Beispiele 9.17. Wir vergleichen die äußere Ableitung mit klassscher Opratoren.
(1) Wir bezeichnen die Funktionen $f \in C^1(M)$ als 0-Formen. $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$.
(2) Sei X Vektorfeld, ω k-Form auf M. Wir definieren eine $k-1$-Form durch

$$(X \llcorner \omega)(X_1, \cdots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{k-1}), \quad \forall X_1, \cdots, X_{k-1} \in TM.$$

Für $M = U \subset \mathbb{R}^k$ offen, ist es leicht nachzuprüfen, dass gilt lokal mit $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\begin{aligned} X \llcorner (dx^1 \wedge dx^k) &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \xi^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ d(X \llcorner (dx^1 \wedge dx^k)) &= (\operatorname{div} X) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \xi^i$.
(3) Sei $X \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit $U \subset \mathbb{R}^3$, und $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Sei $\omega = \sum_{i=1}^3 \omega_i dx^i$ mit $\omega_i = \xi^i$ für $i = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= d(\sum_{i=1}^{3} \omega_i dx^i) \\ &= (\partial_2 \omega_3 - \partial_3 \omega_2) dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_3 \omega_1 - \partial_1 \omega_3) dx^3 \wedge dx^1 + (\partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1) dx^1 \wedge dx^2 \\ &= (\mathrm{rot} X) \llcorner (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3), \end{aligned}$$

wobei ist $\operatorname{rot} \mathrm{X} = (\partial_2 \xi^3 - \partial_3 \xi^2, \partial_3 \xi^1 - \partial_1 \xi^3, \partial_1 \xi^2 - \partial_2 \xi^1)$. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} d^2 \omega = 0 &\iff \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0 \\ d^2 f = 0 &\iff \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0. \end{aligned}$$

Theorem 9.18. *Für $f \in C^2(M, N)$ und eine k-Form η auf N gilt*

$$d(f^* \eta) = f^* d\eta.$$

Proof. In lokaler Koordinaten (y, U') von N gilt

$$f^* \eta = \sum_{\beta \in I(k,n)} \eta_\beta \circ f df^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge df^{\beta_k},$$

aus Folgerung 9.12. Es folgt mit Satz 9.16 für $f \in C^2(M, N)$

$$\begin{aligned} d(f^* \eta) &= \sum_{\beta \in I(k,n)} d(\eta_\beta \circ f) df^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge df^{\beta_k} \\ &= \sum_{\beta \in I(k,n)} f^*(d\eta_\beta) \wedge f^*(dy^{\beta_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dy^{\beta_k}) \\ &= f^*(\sum_{\beta \in I(k,n)} d\eta_\beta \wedge dy^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge dy^{\beta_k}) \\ &= f^*(d\eta). \end{aligned}$$

□

Definition 9.19. Sei M eine Mannigfaltigkeit . Wir definieren den folgenden Räume:
(1) $\Omega^k(M) = \{C^\infty - \text{Schnitte von } \wedge^k (TM)\}$, die Menage aller k-Form. $\Omega^\bullet = \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$.
(2) $Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \,|\, d\omega = 0\}$, die Menge der geschlossenen k-Formen.
(3) $B^k(M) = \{d\eta \,|\, \eta \in \Omega^{k-1}(M)\}$, die Menge der exakten k-Formen.

Es ist klar, dass B^k eine Unterraum von $Z^k(M)$ ist, da $d(d\eta) = 0$.

Definition 9.20. Sei M eine Mannigfaltigkeit . Der Quotientenvektorraum

$$H^k(M) = Z^k(\Omega)/B^k(\Omega)$$

heißt *de Rham-Kohomoloqie* der Dimension k von M. Insbesondere heißt

$$b_k(M) = \dim H^k(M)$$

k-te *Bettizahl* von M und

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k(M)$$

das *Euler-Charakteristikum* von M.

Für M kompakt werden wir $\dim H^k(M) < \infty$ zeigen, so dass die Bettizahlen und das Euler-Charakteristikum wohldefiniert sind.

Bemerkung 9.21. Für glatte Abbildung $f : M \to N$, nach Theorem 9.18 gilt

$$f^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M) \quad \text{und} \quad f^*(B^k(N)) \subset B^k(M).$$

Damit induziert f^* eine lineare Abbildung von $H^k(N)$ nach $H^k(M)$.

Beispiele 9.22. (1) $B^0(M) = \{0\}$, $Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \,|\, f \text{ lokal konstant}\}$. Also $Z^0(M)/B^0(M) \cong \mathbb{R}^{b_0}$ mit $b_0 = \sharp\{\text{Komponenten von } M\}$.
(2) $I \in \mathbb{R}$ offenes Intervall, $x_0 \in I$. Es gilt

$$\begin{aligned} \Omega^1(I) &= \{\alpha = a(x)dx \,|\, a \in C^\infty(I)\} \\ B^1(I) &= \{du = u'(x)dx \,|\, u \in C^\infty(I)\} \end{aligned}$$

Es gilt $\Omega^1(I) = B^1(I)$ wegen $a(x)dx = u'(x)dx$ mit $u(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$. Insbesondere gilt $H^1(I) = \{0\}$.

Wir wollen nun den pullback unter Abbildungen betrachten, die von einen Parameter abhängen. Sei M dine n-dimenaional Mannigfaltigkeit mit Karte (x, U), und

$$\bar{\varphi} : [0,1] \times U \to [0,1] \times M, \quad \bar{\varphi}(t,p) = (t, \varphi(p)).$$

Die k-Formen auf $[0,1] \times U$ haben eine Basis der From

$$\{dt \wedge dx^\lambda \,|\, \lambda \in I(k-1,n)\} \cup \{dx^\mu \,|\, \mu \in I(k,n)\}$$

Also has $\eta \in \Omega^k([0,1]) \times M)$ eine lokale Darstellung

$$\eta(t,p) = dt \wedge \alpha(t,p) + \beta(t,p) \quad \text{ mit } \alpha(t,\cdot) \in \Omega^{k-1}(M), \beta(t,\cdot) \in \Omega^k(M), \forall t \in [0,1]$$

Diese Darstellung gilt sogar global, denn

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta \quad \text{ und } \quad \beta = \eta - dt \wedge \alpha.$$

Sei $d_x = \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ die "partielle" äußere Ableitung bzgl. der x-Koordinaten. Wir berechnen

$$d\eta \quad = \quad dt \wedge \frac{\partial \eta}{\partial t} + d_x \eta = dt \wedge \frac{\partial \beta}{\partial t} - dt \wedge d_x \alpha + d_x \beta$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \llcorner d\eta = -d_x \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta = \alpha.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \llcorner d\eta + d(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta) &= \frac{\partial}{\partial t} \llcorner d\eta + d_x(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta) + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial t} \llcorner \eta) \\ &= \frac{\partial \beta}{\partial t} + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \alpha \qquad (9.2) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t}. \end{aligned}$$

Sei nun $i_t : M \to [0,1]\times M$, $i_t(p) = (t,p)$. Wir definieren die abbildung $I : \Omega^k([0,1]\times M) \to \Omega^{k-1}(M)$,

$$I(\eta)(p)(v_1,\cdots,v_{k-1}) = \int_0^1 \eta(t,p)(\frac{\partial}{\partial t}, v_1,\cdots,v_{k-1})dt,$$

wobei $v_1,\cdots,v_{k-1} \in T_p(M) \subset T_{(t,p)}([0,1]\times M)$. Wir können das auch schreiben als

$$I(\eta)(p) = \int_0^1 i_i^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\llcorner \eta\right)(p)dt \in \wedge^{k-1}(T_pM).$$

Wir berechnen mit Parameterdifferentiation

$$\begin{aligned} d(I(\eta)) &= \sum_{j=1}^n dx^j \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}\int_0^1 i_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\llcorner \eta)dt \\ &= \int_0^1 di_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\llcorner \eta)dt \\ &= \int_0^1 i_t^* d(\frac{\partial}{\partial t}\llcorner \eta)dt. \end{aligned}$$

Anderseits ist

$$I(d\eta) = \int_0^1 i_t^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\llcorner d\eta\right)(p)dt.$$

Mit (9.2) erhalten wir

$$d(I(\eta)) + I(d\eta) = \int_0^1 i_t^*(\frac{\partial \eta}{\partial t})dt.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} i_{t_0}^*(\frac{\partial \eta}{\partial t})(p)(v_1,\cdots v_{k-1}) &= \frac{\partial \eta}{\partial t}(t_0,p)(v_1,\cdots v_{k-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\eta(t,p)(v_1,\cdots v_{k-1})_{|t=t_0}. \end{aligned}$$

Also haben wir

$$d(I(\eta)) + I(d\eta) = i_1^*\eta - i_0^*\eta. \tag{9.3}$$

Theorem 9.23. *Sei $f \in C^\infty([0,1]\times M, N)$. Dann gilt für $\omega \in \Omega^k(M)$*

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = d(I(f^*\omega)) + I(f^*d\omega),$$

wobei $f_t = f(t,\cdot)$ ist.

Proof. Wende (9.3) an auf $\eta = f^*\omega$:

$$i_t^*\eta = i_t^* f^*\omega = (f\circ i_t)^*\omega = f_t^*\omega.$$

□

Korollar 9.24. *Sind $f_0, f_1 \in C^\infty(M,N)$ glatt homotop, so sind die induzierte Abbildungen f_0^*, f_1^* : $H^*(N) \to H^*(M)$ gleich.*

Proof. Sei $f \in C^\infty([0,1]\times M, N)$ mit $f_0 = f(0,\cdot)$ und $f_1 = f(1,\cdot)$. Sei $\omega \in Z^k(N)$. Dann folgt

$$[f_1^*\omega] = [f_0^*\omega + dI(f^*\omega)] = [f_0^*\omega].$$

□

Korollar 9.25 (Lemma von Poincaré)**.** *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig, so gilt*

$$H^k(U) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{für } k = 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Proof. Sei $f_0 : U \to U$, $f_0(x) = x_0$, und $f_1(x) = x$ für alle $x \in U$. Dann sind f_0, f_1 glatt homotop durch

$$f(t,x) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x),$$

da U sternförmig ist. Es folgt $H^k(U) = \operatorname{Bild} f_1^* = \operatorname{Bild} f_0^* = \{0\}$ für $k \geq 1$. Genauer erhalten wir für $\omega \in \Omega^k(U)$ mit $d\omega = 0$ die Gleichung $\omega = d(I(f^*\omega))$, wobei

$$\begin{aligned} I(f^*\omega)(x)(v_1, \cdots, v_{k-1}) &= \int_0^1 (f^*\omega)(t,x)(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \cdots, v_{k-1})dt \\ &= \int \omega((1-t)x_0 + tx)(f_1(x) - f_0(x), tv_1, \cdots, tv_{k-1})dt \\ &= \int_0^1 t^{k-1}\omega((1-t)x_0 + tx)(f_1(x) - f_0(x), v_1, \cdots, v_{k-1})dt \end{aligned}$$

bzw, anders

$$I(f^*\omega) = \int_0^1 t^{k-1}(x - x_0) \llcorner \omega((1-t)x_0 + tx)dt.$$

□

10. Der Laplaceoperator auf Diiferentialformen

Im Folgener sei M ein n-dimensionale Differenzierbare Mannigfaltigkeit und $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ Riemannsche Metrik auf M. Wir arbeiten hier in der C^∞-Kategorie, später können wir die Regulärität noch spezifizieren. Mit der Metrik haben wir den Riesz-Isomorphismus

$$TM \to T^*M, \quad X \mapsto g(\cdots, X) = g_{jk}X^k dx^j := X^\flat,$$

für $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Die Umkehrabbildung lautet

$$T^*M \to TM, \quad \eta \mapsto g^{ij}\eta_i \frac{\partial}{\partial x^j} =: \eta^\natural,$$

für $\eta = \eta_j dx^j$. Wir bemerken hier, dass (g^{ij}) die Inverse von (g_{ij}). In der tat gilt

$$(X^\flat)^\natural = g^{ij}g_{jk}X^k \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X.$$

Weiter haben wir auf 1-Formen das Skalarprodukt

$$g(\xi, \eta) = g(\xi^\natural, \eta^\natural) = g_{ij}g^{ik}\xi_k g^{jl}\eta_l = g^{kl}\xi_k\eta_l.$$

Auf dem Raum $\otimes^l(TM)$ der l-linear Formen auf TM erhalten wir ein induziertes Skalarprodukt

$$g(\xi, \eta) = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_l j_l} \xi_{i_1 \cdots i_l} \eta_{j_1 \cdots j_l}.$$

Dieses Skalarprodukt ist unabhängig von der gewḧlten Basis, denn es gilt

$$\begin{aligned} g(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_l, \eta \otimes \cdots \otimes \eta_l) &= g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_l j_l}(\xi_1)_{i_1} \cdots (\xi_l)_{i_l}(\eta_1)_{j_1} \cdots (\eta_l)_{j_l} \\ &= g(\xi_1, \eta_1) \cdots g(\xi_l, \eta_l). \end{aligned}$$

Der Raum $\wedge^l(TM)$ der alternierenden l-Formen ist Unterraum von $\times^l(TM)$, durch Einschränkung von $g(\cdot,\cdot)$ erhalten wir ein Skalarprodukt auf $\wedge^l(TM)$. Es ist aber ̈blich, forgende Normierung zu wählen:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{l!} g(\xi, \eta) \quad \text{für } \xi, \eta \in \wedge^l(TM).$$

Zu dieser Normierung brachte nach Definition von ALT

$$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_l = \sum_{\sigma \in S_l} (\operatorname{sign} \sigma) \xi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma(l)} \quad (\xi_i \in T^*M). \tag{10.1}$$

Berechne damit für $\xi_i, \eta_j \in T^*M$

$$\begin{aligned}
\langle \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_l, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_l \rangle &= \frac{1}{l!} \sum_{\sigma,\tau \in S_l} \operatorname{sign}(\sigma\tau) g(\xi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma(l)}, \eta_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \eta_{\tau(l)}) \\
&= \frac{1}{l!} \sum_{\sigma,\tau \in S_l} \operatorname{sign}(\sigma\tau) g(\xi_{\sigma(1)}, \eta_{\tau(1)}) \cdots g(\xi_{\sigma(l)}, \eta_{\tau(l)}) \\
&= \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} \sum_{\tau \in S_l} \operatorname{sign}(\sigma\tau) g(\xi_{\sigma(1)}, \eta_{\tau(1)}) \cdots g(\xi_{\sigma(l)}, \eta_{\tau(l)}) \\
&\qquad \text{Substituiere } \tau(i) = j, \text{ also } \sigma(i) = (\sigma \circ \tau^{-1})(j) \\
&= \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in S_l} \sum_{\tau \in S_l} \operatorname{sign}(\sigma\tau^{-1}) g(\xi_{\sigma(\tau^{-1}(1))}, \eta_1) \cdots g(\xi_{\sigma(\tau^{-1}(l))}, \eta_l) \\
&= \det(g(\xi_i, \eta_j)).
\end{aligned}$$

Wir haben fest:

$$\langle \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_l, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_l \rangle = \det(g(\xi_i, \eta_j)) \quad \text{für } \xi_i, \eta_j \in T^*M. \tag{10.2}$$

Insbesondere: iast $\omega^1, \cdots, \omega^n$ Orthonormalbasis von T^*M, so ist $\omega^\alpha = \omega^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{\alpha_k}$ für $\alpha \in I(k,n)$ eine Orthonormalbasis von $\wedge^k(TM)$ bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Als nächstes brauchen wir das Integral von Funktionen auf M. Wir fassen nun hier kurz, denn die Sache ist ziemlich klar.

Lemma 10.1. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit . Es gibt ein eindeutig bestimmetes Maß μ_g mit*

$$\mu_g(E) = \int_{x(E)} \sqrt{\det(G \circ x^{-1})},$$

wobei $G = (g_{ij})$, für jede Karte $x : U \to x(U)$ und $E \subset U$ messbar.

Bemerkung 10.2. μ_g heißt *Volumenmaß* auf M bzgl g. Eine Menge $E \subset M$ haißt messbar, wenn $x(E \cap U)$ Lebesguemessbar ist für alle Karte (x, U). Das ist wohldefiniert, da die Kartenwechsel Diffeimorohismus sind.

Bewei von Lemma 10.1. Sei (y, U') andere Karte mit $E \subset U'$.

$$\begin{tikzcd}
 & U \cap U' \arrow[dr, "y"] & \\
x(U \cap U') \arrow[ur, "x^{-1}"] \arrow[rr, "F := y \circ x^{-1}"] & & y(U \cap U')
\end{tikzcd}$$

Das Transformationsgesetz der Metrik g lautet:

$$g^x_{ij} \circ x^{-1} = g^y_{kl} \circ x^{-1} \frac{\partial y^k}{\partial x_i} \frac{\partial y^l}{\partial x_j}, \qquad \text{auf } x(U \cap U'),$$

wobei $g = g^x_{ij} dx^i dx^j$ auf U und $g = g^y_{ij} dy^i dy^j$ auf U'. Somit gilt

$$G^x \circ x^{-1} = (DF)^T G^y \circ x^{-1} DF. \tag{10.3}$$

Aus dem Tranformationssatz folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{x(E)} \sqrt{\det(G^x \circ x^{-1})(x)} dx &= \int_{x(E)} \sqrt{\det(G^y \circ y^{-1})(F(x))} |\det DF(x)| dx \\
&= \int_{y^{-1}(E)} \sqrt{\det(G^y \circ y^{-1})(y)} dy
\end{aligned}$$

Somit ist μ_g wohldefiniert auf Mengen E, die in einen Kartegebiet erhalten sind. Allgemein zerlege M in messbare Mengen $E_j, j \in I$, und definiere

$$\mu_g(E) = \sum_{i \in I} \mu_g(E \cap E_i).$$

□

Wir haben auf $\Omega^l(M)$ nun das L^2-Skalarprodukt

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_M \langle \xi, \eta \rangle d\mu_g \tag{10.4}$$

Theorem 10.3 (Divergenz auf Formen). *Es gibt auf (M, g) genau eine (lineare) Abbildung*

$$d_g^* : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$$

mit der Eigenschaft

$$\langle d_g^* \omega, \eta \rangle_{L^2} = \langle \omega, d\eta \rangle_{L^2}, \qquad \textit{für alle } \eta \in \Omega_c^k(M). \tag{10.5}$$

Bemerkung 10.4. Man schreibt d_g^* auch mit δ. Der Operator wird auch als *Kodifferential* bezeichnet. Die Eigenschaft (10.5) bedeutet, dass d_g^* der zu g formel adjungierte Operator bzgl. des L^2-Skalarprodukts ist. Der zusatz "formal" grenzt ab von der Definition des adjungiertern Operator in der Hilbertraumtheorie. Grundsätzlich kann zu jedem linearen Differentialoperator L ein formal adjungierter Operstor L^* bestimmt werden durch partielle Integration. So gehen wir auch hier vor.

Bweis von Satz 10.3. Zuerst zeigen wir die Eindeutigkeit: Sinf δ_1, δ_2 Abbildungen mit (10.5), so gilt

$$\langle \delta_1 \omega - \delta_2 \omega, \eta \rangle = 0 \qquad \text{für alle } \eta \in \Omega_c^k(M).$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung impliziert $\delta_1 \omega = \delta_2 \omega$ und somit $\delta_1 = \delta_2$.

Nun betrachten wir die Existenz: Es reicht, den Operator d_g^* auf den Gebiet U einer Karte (x, U) zu definieren. Wegen der Eideutigkeit stimmen die Definitionen auf dem Overlap von zwei Katengebieten überein, also ist d_g^* dann global definiert (wie im Beweis vom Satz 9.16.) Sei nun

$$g^{\alpha\beta} = \langle dx^\alpha, dx^\beta \rangle \qquad \text{für } \alpha, \beta \in I(k, n).$$

Wir berechnen in lokaler Koordinaten

$$\begin{aligned} \langle \omega, d\eta \rangle \sqrt{\det G} &= \frac{\partial \eta_\beta}{\partial x^j} \langle \omega,\ dx^j \wedge \eta \rangle \sqrt{\det G} \\ &= \frac{\eta_\beta}{\partial x^j} (\eta \langle \omega,\ dx^j \wedge \eta \rangle \sqrt{\det G}) - \eta_\beta \frac{\partial}{\partial x^j} (\langle \omega,\ dx^j \wedge \eta \rangle \sqrt{\det G}) \end{aligned}$$

Bei Integration fällt der erste Term weg für $\eta \in \Omega_c^k(U)$. Wir brauchen also

$$\int_U g^{\beta\gamma} \eta_\beta (d_g^* \omega)_\gamma \sqrt{\det g}) = - \int_U \eta_\beta \frac{\partial}{\partial x^j} (\langle \omega,\ dx^j \wedge \eta \rangle \sqrt{\det g}).$$

Von jetzt an schreiben wir $\det g$ für $\det G$. Die Matrix $g^{\alpha\beta}$ ist die gramsche Matrix der Basis dx^α, $\alpha \in I(k, n)$, bezglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Somit existiert die inverse Matrx, die wir mit $g_{\alpha\beta}$ bezeichnen. Wir definieren nun

$$(d_g^* \omega)_\alpha = - \frac{1}{\sqrt{\det g}} g_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\langle \omega, dx^l \wedge dx^\beta \rangle \sqrt{\det g} \right). \tag{10.6}$$

Dann folgt wie gewünscht

$$\begin{aligned} g^{\beta\gamma} (d_g^* \omega)_\gamma \sqrt{\det g} &= -g^{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} \frac{\partial}{\partial x^l} (\langle \omega, dx^l \wedge dx^\beta \rangle \sqrt{\det g}) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^l} (\langle \omega, dx^l \wedge dx^\beta \rangle \sqrt{\det g}). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Beispiel 10.5. Für eine 1-Form $\omega = \omega_j dx^j$ folgt

$$d_g^* \omega = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^l}(g^{lj}\sqrt{\det g}\omega_j)$$

Die Formel (10.6) für die Divergenz kann weiter bearbeiten werden.

Bemerkung 10.6. Sei ξ 1-Form. Dann gilt $g(\omega, \xi \wedge \eta) = g(\xi^\natural \llcorner \omega, \eta)$.

Da die Gleichung in ξ, η, ω linear ist, können wir für eine Orthonormalbasis $e_1, \cdots, e_n$ annehmen:

$$\begin{aligned} \omega &= e^{\alpha_0} \wedge \cdots \wedge e^{\alpha_l} \quad (\alpha \in I(l+1, n)) \\ \eta &= e^{\gamma_1} \wedge \cdots \wedge e^{\gamma_l} \quad (\gamma \in I(l, n)) \\ \xi &= e^k \qquad\qquad\qquad k \in \{1, \cdots, n\} \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} (\xi^\natural \omega)(e_{\gamma_1}, \cdots, e_{\gamma_l}) &= (e^{\alpha_0} \wedge \cdots \wedge e^{\alpha_l})(e_k, e_{\gamma_1}, \cdots, e_{\gamma_l}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \{\alpha_0, \cdots, \alpha_l\} \neq \{k, \gamma_1, \cdots, \gamma_l\} \\ (-1)^{i-1} & \text{falls } \alpha = (\gamma_1, \cdots, \gamma_{i-1}, k, \gamma_i, \cdots, \gamma_l) \end{cases} \\ &= g(\omega, \xi \wedge \eta). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Darstellung, mit $e_l = (dx^l)^\natural$

$$(d_g^* \omega)_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} g_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(g(e_l \llcorner \omega, dx^\beta)\sqrt{\det g}\right). \tag{10.7}$$

Definition 10.7 (Laplace-Operator)**.** Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist der Laplaceoperator auf k-Formen definiert durch

$$\Delta_g \omega = (dd_g^* + d_g^* d)\omega.$$

Beispiel 10.8. Für eine Funktion $u : M \to \mathbb{R}$ ist nach Definition $d_g^* u = 0$ und folglich (vgl. Divergenz auf 1-Formen in Beispiel 10.5)

$$\Delta_g u = d_g^* du = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij}\sqrt{\det g}\frac{\partial u}{\partial x^j})$$

Beispiel 10.9. Wir berechnen jetzt den Laplaceoperator auf Formen in $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es ergibt sich

$$(d_g^* d\omega)_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x^k}\langle e_k \llcorner (dx^i \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^j}), dx^\alpha\rangle$$

oder

$$d_g^* d\omega = -e_k \llcorner (dx^i \wedge \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^k}).$$

Andererseits

$$dd_g^* \omega = dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}\left(-\langle e_k \llcorner \frac{\partial w}{\partial x^k}\rangle dx^\alpha\right)$$

oder

$$dd_g^* \omega = -dx^i \wedge (e_k \llcorner \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^k}).$$

Wir behaupten

$$dx^i \wedge (e_k \llcorner \eta) + e_k \llcorner (dx^i \wedge \eta) = \delta_{ik}\eta.$$

Sei dazu $\omega = dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}$.

Fall 1. $i = k$.

Fall 1a. $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}, i, \alpha_{r+1}, \alpha_l)$.

In diesen Fall haben wir $e_i \llcorner \omega = (-1)^{r-1} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \hat{dx^{\alpha_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}$, $dx^i \wedge \omega = 0$ und $dx^i \wedge (e_i \llcorner \omega) = \omega$.

Fall 1b. $\alpha_{r-1} < i < \alpha_r$ für $r = 1, \cdots, l+1$.

In diesen Fall gilt $e_i \llcorner \omega = 0$, $dx^i \wedge \omega = (-1)^{r-1} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{r-1}} \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}$, und $e_i \llcorner (dx^i \wedge \omega) = \omega$.

Fall 2. $i \neq k$.

Fall 2a. α enthielt weder i nock k.
Dann leifert innere Multiplikation $\llcorner$ mit e_i bzw e_k Null.

Fall 2b. α enthielt i und k.
Dann liefert Dachprodukt mit dx^i bzw dx^k Null.

Fall 2c. $i \notin \alpha, k \in \alpha$.
Dann gibt es ein m mit

$$\omega = dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{r-1}} \wedge dx^k \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}, \quad \alpha_{m-1} < i < \alpha_m.$$

Es ist leicht to prüfen, dass

$$e_k \llcorner \omega = (-1)^{r-1} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_{r-1}} \wedge \hat{dx^r} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}.$$

und

$$dx^i \wedge (e_k \llcorner \omega) = \begin{cases} (-1)^{r-1}(-1)^{m-1} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge \hat{dx^{\alpha_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}, & \text{falls } m \leq r \\ (-1)^{r-1}(-1)^m dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \hat{dx^{\alpha_r}} \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}, & \text{falls } m > r \end{cases}$$

Entsprechend berechnen wir $dx^i \wedge \omega = (-1)^{m-1} dx^{\alpha_i} \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}$ und

$$e_k \llcorner (dx^i \wedge \omega) = \begin{cases} (-1)^{m-1}(-1)^{r-1} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \hat{dx^{\alpha_r}} \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}, & \text{falls } r < m \\ (-1)^m(-1)^r dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge \hat{dx^{\alpha_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_l}, & \text{falls } r \geq m \end{cases}$$

Addition ergibt die Behauptung.
Also folgt in $\mathbb{R}^n$

$$(dd^* + d^*d)\omega = -\delta_{ik} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^i \partial x^k} = -\Delta_{\mathbb{R}^n} \omega.$$

Im $\mathbb{R}^n$ ist der Laplaceoperator auf Formen gleich minus Standardlaplace auf den Koeffizientenfunktionen.

Definition 10.10. Seien $E, F \to M$ Vektorbündel über M mir Rang n bzw. m. Wir bezeichnen die glatten Schnitt von E bzw. F mit $\mathbb{C}^\infty_{id}(E)$ bzw. $C^\infty_{id}(F)$[1]. Ein linear Abbildung

$$L : C^\infty_{id}(E) \to C^\infty_{id}(F)$$

heißt *linearer Pifferentialoperator* der Ordung $r \in \mathbb{N}_0$, wenn für jede Karte (x, U) von M und lokale Trivialiesierungen von E und F gilt:

$$L\varphi(p) = \sum_{|\alpha| \leq r} A_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x), \quad \text{mit } A_\alpha(x) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (x = x(p)).$$

Für $\xi \in T^*_p M$ heißt die lineare Abbildung

$$\sigma_L(\xi) : E_p \to F_p, \quad \sigma_L(\xi) = \sum_{|\alpha| = r} A_\alpha(x) \xi^a, \quad (x = x(p))$$

das *Symbol* (genauer:Hauptsimbol) von L

[1] Üblich ist $\Gamma(E)$ und $\Gamma(F)$, abr damit kann man die Regularität nicht notieren

Bemerkung 10.11. Sei sei $\chi \in C^\infty(M)$ mit $\chi(p) = 0$ und $d\chi(p) = \xi$, und sei $\varphi \in C^\infty_{id}(E)$ mit $\varphi(p) = v$. Dann gilt

$$\sigma_L(\xi) = \frac{1}{r!} L(\chi^r \varphi)(p).$$

Denn es gilt

$$\begin{aligned} L(\chi^r\varphi)(p) &= \sum_{|\alpha|\leq r} A_\alpha(x) D^\alpha(\chi^r\varphi)(x) \\ &= r! \sum_{|\alpha|=r} A_\alpha(x)\partial_1^{\alpha_1}\chi\cdots\partial_n^{\alpha_n}\chi\varphi(x) \\ &= r!\sigma_L(\xi)v. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\sigma_L(\xi)$ unabhängig von der Wahl der Karte und der lokalen Trivialisierungen.

Definition 10.12. Ein linearer Differentialoperator L der Ordnung r heißt *elliptisch*, falls $\sigma_L(\xi)$ invertierbar ist für alle $0 \neq \xi \in T^*(M)$.

Beispiel 10.13. Wähle zu $p \in (M, g)$ lokale Karte (x, U) mit $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$. (Das kann man immer machen.) Der Laplaceoperator auf Formen hat dann due Darstellung

$$\Delta_g\omega(p) = -\sum_{i=1}^n \partial_i^2\omega + \sum_{i=1}^n b^i\partial_i\omega + c\omega.$$

Denn in Termen mit zweiten Ableitungen treten keine Ableitungen der Mertik auf. Wegen $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ müssen diese Termen wie im $\mathbb{R}^n$ sein. Das Symbol von Δ_g ist also

$$\sigma_{\Delta_g}(\xi)\omega = -(\sum_{i=1}^n \xi_i^2)\omega = -\|\xi\|_g^2\omega.$$

Somit ist Δ_g elliptisch.

Beispiel 10.14. Berechne $\mathcal{D} = d + d_g^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ mit $\Omega^*(M) = \oplus_{k=1}^n(M)$. Das Symbol von $\mathcal{D}$ ist

$$\sigma_\mathcal{D}(\xi)\omega = \xi \wedge \omega - \xi^\natural \llcorner \omega.$$

$\sigma_\mathcal{D}(\xi)$ ist invertierbar für alle $\xi \neq 0$. (Übung) Also ist $\mathcal{D}$ ein elliptischer Operator. $\mathcal{D}$ heiß *Diracoperator* auf Differentialformen; Es gilt

$$\mathcal{D}^2 = (d + d_g^*)^2 = dd_g^* + d_g^*d = \Delta_g.$$

Denn $d^2 = (d_g^*)^2 = 0$. Insbesondere gilt auf einer kompakten Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} \int_M \langle\Delta_g\omega, \omega\rangle d\mu_g &= \int_M \langle(dd_g^* + d_g^*d)\omega, \omega\rangle d\mu_g \\ &= \int_M (\|d\omega\|_g^2 + \|d_g^*\omega\|_g^2) d\mu_g \\ &= \int_M \|\mathcal{D}\omega\|^2 d\mu_g \end{aligned}$$

Also gilt für M kompakt

$$\Delta_g\omega = 0 \Longleftrightarrow d\omega = 0, \& d_g^*\omega = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{D}\omega = 0.$$

Wir können $\mathcal{D}$ auch als Operator von den geraden in die ungraden Formen betrachten

$$\mathcal{D} : \Omega^{gerade}(M) \to \Omega^{ungerade}(M).$$

Die Dimensionen dieser Räume sind gleich, wenn $\dim M$ gerade ist.

11. Der Staz von Hodge

Als erstes definieren wir Sobolevräume auf Mannigfaltigkeit

Definition 11.1 (schwache Abbildung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann definieren wir

$$\partial_i u = g \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_\Omega u \partial_i \eta = \int_\Omega g\eta \quad \text{für alle } \eta \in C_c^\infty(\Omega).$$

g heißt die i-te schwache Ableitung von u und ist mit $\partial_i u$ bezechnet. Die schwache Ableitung ist, wenn existent, eindeutig. Das folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. Weiter setzen wir für $p \in [1, \infty]$

$$W^{1,p}_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p_{loc}(\Omega) \,|\, \partial_i u \in L^p_{loc}(\Omega) \,\forall i = 1, \cdots, n\}$$

Definition 11.2 ($W^{1,p}_{loc}(M)$)**.** Sei M eine n-dimensionale differezierbare Mannigfaltigkeit . $W^{1,p}_{loc}(M)$ ist die Menge aller $u : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ messbar mit

$$u \circ x^{-1} \in W^{1,p}_{loc}(x(U)), \quad \text{für jede Karte } (x, U).$$

Sei M kompakt. Dann gibt es einen Atlas (x_i, U_i), $(1 \leq i \leq N)$ endlich, und $V_i \Subset x_i(U_i)$ mit $M = \cup_{i=1}^n x_i^{-1}(V_i)$. Dann setzen wir

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \sum_{i=1}^N \|u \circ x^{-1}\|_{W^{1,p}(V_i)} < \infty.$$

Es ist leich zu sehen, dass dies eine Norm ist; wir schreiben $W^{1,p}(M)$ statt $W^{1,p}_{loc}(M)$.

Betrache einen anderen Atlas $(\tilde{x}_j, \widetilde{U}_j)$ $(1 \leq j \in \widetilde{N})$ mit $\widetilde{V}_j \Subset \tilde{x}(\widetilde{U}_j)$ und $M = \cup_{j=1}^{\widetilde{N}} \tilde{x}_j^{-1}(\widetilde{V}_j)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u \circ \tilde{x}_j^{-1}\|_{W^{1,p}(\widetilde{V}_j)} &\leq \sum_{i=1}^N \|u \circ x^{-1} \circ (x_i \circ \tilde{x}_j^{-1})\|_{W^{1,p}(\widetilde{V}_j \cap (\tilde{x}_j \circ x^{-1})(V_i))} \\ &\leq C \sum_{i=1}^N \|u \circ x^{-1}\|_{W^{1,p}(V_i)} \end{aligned}$$

Wir können also die Kettenregel anwenden (genauer die Sobolev-Kettenregel, wenn die Funktion $u : M \to \mathbb{R}$ nicht C^1 ist).

Also sind die Norm $\|u\|_{W^{1,p}(M)}$ äuivelent, die Konstante hнagt von der beiden Atlas ab. $W^{1,p}(M)$ ist mit einer solchen Norm ein Banachraum, ein Hilbertraum $(p = 2)$

$$\langle u, v\rangle_{W^{1,2}} = \sum_{i=1}^N \langle u \circ x^{-1}, v \circ x^{-1}\rangle_{W^{1,2}}$$

Theorem 11.3 (Rellich)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$ und $u_k \in W^{1,2}(M)$ Folge mit $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C$. Dann gilt nach Wahl einer Teilfolge*

$$u_k \to u \quad \textit{in } L^p(M).$$

Bemerkung 11.4. Im Fall $p > 1$ gibt außerdem $u \in W^{1,p}(M)$ und

$$Du_k \to Du \quad \text{schwach in } L^p(M).$$

Im Fall $= 1$ kann man das nicht erwarten.

Bemerkung 11.5. $C^\infty(M)$ ist dicht in $W^{1,p}(m)$ für $1 \leq p < \infty$. Im $\mathbb{R}^n$ zeigt man das durch Glättung. Auf M kann man $u = \sum_{i \in I} \eta_i u$ zerlegen mit einer Teilung der Eins, und auf $\eta_i u$ der Regularität im $\mathbb{R}^n$ verwenden.

Die obige Definitionen lassen sich auf Schnitte ω in einem Vektorbündel E verallgemeinern. Es ist $\omega \in W^{1,2}_{loc}(E)$, wenn in jeder lokalen Trivialisierung $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, $r = \text{Rang } E$, gibt:

$$\Phi_\alpha(\omega(p)) = (p, \omega_a(p) \quad \text{mit } \omega_\alpha \in W^{1,p}_{loc}(U, \mathbb{R}^r).$$

Die Definition von $W^{1,p}(E)$ für M kompakt und von $\|\omega\|_{W^{1,p}(M)}$ ist analog zu oben.

Wir kommen jetzt zurülk zum Laplaceoperator auf Formen. Als erstes brauchen wir eine Konsequent der Elliptizität des Operator Δ_g.

Lemma 11.6. *Sei g Riemannsche Metrik der Klasse C^1 auf M. Dann gibt es zu $p \in m$ eine Karte (x, U) mit $x : U \to B_1(0)$, $x(p) = 0$, so dass fúr $\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM)$ mit $\operatorname{spt}\omega \Subset U$ gibt:*

$$\int_U (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2) d\mu_g \geq \frac{1}{2} \int_{B_1(0)} |D\omega|^2 dx - C\|\omega\|_{L^2{}_g}.$$

Proof. Auf der rechten Seite bezeichnet $D\omega$ die Koordinatenableitungen $\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^i}$ mit $\alpha \in I(k,n)$, $i = 1, \cdots, n$. Die Ungleichung wird manchmal als Gardingsche Ungleichung bezeichnet. Allerdings gilt jene für allgemeinere elliptische Operatoren. Der Beweis erfolgt in 4 Schritten.

Schritt 1. Wähle ein Karte mit $g_{ij} = \delta_{ij}$ Dann gilt mit $d^* = d^*_{\mathbb{R}^n}$

$$d_g^*\omega + d^*\omega = A(G) \cdot D\omega + B(G)DG\omega,$$

mit $A, B : GL(\mathbb{R}, n) \to \mathbb{R}^N$ glatt und $A(E_n) = 0$.

Wir haben eine Darstellung der Form

$$(d_g^*\omega)_\beta = a_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^k}(b^{k\gamma\alpha}(G)\omega_\alpha).$$

Es folgt

$$(d^*\omega)_\beta = a_{\beta\gamma}(E_n)\frac{\partial}{\partial x^k}(b^{k\gamma\alpha}(E_n)\omega_a).$$

Somit durch Substraktion und Differenzieren haben wir

$$\begin{aligned}(d_g^*\omega)_\beta - (d^*\omega)_\beta &= (a_{\beta\gamma}(G)b^{k\gamma_\alpha}(G) - a_{\beta\gamma}(E_n)b^{k\gamma_\alpha}(E_n))\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^k} + a_{\beta\gamma}(G)\frac{\partial b^{k\gamma\alpha}}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_i j}{\partial x^k}\omega_\alpha \\ &=: A_\beta(G)\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^k} + B_\beta(G)\partial x^k\omega_\alpha.\end{aligned}$$

Offenbar haben $A(G)$, $B(G)$ die gewünschten Eigenschaften.

Schritt 2. Sei $g := (g_{ij})$ Riemannsche Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\|g_{ij} - \delta_{ij}\|_{C^0(U)} + \|Dg\|_{C^0(U)} \leq \delta. \tag{11.1}$$

Ist $\delta \leq \delta_0$, so folgt für $\omega \in C^1_c(U, \wedge^k\mathbb{R}^n)$

$$\int_U |D\omega|^2 \leq C(\delta)\int_U (\|d\omega\|_g^2 + \|d^*\omega\|_g^2 + \|\omega\|_g^2)d\mu_g,$$

wobei $C(\delta) \to 1$ mit $\delta \to 0$.

Für eine k-Form $\omega \in C^1_c(U, \wedge\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}\int \|\omega\|_g^2 d\mu_g - \int |\omega|^2 dx &= \int (g^{\alpha\beta}\sqrt{\det g} - \delta^{\alpha\beta})\omega_\alpha\omega_\beta \quad (g^{\alpha\beta} = \det(g^{\alpha_i\beta_j})) \\ &=: \int a_1(g)\omega \cdot \omega \quad \text{mit } a_1(E_n) = 0.\end{aligned}$$

Insbesondere,

$$\begin{aligned}\int \|d\omega\|_g^2 d\mu_g - \int |d\omega|^2 dx &= \int a_1(g) d\omega \cdot d\omega,\\ \int \|d_g^*\omega\|_g^2 d\mu_g - \int |d^*\omega|^2 dx &= \int a_1(g) d_g^*\omega \cdot d_g^*\omega.\end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}\int \|d_g^*\omega\|^2 d\mu_g - \int |d^*\omega|^2 dx &= \int |d^*\omega + A(G)\cdot D\omega + B(G)DG\omega|^2 - \int |d^*\omega|^2 dx\\ &= \int C_1(g,Dg)D\omega\cdot D\omega + C_2(g,Dg)D\omega\cdot\omega + C_3(g,Dg)\omega\cdot\omega,\end{aligned}$$

wobei $C(g,Dg)$ glatt mit $C_i(E_n,0)=0$ $(i=1,2,3)$. Weiter berechnen wir ähnlich

$$\begin{aligned}\int a_1(g)d_g^*\omega\cdot d_g^*\omega - \int a_1(g)d\omega\cdot d\omega &= \int a_1(g)(d^*\omega + A(G)\cdot D\omega + B(G)DG\omega)^2 - \int a_1(g)d\omega\cdot d\omega\\ &= \int C_1'(g,Dg)D\omega\cdot D\omega + C_2'(g,Dg)D\omega\cdot\omega + C_3'(g,Dg)\omega\cdot\omega,\end{aligned}$$

wobei $C'(g,Dg)$ glatt mit $C_i'(E_n,0)=0$ $(i=1,2,3)$. Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned}&\int (\|d\omega\|_g^2 + \|d_g^*\omega\|_g^2)d\mu_g - \int (|d\omega|^2 + |d^*\omega|^2)dx\\ &= \int C_1''(g,Dg)D\omega\cdot D\omega + C_2''(g,Dg)D\omega\cdot\omega + C_3''(g,Dg)\omega\cdot\omega,\end{aligned}$$

wobei $C''(g,Dg)$ glatt mit $C_i'(E_n,0)=0$ $(i=1,2,3)$. Setze nun

$$\varepsilon(\delta) = \max\{\sum_{i=1}^3 |C_i''(A,B)| \,|\, |A-E_n|\le\delta, |B|\le\delta\}.$$

Dann folgt $\varepsilon(\delta)\searrow 0$ mit $\delta\searrow 0$

$$\int (\|d\omega\|_g^2 + \|d_g^*\omega\|_g^2)d\mu_g - \int (|d\omega|^2 + |d^*\omega|^2)dx \le C\varepsilon(\delta)\int (|D\omega|^2 + |\omega|^2)$$

Andererseits gilt, da ω komapkter Träger in U hat, zumindest wenn ω von der Klasse C^2,

$$\begin{aligned}\int_U (|d\omega|^2 + |d^*\omega|^2)dx &= \int_U \langle (dd^* + d^*d)\omega\omega\rangle\\ &= \int_U \langle \sum \frac{\partial^2\omega}{\partial x^i\partial x^i}, \omega\rangle\\ &= \int_U |D\omega|^2.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\int (\|d\omega\|_g^2 + \|d_g^*\omega\|_g^2)d\mu_g &\ge \int_U |D\omega|^2 - C\varepsilon(\delta)\int (|D\omega|^2 + |\omega|^2)\\ &\ge (1 - C\varepsilon(\delta))\int_U |D\omega|^2 - C\varepsilon(\delta)\int |\omega|^2.\end{aligned}$$

Schritt 3. Beweis für $\omega\in W^{1,p}(\wedge^k TM)$ mit $\operatorname{spt}\omega \Subset U$.

Es ist nur zu zeigen, dass

$$\int_U (|d\omega|^2 + |d^*\omega|^2) = \int_U |D\omega|^2.$$

Die Identität gilt für glatte Formen. Für $\omega \in W^{1,p}(\wedge^k TM)$ benutzen wir die Glättung: Sei $U = \mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\omega_\varepsilon(x) = \int \eta_\varepsilon(x-y)\omega(y)dy = \int \eta_\varepsilon(z)\omega(x-z)dz,$$

wobei $\eta_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n}\eta(\frac{z}{\varepsilon})$ und $\eta \in C_c^1(B_1(0))$ mit $\int \eta(z)dz = 1$. Es ist klar, dass $\omega_\varepsilon \in C_c^1$. Es gilt dann

$$D_i(\omega_\varepsilon) = (\partial_i\omega)_\varepsilon,$$

wobei $\partial_i\omega$ die schwache Ableitung on ω ist. Denn

$$\begin{aligned}
\int D_i(\omega_\varepsilon)\varphi &= -\int \omega_\varepsilon \partial_i\varphi \qquad \text{(Gauss)}\\
&= -\int\int \eta_\varepsilon(x-y)\omega(y)dy\partial_i\varphi dx\\
&= -\int \omega(y)\int \eta_\varepsilon(x-y)\partial_i\varphi(x)dxdy\\
&= -\int \omega(y)(\partial_i\varphi)_\varepsilon(y)dy \qquad (\eta(-z)=\eta(z))\\
&= -\int \omega(y)\partial_i(\varphi_\varepsilon)(y)dy \qquad \text{(Parameterabhängige Integration)}\\
&= \int \partial_i\omega\varphi_\varepsilon(y)dy \qquad \text{(Definition schwacher Ableitung)}\\
&= \int (\partial_i\omega)_\varepsilon\varphi.
\end{aligned}$$

Es folgt $\partial_i(\omega_\varepsilon) = (\partial_i\omega)_\varepsilon \to \partial_i\omega$ in L^2 für $\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM)$. also können wir inder Identität ω_ε einsetzen und $\varepsilon \searrow o$ gehen lassen.

Schritt 4. Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M können wir eine passende Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ mit (11.1) um Lemma zu zeigen.

□

Lemma 11.7. *Sei M kompakt und g Metrik der Klasse C^1. Dann gilt für $\omega \in W^{1,2}(\wedge kTM)$ die Abschätzung*

$$\|\omega\|_{W^{1,2}(M)} \le C\int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2 + \|\omega\|^2)d\mu_g.$$

Proof. Sehe Schritt 2 in den Beweis von Lemma 11.6 and Benutze die Teilung der Eins. □

Wir betrachten nun Δ_g als stetigen linearen Opeartor

$$\Delta_g : W^{1,2}(\wedge^k TM) \to W^{1,2}(\wedge^k TM)' =: W^{-1,2}(\wedge^k TM),$$

$$\langle \Delta_g\omega, \eta\rangle = \int (\langle d\omega, d\eta\rangle + \langle d_g^*\omega, d_g^*\eta\rangle)d\mu_g.$$

Δ_g ist stetig, da gilt

$$|\langle \Delta_g\omega, \eta\rangle| \le C\|\omega\|_{W^{1,2}}\|\eta\|_{W^{1,2}}.$$

Für $\omega \in W^{2,2}(\wedge^k TM)$ gilt

$$\int_M (\langle d\omega, d\eta\rangle + \langle d_g^*\omega, d_g^*\eta\rangle)d\mu_g = \int_M \langle \Delta_g\omega, \eta\rangle d\mu_g = \langle \Delta_g\omega, \eta\rangle,$$

also ist die Definition konsistent.

Theorem 11.8. *Sei kompakte Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Matrik g der Klasse C^1. Dann ist der Vektorraum harmonischer Differentialformen*

$$H^k(M) = \{\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM) \mid \Delta_g\omega = 0\}$$

endlich dimensional.

Bemerkung 11.9. Fdirur $\omega \in H^k(M)$ gilt

$$0 = \langle \Delta_g \omega, \omega \rangle = \int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^* \omega\|) d\mu_g,$$

also $d\omega = 0$ und $d_g^*\omega = 0$.

Beweis vom Satz 11.8. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ ist $H^(M)$ Hilbertraum. Wäre $\dim H^k(M) = \infty$, so gibt es eine lineare unabhängige Filge ω_k Mit Gram-Schmidt können wir annehmen:

$$\langle \omega_k, \omega \rangle_{L^2_g} = \delta_{kl}.$$

Aus Lamma 11.7 folgt wegen $d\omega_k = d_g^*\omega = 0$

$$\|\omega_k\|_{W^{1,2}} \leq C\|\omega\|_{L^2} \leq C.$$

Nach Rellich gibt es eine Teilfolge, die in L^2 konvergiert. Wiederspruch zu $\|\omega_k - \omega_l\|_{L^2} = \sqrt{2}$ für $k \neq l$. □

Lemma 11.10. *Sei M kompakt mit Riemannscher Metrik g der Klasse C^1. Dann gibt es eine Konstant $\lambda > 0$ mit*

$$\int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2) \delta\mu_g \geq \lambda \|\omega\|_{L^2}$$

für alle $\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM)$ mit $\omega \perp_{L^2} H^k(M)$.

Proof. Angenommen es gilt zu $k \in \mathbb{N}$ ein $\omega_k \in W^{1,2}(\wedge^k TM)$, $\omega_k \perp_{L^2} H^k(M)$. mit

$$\int_M (\|d\omega_k\|^2 + \|d_g^*\omega_k\|^2) \delta\mu_g < \frac{1}{k} \|\omega_k\|_{L^2}.$$

Durch Normierung können wir $\|\omega\|_{L^2} = 1$ annehmen. Aus Lemma 11.7 folgt

$$\|\omega_k\|_{W^{1,2}(M)} \leq C$$

. Nach Rellich gibt nach Wahl einer Teilfolge $\omega_k \to \omega$ in L^2, also

$$\|\omega\|_{L^2} = 1 \quad \text{ und } \omega \perp_{L^2} H^k(M).$$

Weiter folgt für glatte Formen η

$$\begin{aligned} \langle \omega, d\eta \rangle_{L^2} &= \lim_{k\to\infty} \langle \omega_k, d\eta \rangle_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \langle d_g^*\omega_k, \eta \rangle_{L^2} = 0 \\ \langle \omega, d_g^*\eta \rangle_{L^2} &= \lim_{k\to\infty} \langle \omega_k, d_g^*\eta \rangle_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \langle d\omega_k, \eta \rangle_{L^2} = 0 \end{aligned}$$

Es gibt also $d\omega = 0$ und $d_g^*\omega = 0$ in dem schwachen Sinne. Aber nach Auswahlsatz im Hilbertraum können wir annehmen, dass

$$\omega_k \to \omega \text{ schwach } in W^{1,2}$$

. Damit gilt tatsächlich $\omega \in H^k(M)$, und somit

$$0 = \langle \omega, \omega \rangle_{L^2} = \|\omega\|_{L^2}^2 = 1,$$

Wiederspruch. □