Theorem 11.11. *Für den Operator* $\Delta_g : W^{1,2}(\wedge^k TM) \to W^{-1,2}(\wedge^k TM)$ *gilt:*
(1) $\ker \Delta_g = \mathcal{H}^k(M)$.
(2) $\operatorname{Bild} \Delta_g = \{\Lambda \in W^{-1,2}(\wedge^k TM) \,|\, \Lambda_{|\mathcal{H}^k(M)} = 0\}$
(3) $\Delta_g : \{\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM) \,|\, \omega \perp_{L^2} \mathcal{H}^k\} \to \operatorname{Bild} \Delta_g$ *ist stetig invertierbar.*

Proof. (1) ist klar.
(2) Ist $\Lambda = \Delta_g \omega$, so folgt für $\eta \in \mathcal{H}^k(M)$

$$\Lambda(\eta) = \langle \Delta_g \omega, \eta \overset{\text{def}}{=} \int_M (\langle d\omega, \delta\eta\rangle + \langle d_g^*\omega, d_g^*\eta\rangle) d\mu_g = 0.$$

Also ist die Bedingnung notwendig. Umgekehrt sei Λ mit $\Lambda_{|\mathcal{H}^k(M)} = 0\}$; wir müssen dann die partial Differentialgleichung

$$\Delta_g \omega = \Lambda. \tag{11.2}$$

lösen. Wir verwenden eine Variationsmethode und definieren das Funktional

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2} \int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2) d\mu_g - \Lambda(\omega).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$ ist (11.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{F}(\omega + t\eta) &= \int_M (\langle d\omega, d\eta\rangle + \langle d_g^*\omega, \delta_g^*\eta\rangle) d\mu_g - \Lambda(\omega) \\ &= \langle \Delta_g \omega - \Lambda, \eta\rangle. \end{aligned}$$

Ein Minimum des Funktionals $\mathcal{F}$ wäre also die gewünschte Lösung der Gleichung (11.2). Allerdings haben wir Schwierigkeiten, die Minimalfolge zu kontrallieren, z.B., für Fall $\Lambda = 0$ wäre jedes $\omega \in \mathcal{H}^k(M)$ Minimum. Also betrachten wir

$$\mathcal{F} : X := \{\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM) \,|\, \omega \perp_{L^2} \mathcal{H}^k(M)\} \to \mathbb{R}.$$

(a) $\mathcal{F}$ ist nach unten beschränkt und koerziv.
Nach Lemma 11.7 gilt

$$\|\omega\|^2_{W^{12,}} \leq C(\int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2 + \|\omega\|^2) d\mu_g.$$

Anderweseits liefert Lemma 11.10 für ωX

$$\int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2) d\mu_g \geq \lambda \|\omega\|_{L^2}.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega) &\geq \frac{1}{2} \int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2) d\mu_g - \varepsilon \|\omega\|_{W^{1,2}} - C(\varepsilon)\|\Lambda\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2) d\mu_g - \varepsilon \|\omega\|_{W^{1,2}} \\ &\quad -C\varepsilon \int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2 + \|\omega\|^2) d\mu_g - C(\varepsilon)\|\Lambda\|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2) d\mu_g - C(\varepsilon)\|\Lambda\|^2, \end{aligned}$$

mit $C\varepsilon = \min\{\frac{1}{8}, \frac{\lambda}{4}\}$.
(b) $\mathcal{F}$ ist unterhalbstetig bzgl. schwacher Konvergenz in $W^{1,2}$.

Λ ist stetig nach Definition der schwachen Konvergenz. Für den ersten Term verwende $\omega_k = \omega + \varphi_k$ mit $\varphi_k \to 0$ bzgl. schwacher Konvergenz in $W^{1,2}$.

$$\begin{aligned}\int_M (\|d\omega_k\|^2 + \|d_g^*\omega_k\|^2)d\mu_g &= \int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2)d\mu_g + 2\int_M (\langle d\omega, d\varphi_k\rangle_g + \langle d_g^*\omega, d_g^*\varphi_k\rangle_g)d\mu_g \\ &\quad + \int_M (\|d\varphi_k\|^2 + \|d_g^*\varphi_k\|^2)d\mu_g \\ &\geq \int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2)d\mu_g + 2\int_M (\langle d\omega, d\varphi_k\rangle_g + \langle d_g^*\omega, d_g^*\varphi_k\rangle_g)d\mu_g.\end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert gegen 0. Das zeigt die Unterhalbstetigkeit.

(c) Wegen Koerzivität können wir nach Auswahlsatz im Hilbertraum annehmen, dass einer Minialfolge $\omega_k \in X$ schwach konvergiert gegen $\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM)$. nach Rellich konvergiert $\omega_k \to \omega$ stark in L^2. Es folgt:

- $\omega \in X$, also $\omega \perp_{L^2} \mathcal{H}^k(M)$
- $\mathcal{F}(\omega) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(\omega_k)$.

Also ist ω das gesuchte Minimum, und es folgt für $\varphi \in X$

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=} calF(\omega + t\varphi) = \langle \Delta_g\omega - \Lambda, \varphi\rangle.$$

Nun für $\varphi \in \mathcal{H}^k(M)$ gilt nach Voraussetzungen

$$langle\Delta_g\omega - \Lambda, \varphi\rangle = \int_M (\langle d\omega, d\varphi\rangle + \langle d_g^*\omega, d_g^*\varphi\rangle - \Lambda(\varphi) = 0.$$

Somit ist ω die gewünschte Lsüng, und somit

$$\Delta_g : X \to \text{Bild}\,\Delta_g = \{\Lambda \in W{-}1,2(\wedge^k TM \mid \Lambda_{|\mathcal{H}^k(M)}\}$$

bijektiv. Sei $\Delta_g\omega = \Lambda$, durch Testen mit ω folgt

$$\int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2)d\mu_g = \langle_g\omega, \omega\rangle \leq \|\Lambda\|\|\omega\|_{W^{1,2}}$$

und

$$\int_M \|\omega\|d\mu_g \leq \frac{1}{\lambda}\int_M (\|d\omega\|^2 + \|d_g^*\omega\|^2)d\mu_g \leq \frac{\|\Lambda\|}{\lambda}\|\omega\|_{W^{1,2}}.$$

Daraus folht

$$\|\omega\omega\|_{W^{1,2}} \leq \frac{1}{\lambda}\|\Lambda\|,$$

d.h, die Umkehrabbilding stetig ist. □

Theorem 11.12 (Hodge)**.** *Sei M kompakte Mannigfaltigkeit mit C^1-Metrik g. Die folgende Räume sind abgeschlossen in $L^2(\wedge^k TM)$:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} d &= \{d\xi \mid \xi \in W^{1,2}(\wedge^k TM)\} \\ \operatorname{Im} d_g^* &= \{d\eta \mid \eta \in W^{1,2}(\wedge^k TM)\}\end{aligned}$$

Weiter gilt die L^2-orthogonal, direkte Summe

$$L^2(\wedge^k TM) = \operatorname{Im} d \oplus \operatorname{Im} d_g^* \oplus \mathcal{H}^k(M).$$

Theorem 11.13 (L^2-Regularität)**.** *Sei M kompakte Mannigfaltigkeit mit C^1-Metrik g. Ist $\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM)$ Lösung von*

$$\Delta_g\omega = \varphi \qquad mit\ \varphi \in L^2(\wedge^k TM),$$

so gilt $\omega \in W^{2,2}(\wedge^k TM)$ und

$$\|\omega\|_{W^{2,2}} \leq C(\|\varphi\|_{L^2_g} + \|\omega\|_{L^2_g}).$$

Bemerkung 11.14. Der Raum $L^2(\wedge^k TM)$ ist Teilraum von $W^{-1,2}(\wedge^k TM)$:

$$\langle \varphi, \eta \rangle := \int_M \langle \varphi, \eta \rangle_g d\mu_g \qquad (L^2 - \text{Skalarprodukt})$$

Offenbar mit dieser Identifikation

Der Beweis der Regularität (z.B. mit Differenzquotienten) wird in der PDE-Vorlesung oder TNPDE-Vorlesung behandelt.

Beweis von Satz 11.12. Sei $\varphi \in L^2(\wedge^k TM)$ gegeben. Wähle in $\mathcal{H}^k(M)$ eine L^2-Orthonormalbasis $h_1, \cdot, h_{b_k}$ mit $b_k = \dim \mathcal{H}^k(M)$. Setze

$$h = \sum_{i=1}^{b_k} \langle \varphi, h_i \rangle h_i.$$

Es folgt $\varphi - h \perp_{L^2_g} \mathcal{H}^k(M)$. Nach Satz 11.11 existiert $\omega \in W^{1,2}(\wedge^k TM)$ mit $\omega \perp_{L^2_g} \mathcal{H}^k(M)$

$$\varphi - h = \Delta_g \omega = \delta d_g^* \omega + d_g^* d\omega \quad \text{(in schwachem Sinne)}$$

Setze $\xi := d^*\omega$ und $\eta := d\omega$. Nach Satz 11.13 ist $\omega \in W^{2,2}$ und somit $\xi, \eta \in W^{1,2}$, womit die Existenz der Zerlegung gezeigt ist. Genauer gilt

$$\|h\|_{W^{1,2}} + \|\xi\|_{W^{1,2}} + \|\eta\|_{W^{1,2}} \leq C\|\varphi\|_{L^2}.$$

Die Orthogonalität ziwschen $\operatorname{Im} d$ und $\mathcal{H}^k$, $\operatorname{Im} d_g^*$ und $\mathcal{H}^k$ ist lecht to zeigen (Übung). Wir zeigen nun die Orthogonalität ziwschen $\operatorname{Im} d$ und $\operatorname{Im} \mathrm{d}_\mathrm{g}^*$: Sei $\xi \in W^{2,2}(\wedge^{k-1} TM)$. Es gilt

$$\langle d\xi, d_\eta^* \rangle_{L^2_g} = \langle dd\xi, \eta \rangle_{L^2_g} = 0, \quad \forall \eta \in W^{1,2}(\wedge^{k+1} TM).$$

Ist $\xi \in W^{1,2}(\wedge^{k-1} TM)$, so approximiere durch $\xi_k \in W^{2,2}$ mit $\xi_k \to \xi$ in $W^{1,2}$. Die Existenz des Approximierens kann man wie in PDE-Vorlesung mit Hilfe der Glättung und der Teilung des Eins. Somit ist die Summe orthogonal, insbesondere direkt.

Nun zeigen wir die Abgeschlossenheit, mit Hilfe der Zerlegung. Sei nun z.B., $\alpha_k \in W^{1,2}(\wedge^{k-1} TM)$ mit $d\alpha_k \to \beta$ in L^2. Zerlege gann wie oben

$$d\alpha_k = d\eta_k + d_g^* \eta_k + h_k.$$

Es folgt $d_g^* \eta = 0$ unf $h_k = 0$. Also $d\xi_k = d\alpha_k$. Ferner haben wir

$$\|\xi_k\|_{W^{1,2}} \leq C\|d\alpha_k\|_{L^2} \leq C'.$$

Es folgt, nach dem Wahl einer Tielfolge, $\xi_k \top \xi$ schwach in $W^{1,2}$, $\xi_k \to \xi$ stark in L^2. Insbesondere gilt $\beta = d\xi$, also ist $\mathrm{IM}\, d$ abgeschlossen. Analog argumentiert man für $\mathrm{IM}\, d_g^*$.

□

Korollar 11.15. *Sei $\varphi \in W^{2,2}(\wedge^k TM)$ mit $d\varphi = 0$. Dann gibt es genau ein $h \in \mathcal{H}^k(M)$ mit $\varphi - h \in \operatorname{Im} d$, also einen harmonischen Repräsentanten der $W^{1,2}$-kohomogiklasse.*

Proof. Wähle wie oben $\xi \in W^{1,2}(\wedge^{k-1} TM)$, $\eta \in W^{1,2}(\wedge^{k+1} TM)$ und $h \in \mathcal{H}^k(M)$ mit

$$\varphi = h + d\xi + d_g^* \eta.$$

Durch Testen mit $d_g^* \chi$ für $\chi \in\in W^{1,2}(\wedge^k TM)$ folgt

$$0 = \langle \varphi, \delta_g^* \chi \rangle = \langle h, d_g^* \chi \rangle + \langle d\xi, d_g^* \chi \rangle + \langle d^* \eta, d_g^* \chi \rangle = \langle d^* \eta, d_g^* \chi \rangle.$$

Wir können insbesondere $\chi = \eta$ wählen und erhalten $d_g^* \eta = 0$. Somit gilt $h\varphi.h = d\xi$ wie verlangt. Zur Eindeutigkeit:

$$\varphi = h_1 + d\xi_1 = h_2 + d\xi_2$$

impliziert $h_1 = h_2$ nach Satz 11.12. □

12. Zusammenhänge, der Levi-Civita-Zussamenhang

Definition 12.1 (Zusammenhang)**.** Ein (linearer) Zusammenhang ∇ auf einer dierenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M), \quad (X, Y) \to \nabla_X Y,$$

die für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$, $c \in \mathbb{R}$ und $f \in C^\infty(M)$ erfüllt:

(i) $\nabla_{fX+Y} Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z$,
(ii) $\nabla_X(cY + Z) = c\nabla_X Y + \nabla_X Z$ und $\nabla_X(fY) = (\partial_X f)Y + f\nabla_X Y$.

Um lokal arbeiten zu können, brauchen wir folgende Aussage:

Lemma 12.2. $(\nabla_X Y)(p)$ *hdirangt nur ab von Y in einer Umgebung von p, sowie von $X(p)$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst $\nabla_X Y^1(p) = \nabla_X Y^2(p)$ falls $Y^1 = Y^2$ in einer Umgebung von p. Nach Differenzbildung reicht es zu zeigen $(\nabla_X Y)(p) = 0$, falls Y auf einer Umgebung U von p verschwindet. Sei φ eine Abschneidefunktion mit $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ und $\varphi(p) = 1$. Wir behaupten

$$\varphi(\nabla_X Y) \overset{(ii)}{=} \nabla_X(\varphi Y) - (\partial_X \varphi)Y = 0$$

woraus durch Auswerten in p die Behauptung folgt. Der erste Term von obiger Gleichung verschwindet, weil wegen $\varphi Y = 0$ auf ganz M gilt $\nabla_X(\varphi Y) = \nabla_X(0\varphi Y) = 0$, unter Benutzung von (ii). Der zweite Term verschwindet, weil die Träger von φ und Y disjunkt sind.

Nun untersuchen wir die Abhdirangigkeit von X. Wie zuvor zeigt man zuerst, dass $\nabla_X Y(p)$ nur von X in einer Umgebung von p abhängt. Dann können wir in einer Karte dieses Problem zu untersuchen. Wegen (i) reicht es, $\nabla_X Y(p) = 0$ für $X(p) = 0$ zu zeigen. Schreiben wir lokal $X = \xi^i e_i$ in U, so gilt $\xi^i(p) = 0$ für $i = 1, \cdots, n$. Daraus folgt für jedes $Y = \eta^j e_j \in \mathcal{V}(M)$

$$\nabla_X Y(p) = \nabla_{\xi^i e_i} Y(p) \overset{(i)}{=} \xi^j (\nabla_{e_i} Y)(p) = 0$$

. ☐

Wir dürfen daher $\nabla_X Y$ lokal, für eine Karte x mit Standardbasis (e_i), ausrechnen:

$$\nabla_X Y(p) = \nabla_{\xi^i e_i}(\eta^j e_j) \overset{(i)}{=} \xi^j \nabla_{e_i}(\eta^j e_j) \overset{(ii)}{=} \xi^i(\partial_{e_i}\eta^j)e_j + \xi^i \eta^j \nabla_{e_i} e_j.$$

Definition 12.3 (Christoffel-Symboles eines linearen Zusammenhang)**.** Die Christoffel-Symboles eines linearen Zusammenhang sind die für jede Karte (x, U) erklärten Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$, gegeben durch

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Bemerkung 12.4. (i) Die Christoel-Symbole Γ_{ij}^k eines Zusammenhangs sind im allgemeinen nicht symmetrisch in i, j.

(ii) Mit der Christoel-Symbole Γ_{ij}^k können wir nun die lokale Darstellung angeben:

$$\nabla_X Y(p) = \xi^i \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k \eta^j \right) e_k.$$

Also die Christoel-Symbole messen den Unterschied zwischen der Richtungsableitung der Karte und dem Zusammenhang. Erst durch die Christoel-Term wird die Formel invariant unter Koordinatenwechsel.

Definition 12.5 (Ein Vektorfeld $\widetilde{X}$ längs einer Kurve)**.** Sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve. Ein Vektorfeld $\widetilde{X}$ längs einer Kurve c ist eine dierenzierbare Abbildung

$$\widetilde{X} : I \to TM \quad \text{ mit } \widetilde{X}(t) \in T_{c(t)} M.$$

Die Menge dieser Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(c)$.

Lemma und Definition 12.6. Jede Kurve $c \in C^\infty(I, M)$ bestimmt genau eine kovariante Ableitung längs c

$$\frac{D}{dt} : \mathcal{V}(c) \to \mathcal{V}(c)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\frac{D}{dt}$ ist $\mathbb{R}$-linear und derivativ, d.h.$\frac{D}{dt}(f\widetilde{X}) = (\frac{d}{dt}f)\widetilde{X} + f\frac{D}{dt}\widetilde{X}$ für alle $f \in C^\infty(I)$.

(ii) Ist $U \subset M$ eine Umgebung von $c(t)$, und $X \to \mathcal{V}(U)$, so gilt für $\widetilde{X}(t) := X(c(t))$:

$$\frac{D}{dt}\widetilde{X}(t) = (\nabla_{c'(t)}X)(c(t)).$$

Die Schreibweise in rechts ist dadurch gerechtfertigt, dass $(\nabla_Z X)(p)$ von Z nur durch $Z(p)$ abhängt.

Proof. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Ist $\widetilde{X}(t) = \tilde{\xi}^i e_i(c(t))$ lokale Darstellung, dann muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\widetilde{X} &\overset{(i)}{=} \frac{d}{dt}\tilde{\xi}^j(t)e_j(c(t)) + \tilde{\xi}^j(t)(\nabla_{c'(t)}e_j(c(t))) \\ &\overset{(ii)}{=} (\frac{d}{dt}\tilde{\xi}^k + \gamma'^i\tilde{\xi}^j\Gamma^k_{ij} \circ c)e_k \circ c_{|t}, \end{aligned}$$

wobei ist $c'(t) = \gamma'^i(t)e_i(c(t))$. Also ist $\frac{D}{dt}$ eindeutig durch ∇ bestimmt.

Für die Existenz definieren wir $\frac{D}{dt}\widetilde{X}$ lokal durch

$$\frac{D}{dt}\widetilde{X} = (\frac{d}{dt}\tilde{\xi}^k + \gamma'^i\tilde{\xi}^j\Gamma^k_{ij} \circ c)e_k \circ c_{|t},$$

Man uberzeugt sich schnell, dass die behaupteten Eigenschaften erfüllt sind. Wegen der Eindeutigkeit hängt $\frac{D}{dt}\widetilde{X}$ aber nicht von der gewählten Karte ab. □

Definition 12.7. $\widetilde{X}$ heißt parallel längs c, wenn $\frac{D}{dt}\widetilde{X} = 0$ für alle $t \in I$.

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es ein kanonischen Zusammenhang, den Levi-Civita-Zusammenhang. Torsionsfreiheit und Vertr aglichkeit von Zusammenh angen. Es gibt viele Zusammenh

Definition 12.8. (i) Ein Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M heißt torsionsfrei oder symmetrisch, wenn seine Torsion $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ für alle $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ verschwindet.

(ii) Ein Zusammenhang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heiß t verträglich mit der Metrik, wenn er $\partial_Z g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ erfüllt.

Theorem 12.9. *Ein Zusammenhang ∇ ist genau dann verträglich mit g, wenn längs jeder Kurve für je zwei parallele Vektorfelder $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ der Wert $g(\widetilde{X}, widetildeY)$ konstant bleibt. Insbesondere haben parallele Vektorfelder also konstante Länge.*

Proof. Übung. □

Theorem 12.10 (Levi-Civita-Zusammenhang)**.** *. Auf jeder semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es genau einen Zusammenhang ∇, der torsionsfrei und mit der Metrik verträglich ist.*

Dieser Zusammenhang heißt Levi-Civita- (oder auch Riemannscher) Zusammenhang, wir nennen ihn im folgenden meist kovariante Ableitung. Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Riemannsche Metrik, und damit existiert auch stets ein Riemannscher Zusammenhang.

Proof. Nehmen wir an, ∇ existiert. Aus den Eigenschaften von ∇ gewinnen wir zuerst eine Darstellungsformel für $\nabla_X Y$. Aus der Verträglichkeitsbedingung folgern wir

$$\begin{aligned} \partial_X g(Y,Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ \partial_Y g(Z,X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ -\partial_Z g(X,Y) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Dies addieren wir unter Benutzung der Torsionsfreiheit:

$$\begin{aligned}\partial_X g(Y,Z)+\partial_Y g(Z,X)-\partial_Z g(X,Y) &= g([X,Z],Y)+g([Y,Z],X)+g(Z,\nabla_X Y+\nabla_Y X)\\ &= g([X,Z],Y)+g([Y,Z],X)+2g(Z,\nabla_X Y)-g(Z,[X,Y])\end{aligned}$$

Wir erhalten die Koszul-Formel

$$\begin{aligned}g(\nabla_X Y,Z) &= \frac{1}{2}\{\partial_X g(Y,Z)+\partial_Y g(Z,X)-\partial_Z g(X,Y)\\ &\quad +g([X,Y],Z)-g([Y,Z],X)+g([Z,X],Y]\}.\end{aligned} \tag{12.1}$$

Daraus folgt die Eindeutigkeit.

Für die Existenz definieren wir $\nabla_X Y$ durch (12.1). Wir müssen nachweisen, dass dann $\nabla_X Y$ tatsächlich ein Zusammenhang ist, der torsionsfrei und mit der Metrik verträglich ist. Den Nachweis der entsprechenden vier Eigenschaften lassen wir als Übung.

□

Ist x Karte mit Basisfeldern e_i, sowie Christoel-Symbolen $\nabla_{e_i}e_j=\Gamma_{ij}^k e_k$ so verschwinden die Lie-Klammern $[e_i,e_j]$ etc. und deshalb folgt mit $X:=e_i, Y:=e_j, Z:=e_k$ aus der Koszul-Formel die lokale Darstellung

$$g_{kl}\Gamma_{ij}^l=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij}\right) \tag{12.2}$$

oder

$$\Gamma_{ij}^l=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij}\right). \tag{12.3}$$

Beispiel 12.11. Ist ∇ der Zussamenhang zur Metrik g, so ist d $\tilde{g}=e^{2\lambda}g$

$$\tilde{\nabla}_Z Y=\nabla_Z Y+(Z\lambda)Y+(Y\lambda)Z-g(Y,Z)\operatorname{grad}_g\lambda,$$

mit

$$g(\operatorname{grad}_g\lambda,X):=X\lambda=d\lambda(X).$$

die Zussamenhang $\tilde{\nabla}$ zur Metrik

$$\tilde{g}:=e^{2\lambda}g.$$

Insbesondere ergibt sich für $\tilde{g}=\frac{4}{1+|x|^2}\delta$ die Ableitung

$$\nabla_Z Y=D_Z Y+\frac{1}{1+|x|^2}(\langle Z,x\rangle Y+\langle Y,x\rangle Z-\langle Y,Z\rangle x).$$

$\tilde{g}=\frac{4}{1+|x|^2}\delta$ ist der Metrik der Sphäre.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}2e^{2\lambda}g(X,\tilde{\nabla}_Z Y) &= 2\tilde{g}(X,\tilde{\nabla}_Z Y)\\ &= Z\cdot\tilde{g}(X,Y)+Y\cdot\tilde{g}(X,Z)X\cdot\tilde{g}(Y,Z)+\tilde{g}(Z,[X,Y])+\tilde{g}(Y,[X,Z])-\tilde{g}(X,[Y,Z])\\ &= e^{2\lambda}\{2g(X,\nabla_Z Y)+2(Z\lambda)g(X,Y)+(Y\lambda)g(X,Z)-g(X,\operatorname{grad}_g)\operatorname{lg}(Y,Z)\\ &= 2e^{2\lambda}g(X,\nabla_Z Y+(Z\lambda)Y+(Y\lambda)Z-g(Y,Z)\operatorname{grad}_g\lambda).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für die Sphäre

$$\begin{aligned}e^{2\lambda}=\frac{4}{(1+|x|^2)^2} &\quad\Rightarrow\quad \lambda=\log 2-\log(1+|x|^2)\\ &\quad\Rightarrow\quad X\lambda=\tfrac{2\langle X,x\rangle}{1+|x|^2}\\ &\quad\Rightarrow\quad \operatorname{grad}_g\lambda=\frac{2}{1+|x|^2}\end{aligned}$$

□