\alpha\beta})^*)^{-1} = (\Phi_{\alpha\beta}^{-1})^*$ die Kozykelnedingung (8.1) erfüllen. Z.B., für alle linearform $l \in V_p^*$ mit $p \in U_a \cap U_b \cap U_\gamma$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta}^{V^*} \circ \Phi_{\alpha\gamma}^{V^*}(l) &= \Phi_{\alpha\beta}^{V^*}(l \circ \Phi_{\beta\gamma}^{-1}) \\ &= l \circ \Phi_{\beta\gamma}^{-1} \circ \Phi_{\alpha\beta}^{V^*} = l \circ (\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\alpha\gamma})^{-1} = l \circ \Phi_{\alpha\gamma}^{-1} \\ &= \Phi_{\alpha\gamma}^{V^*}(l) \end{aligned}$$

also

$$\Phi_{\alpha\beta}^{V^*} \circ \Phi_{\alpha\gamma}^{V^*} = \Phi_{\alpha\gamma}^{V^*}.$$

□

Definition 8.18 (Das Kotangetialbündel, Eins-Formen)**.** Sei $V = TM$, so nennen wir $V^* = T^*M$ das Kotangetialbündel von M. Schnitte in diesen Bündel heißen (differenzeibare) Eins-Formen auf M. Wir bezeichnen die Menge der Eins-Formen auf M mit $\Omega^1(M) = \Gamma(M, T^*M)$.

Eins-Form $\alpha \in \Omega^1(M)$ ist für jedes $p \in M$ jeweils eine Linearform $\alpha : T_pM \to \mathbb{R}$ auf T_pM, welche sich glatt mit $p \in M$ ändert.

Definition 8.19 (Duales Basis)**.** Sei $x, U)$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit M, so heißt $(dx^i)_{i=1}^n$ die duale Basis zu $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1}^n$, welche eine Basis von $T^*M_{|U}$ ist.

Es gilt per Definition

$$dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_i^j.$$

Sei α eine Eins-Form auf einer Mannigfaltigkeit M und seien (x, U) und (y, U') zwei Karten. α hat lokale Darstellungen in U und U' mit

$$\alpha_i dx^i \quad \text{und} \quad \beta_i dy^i.$$

Es gilt

$$\alpha_i dx^i = \alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial y_j} dy^j = \alpha_j \frac{\partial x^j}{\partial y_i} y^i,$$

also

$$\beta_i = \alpha_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}.$$

Hierbei ist die Matrix $(\frac{\partial x^j}{\partial y^i})$ die inverse Matrix von $(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})$. Zum Vergleichen: Sei v ein Vektorfeld auf M mit lokaler Dastellungen in U und U'

$$\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{und} \quad \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Die Transformation zwischen ξ und η ist

$$\eta^i = \xi^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

Definition 8.20 (Totales Differential)**.** Sei $f \in C^\infty(M)$, dann heißt die Eins-Form

$$df : TM \to \mathbb{R}, \quad (p, \xi) \mapsto d_pf(\xi)$$

(totales) Differential von f.

Definition 8.21 (Direktes Summen &- Tensorproktbündel)**.** Sei $E, F \to M$ zwei Vektorbündel vom Rang r und s über M.

(1) Das (direkte) Summenbündel $E \oplus F$ von E und F ist definiert durch

$$E \oplus F := \cap_{p \in M} E_p \oplus F_p$$

(2) Das Tensorbündel $E \oplus F$ von E und F ist definiert durch

$$E \otimes F := \cap_{p \in M} E_p \otimes F_p$$

Das Summenbündel $E \oplus F$ hat Rang $r + s$ und Das Tensorbündel $E \oplus F$ Rang rs.

Definition 8.22. Sei $\varphi : M \to N$ und $T^*N \to N$ Kotangentialbündel von N. Sei $\alpha \in \Omega^1(M)$ eine Eins-Form auf N. Die zurc̈kgezogene (pullback) 1-Form auf M ist durch

$$\varphi^*(\alpha)(X) := \alpha(\varphi_*(X)), \quad \forall X \in TM$$

definiert.

Beispiel 8.23. Seine $N \to \mathbb{R}$ und df das Differential von F. Für die zurc̈kgezogene (pullback) 1-Form $\varphi^*(df)$ auf M von df gilt

$$\varphi^*(df)(X) = df(\varphi_*(X) = \varphi_*(X)(f) = X(f \circ \varphi) = d(f \circ \varphi)X$$

für alle $X \in TM$. Also

$$\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi).$$

9. Differentialformen

Sei V ein n-dimeinsionale $\mathbb{R}$-vektorraume. Auf dem Raum $\otimes^k V$ der k-linearen Formen $\omega : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ operiert die symmetrische Gruppe S_k von links:

$$(\sigma \cdot \omega)(v_1, \cdots, v_k) = \omega(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}). \tag{9.1}$$

Operation von links bedeutet $\sigma \cdot (\tau \cdot \omega) = (\sigma\tau) \cdot \omega$.

Definition 9.1. $\omega \in \otimes^k V$ heißt *alternierend* (wir schreiben $\omega \in \wedge^k V$), wenn

$$\sigma \cdot \omega = (\operatorname{sign} \sigma)\omega \quad \forall \sigma \in S_k.$$

Insbesondere gilt: $\omega(\cdots, v_i, \cdots, v_j \cdots) = -\omega(\cdots, v_j, \cdots, v_i \cdots)$ und $\omega(v_1, v_2, \cdots, v_k) = 0$ falls zwei der v_i gleich.

Definition 9.2. Der *Alternator* $Alt : \otimes^k V \to \wedge^k V$ ist definiert durch

$$Alt(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (\operatorname{sign} \tau) \tau \cdot \omega.$$

Offenbar gilt $Alt(\omega) = \omega$ für $\omega \in \wedge^k V$, und allgemein

$$\begin{aligned} \sigma \cdot Alt(\omega) &= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (\operatorname{sign} \tau) \delta \cdot (\tau \cdot \omega) \\ &= \operatorname{sign} \sigma \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (\operatorname{sign} \sigma\tau) \delta \cdot (\tau \cdot \omega) \\ &= \operatorname{sign} \sigma Alt(\omega) \end{aligned}$$

Definition 9.3. Für $\omega \in \otimes^k V$, $\eta \in \otimes^l V$ ist $\omega \otimes \eta \in \otimes^{k+l} V$ definiert durch

$$(\omega \otimes \eta)(v_1 \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k*l}) = \omega(v_1, v_k)\eta(v_{k+1}, \cdots, v_{k+l})$$

Definition 9.4. Das *äussere Produkt* (Dach Produkt) ist

$$\wedge^K \times \wedge^l V \to \wedge^{k+l} V, \quad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta)$$

In den Fall $k = l = 1$, gilt $\omega \wedge \eta(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1)$.

Lemma 9.5. *Für $\omega, \eta, \xi \in \wedge^\bullet V$, und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt*
(1) $(\lambda\omega + \mu\eta) \wedge \xi = \lambda\omega \wedge \xi + \mu\eta \wedge \xi$
(2) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ *für* $\omega \in \wedge^k V$, $\eta \in \wedge^l V$.
(3) $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$.

Lemma 9.6. *Für $\omega^1, \cdots \omega^k \in \wedge^1 V = V^*$ gilt*
(1) $(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_1, \cdots, v_k) = \det(\omega^i(v_j))$

(2) $\omega^1, \cdots \omega^k$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k \neq 0$.

Theorem 9.7. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Sei $\{e^1, \cdots, e^n\}$ duale Basis von $\{e_1, \cdots, e_n\}$*

$$\{e^\alpha = e^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \mid \alpha \in I(k,n)\}$$

mit

$$I(k,n) = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \,|\, 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq n\}$$

eine Basis von $\wedge^k V$. Jedes $\omega \in \wedge^k V$ hat eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha e^\alpha \qquad \textit{mit } \omega_\alpha = \omega(e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_k}).$$

Proof. Übung. □

Lemma 9.8. *Seien V, W Verktorräume und $f \in L(V,W)$. Für $v_j \in V, w_j \in W$ und $j = 1, \cdots, k$ gelte*

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{k} a^i_j w_i \qquad \textit{mit } A = (a^i_j) \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Zeigen Sie, dass für $\eta \in \Lambda^k W$ gilt

$$\eta(f(v_1), \cdots, f(v_k)) = \det(A)(w_1, \cdots, w_k).$$

Definition 9.9. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit . Dann heißt

$$\wedge^k(TM) = \cup_{p \in M} \wedge^k (T_pM)$$

den *Bündel der alternierenden k-Formen* auf M. Ein Schnitt in diesen Bündel heißt auch $k-Form$. Die Menge aller k-Formen bezeichnen wir mit $\Omega^k(M)$. Wir nennen ω auch die Form vom Grad $k =: \deg \omega$.

Definition 9.10. Sei $\dim M = n$ und $x : U \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte. Dann besitzt die k-Form ω aud U eine eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx^\alpha = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_k},$$

wobei $dx^1, \cdots, dx^n$ duale Basis von $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ ist.

Definition 9.11. Sei η eine k-Form auf N. Fdirur $f \in C^1(M,N)$ ist der pullback $f^*\eta$ (die zurückgezogene k-Form) die k-Form auf M mit

$$(f^*\eta)(p)(v_1, \cdots, v_k) = \eta(f(p))(f_+v_1, f_+v_k), \qquad \text{für } v_1, \cdots v_k \in T_pM$$

Kürzer für Vektorfelder $X_1, \cdots, X_k$ auf M $(f^*\eta)(X_1, \cdots, X_k) = \eta(f_*X_1, \cdots, f_+X_k)$.

Lemma 9.12. *Es gelten folgende Regeln:*
(1) $f^*(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda f^*\omega + \eta f^*\eta$, für $\lambda, \mu \in C^0(M)$
(2) $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$
(3) $(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$ für $f : M \to N$ und $g : N \to L$.

Proof. (3) folgt aus der Kettenregel. □

Folgerung 9.13. *Betrachte folgende Sutiation:*

$$\begin{tikzcd}
M \supset U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & U' \subset N \arrow[d, "y"] \\
x(U) \arrow[r, dotted] & y(U')
\end{tikzcd}$$

Für $\eta = \sum_{\beta\in I(k,n)} \eta_\beta dy^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge dy^{\beta_k}$ *gilt*

$$\begin{aligned} f^*\eta &= \sum_{\beta\in I(k,n)} \eta_\beta\circ f df^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge df^{\beta_k} \\ &= \sum_{\alpha,\beta\in I(k,n)} \eta_\beta\circ f\det(\frac{\partial f^{\beta_i}}{\partial x^{\alpha_j}})dx^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Proof. Die erste Gleichung folgt aus Lemma 9.12 (2), die zweite aus Lemma 9.8. □

Bemerkung 9.14. Zur Koordinatentransformation von k-Formen:

$$\begin{tikzcd} & U\cap U' \arrow[dr, "y"] & \\ x(U\cap U') \arrow[ur, "x^{-1}"] \arrow[rr, "y\circ x^{-1}"] & & y(U\cap U') \end{tikzcd}$$

Auf $U\cap U'$ berechnen wir für eine k-Form auf U, $\omega = \sum_{\alpha\in I(k,n)}\omega_\alpha dx^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha_k}$,

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\beta\in I(k.n)} \eta_\beta dy^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge dy^{\beta_k} \\ &= \sum_{\beta\in I(k.n)}\sum_{\alpha\in I(k.n)} \eta_\beta\det(\frac{\partial y^{\beta_i}}{\partial x^{\alpha_j}})\circ x dx^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha_k}, \end{aligned}$$

also

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta\in I(k,n)}\eta_\beta\det(\frac{\partial y^{\beta_i}}{\partial x^{\alpha_j}})\circ x.$$

Also ist die Übergangsfunctionen des Bündel der k-Fromen die Matrix der $k\times k$ Minoren

$$\left(\det(\frac{\partial y^{\beta_i}}{\partial x^{\alpha_j}})\right)_{\alpha,\beta\in I(k,n)}$$

Definition 9.15 (äußere Ableitung)**.** Sei ω eine k-Form der Klasse C^1 auf M, mit lokale Darstellung $\omega = \sum_{\alpha\in I(k,n)}\omega_\alpha dx^\alpha$. Definiere

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial x^j} &:= \sum_{\alpha\in I(k,n)}\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_j}dx^\alpha \\ d\omega &:= \sum_{j=1}^n dx^j\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass $dw\in\wedge^{k+1}(U)$ und

$$d\omega = \sum_{j=1}^n dx^j\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^n\sum_{\alpha\in I(k,n)}\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_j}dx^j\wedge dx^\alpha = \sum_{\alpha\in I(k,n)} d\omega_\alpha\wedge dx^\alpha$$

gilt.

Theorem 9.16. *Die äußere Ableitung ist unabhängig von der lokalen Darstellung definiert und hat forlgende Eigenschaften:*

(1) $d^2\omega = 0$, *falls* ω *von der Klasse* C^2 *ist.*
(2) $d(\omega\wedge\eta) = (d\omega)\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta$ *für* $\omega\in\Omega^k(M)$.

Proof. Wir zeigen (1) und (2) in der lokalen Darstellung.

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} dx^i \wedge dx^j \wedge \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^j}$ ist symmetrisch und $dx^i \wedge dx^j$ schiefsymmetrisch.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \left(\frac{\partial \omega}{\partial x^j} \wedge \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x^j} \wedge \omega\right) \\ &= (\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^j}) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge \frac{\partial \eta}{\partial x^j}) \\ &= (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta). \end{aligned}$$

Jetzt sei d' eine linear Abbildung von der k-Formen in die $(k+1)$-Formen auf M, mit den Eigenschaften (1) und (2), und $d'f = df$ für Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned} d'\omega &= d' \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_k} \\ &= \sum_{\alpha \in I(k,n)} d\omega_\alpha \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_k}, \end{aligned}$$

denn es gilt $d'(dx^i) = d'(d'x^i) = 0$. Somit ist $d = d'$. Daraus folgt die erste Aussage (Warum?). □