Beispiel 12.12. Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^2, \delta)$. In kartesischen Koordinaten x_1, x_2 sind die $g_{ij} = \delta_{ij}$ konstant. Daraus folgt: $\Gamma_{ij}^k = 0$ In diesem Fall sind einfach die Koeffizientenfunktionen zu differenzieren:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \nabla_{-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x_2}} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\
&= \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (-x^2) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (x^1) \frac{\partial}{\partial x^2} \\
&= -x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} = -r \frac{\partial}{\varphi}.
\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten (r, φ) ergibt sich:

$$(g_{ij})(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}.$$

Die Christoffel-Symbole sind dann:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(1 \cdot (0 + 0 - 0) + 0 \cdot (\cdots)) = 0.$$

Analog: $\Gamma_{11}^i = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$. Außerdem

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} \right) + 0 \cdot ... \right) = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{22} = -r.$$

Daraus folgt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma^1 22 \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma_{22}^2 = -r \frac{\partial}{\partial r}.$$

Die kovariante Ableitung längs c ist in Definition 12.6 definiert . Ist $\widetilde{X}(t) = \tilde{\xi}^i e_i(c(t)$, dann ist $\frac{D}{dt}\widetilde{X}$ lokal durch

$$\frac{D}{dt}\widetilde{X} = (\frac{d}{dt}\tilde{\xi}^k + \gamma'^i \tilde{\xi}^j \Gamma_{ij}^k \circ c) e_k \circ c_{|t},$$

wobei $c'(t) = \gamma'^i(t) e_i(c(t))$ local ist. Hierbei sind $\gamma^i = x^i(c(t))$.

Beispiel 12.13. Nochmal in der $(M,g) = (\mathbb{R}^2, \delta)$. Wir betrachten die Kreislinie $c(t) = (\cos t, \sin t)$ und ihr Geschwindigkeitfeld $\xi(t) = c'(t) = -\sin t \frac{\partial}{\partial x^1}|_{c(t)} + \cos t \frac{\partial}{\partial x^2}|_{c(t)}$.

In kartesischen Koordinaten x_1, x_2 sind die Christof-Symbole $\Gamma_{ij}^k = 0$. Die kovariante Ableitung längs c ist

$$\frac{D}{dt}\xi(t) = \frac{D}{dt}c'(t) = (\frac{d}{dt}\xi^i)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{c(t)} = -\cos t \frac{\partial}{\partial x^1}|_{c(t)} - \sin t \frac{\partial}{\partial x^2}|_{c(t)}.$$

In Polarkoordinaten (r, φ), ist die Kreslinie $c(t) = (c^1(t), c^2(t))$ mit $c^1(t) = r(t) = 1$ und $c^2(t) = \varphi(t) = t$. Ihr Geschwindigkeitfeld $\xi(t) = \frac{\partial}{\partial \varphi}|_{c(t)}$. Die drei nichtverschwindenden Christoffel-Symbole für die Polarkoordinated der euklischen Ebene lauten

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_1^{22} = -r.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt}\xi &= \dot{c}^t(t)\xi^j(t)\Gamma_{ij}^1(r(t),\varphi(t))\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{c(t)} + \dot{c}^t(t)\xi^j(t)\Gamma_{ij}^2(r(t),\varphi(t))\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_{c(t)} \\
&= \dot{(c)}^2 \xi^2(t)(-r(t))\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{c(t)} + \left(\dot{c}^1 \xi^2 \frac{1}{r} + \dot{c}^2 \xi^1 \frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_{c(t)} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot (-1) \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{c(t)} + (0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1) \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_{c(t)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{c(t)}.
\end{aligned}$$

Definition 12.14 (Parallelverschiebung)**.** Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine C^1-Kurve. Ein C^1-Vektorfeld ξ längs c heisst *parallel*, falls

$$\frac{D}{dt}\xi \equiv 0.$$

Beispiel 12.15. Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^n, \delta)$. In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} & \xi(t) = \xi^j(t)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{c(t)} \text{ ist parallel} \\ \iff \quad & \dot{\xi}^j(t) = 0 \text{ für alle } t \in I \\ \iff \quad & \text{Die } \xi^j \text{ sind konstant.} \end{aligned}$$

Beispiel 12.16. Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^2, \delta)$. In Polarkoordinaten (r,φ) gilt: Die drei nichtverschwindenden Christoffel-Symbole für die Polarkoordinated der euklischen Ebene lauten

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{22}_1 = -r.$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & \xi(t) & = & \xi^1(t)\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{c(t)} + \xi^2(t)\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_{c(t)} \text{ ist parallel} \\ \iff & 0 & = & \frac{\nabla}{dt}\xi \\ & & = & \dot{\xi}^1\frac{\partial}{\partial r} + \xi^1\nabla_{\dot{c}^1\frac{\partial}{\partial r}+\dot{c}^2\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\xi}^2\frac{\partial}{\partial\varphi} + \xi^2\nabla_{\dot{c}^1\frac{\partial}{\partial r}+\dot{c}^2\frac{\partial}{\partial\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ & & = & \dot{\xi}^1\frac{\partial}{\partial r} + \left(\dot{c}^1\cdot 0 + \dot{c}^2\frac{1}{c^1}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \dot{\xi}^2\frac{\partial}{\partial\varphi} + \xi^2\left(\dot{c}^1\frac{1}{c^1}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \dot{c}^2(-c^1)\frac{\partial}{\partial r}\right) \\ & & = & (\dot{\xi}^1 - c^2\dot{c}^2)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\dot{\xi}^2 + \frac{\dot{c}^2}{c^1} + \frac{\dot{c}^1}{c^1}\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \iff & & & \dot{\xi}^1 - c^2\dot{c}^2 = 0, \quad \dot{\xi}^2 + \frac{\dot{c}^2}{c^1} + \frac{\dot{c}^1}{c^1}\xi^2 = 0 \\ \iff & & & \begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 \\ \dot{\xi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^1\dot{c}^2 \\ -\frac{\dot{c}^2}{c^1} & -\frac{\dot{c}^1}{c^1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dies ist ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für (ξ^1, ξ^2).

Lemma 12.17. *Sei (M, g) eine Riemannsche Manngigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine C^1-Kurve, sei $t_0 \to I$. Zu $\xi(0) \to T_{c(t0)}M$ gibt es genau ein paralleles Vektorfeld ξ längs c mit $\xi(t_0) = \xi_0$.*

Proof. Sei $c(I)$ in einer Karte enthalten. Sei (x,U) eine solche Karte. Dann ist die Bedinung $\frac{\nabla}{dt}\xi = 0$ äquivalent zu

$$\dot{\xi}^k = (\Gamma^k_{ij} \circ x)\dot{c}^i \cdot \xi^j, \quad \forall k = 1, 2, \cdots, n$$

was ein lineares gewöhnlicher Differentialgleichungensystem erster Ordnung ist. Es existiert also eine eindeutige Lösung mit der Anfangsbedingung

$$(\xi^1(t_0), \cdots, \xi^n(t_0)) = (\xi^1_0, \cdots, \xi^n_0).$$

Wegen der Linearität des Systems ist die Lösung auf ganz I definiert.

Sei $c(I)$ in einer Karte enthalten. Wegen der Eindeutigkeit kann mann nach ganz I fortsetzen. □

Definition 12.18. Seien $t_0, t_1 \in I$. Die Abbildung

$$P_{c,t_0,t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M, \quad \xi_0 \to \xi(t_1)$$

heißt *Parallelverschiebung* längs c, wobei $\xi(t)$ das parallele Vektorfeld ldirangs c ist mit $\xi(t_0) = \xi_0$.

Theorem 12.19. *Für die Parallelverschiebung gilt:*

(a) $P_{c,t_0,t_1} : (T_{c(t_0)}M, g\big|_{c(t_0)}) \to (T_{c(t_1)}M, g\big|_{c(t_1)})$ ist eine lineare Isometrie.

(b) $P_{c,t_0,t_2} = P_{c,t_1,t_2} \circ P_{c,t_0,t_1}$.

Proof. (a) Übung. (b) folgt aus der Eideutigkeit lineares gewöhnlicher Differentialgleichungensystems. □

Bemerkung 12.20. Zu $\xi_0 \in T_{c(t0)}M$ ist das parallele Vektorfeld ξ mit $\xi(t_0) = \xi_0$ gegeben durch

$$\xi(t) = P_{c,t_0,t_1}(\xi_0).$$

Wir haben eine geometrischer Struktur:

$$\text{Riemannsche Metrik} \rightsquigarrow \text{kovariante Ableitung } \nabla \rightsquigarrow \text{Parallelverschiebung } P$$

Man kann ∇ aus P rekonstruieren:

Theorem 12.21. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : I \to M$ eine C^1-Kurve, sei $t_0 \in I$. Dann gilt für jedes C^1-Vektorfeld ξ längs c:*

$$\frac{D}{dt}\xi\Big|_{t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{P_{c,t,t_0}(\xi(t)) - \xi(t_0)}{t - t_0}.$$

Proof. Sei $e_1(t_0), \cdots, e_n(t_0)$ eine Basis von $T_{c(t_0)}M$. Seien $e_1(t), \cdots, e_n(t)$ die zugehörigen parallelen Vektorfelder längs c . Dann folgt aus der Proposition 12.19 (a), dass $e_1(t), \cdots, e_n(t)$ eine Basis von $T_{c(t)}M$ ist für alle $t \in I$. Schreibe $\xi(t) = \xi^j(t)e_j(t)$. Dann

$$\begin{aligned}
\frac{P_{c,t,t_0}(\xi(t)) - \xi(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\xi^j(t)P_{c,t,t_0}(e_j(t)) - \xi^j(t_0)e_j(t_0)}{t - t_0} \\
&= \frac{\xi^j(t) - \xi^j(t_0)}{t - t_0} ej(t_0) \\
&\overset{t\to t_0}{\longrightarrow} \dot{\xi}^j(t_0)e_j(t_0),
\end{aligned}$$

wobei wir $P_{c,t,t_0}(e_j(t)) = e_j(t_0)$ benutzen haben.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla}{dt}\xi\Big|_{t_0} &= = \frac{\nabla}{dt}\Big(\xi^j e_j\Big) \\
&= \dot{\xi}^j(t_0)e_j(t_0) + \xi^j(t_0)\frac{\nabla}{dt}e_j|_{t_0} \\
&= \dot{\xi}^j(t_0)e_j(t_0),
\end{aligned}$$

denn $\frac{\nabla}{dt}e_j|_{t_0} = 0$. □

Bemerkung 12.22. Ist $\psi : M \to \widetilde{M}$ eine lokale Isometrie (d.h. $\psi^*\tilde{g} = g$) und ist $c : I \to M$ eine C^1-Kurve, so setze $\tilde{c} := \psi \circ c$. Dann gilt für jedes C^1-Vektorfeld ξ längs c:

$$\xi \text{ parallel längs } c \Longleftrightarrow \tilde{\xi} := d\psi(\xi) \text{ parallel längs } \tilde{c}.$$

Insbesondere kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
T_{c(t_0)}M & \xrightarrow{P_{c,t_0,t_1}} & T_{c(t_1)}M \\
{\scriptstyle d\psi|_{c(t_0)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle d\psi|_{c(t_1)}} \\
T_{\tilde{c}(t_0)}\widetilde{M} & \xrightarrow{P_{\tilde{c},t_0,t_1}} & T_{\tilde{c}(t_1)}\widetilde{M}
\end{array}$$

Bemerkung 12.23. Im Allgemeinen ist $P_{c,t_0,t_1} \neq P_{\tilde{c},s_0,s_1}$, auch wenn $c(t_0) = \tilde{c}(s_0)$ und $c(t_1) = \tilde{c}(s_1)$.

13. Geodätische

Wir untersuchen die Geodätische noch mal.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : [a, b] \to M$ eine glatte Kurve. Ihre Energie ist definiert durch

$$E[c] := \frac{1}{2}\int_a^b g(c'(t), c'(t))dt = \frac{1}{2}\int_a^b \|c'(t)\|_g^2 dt.$$

Frage. Gibt es Kurven minimaler Energie zu vorgegebenen Endpunkten (oder allgemeiner: stationärer Energie) ?

Definition 13.1 (die Variation, das Variationsvektorfeld)**.** Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei $c : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve. Eine *Variation* von c ist eine glatte Abbildung

$$c : (\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$$

mit $c(0,t) = c(t)$ für alle $t[a,b]$. Falls $c(s,a) = c(a)$ und $c(s,b) = c(b)$ für alle $s(\varepsilon,\varepsilon)$, so heißt $c(s,t)$ Variation mit festen Endpunkten.

Das Vektorfeld $\xi(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0,t)$ heißt das *Variationsvektorfeld.* Es ist klar, dass das Variationsvektorfeld ξ einer Variation mit festen Endpunkten erfüllt:

$$\xi(a) = 0 \quad \text{und} \quad \xi(b) = 0.$$

Theorem 13.2 (Erste Variation der Energie)**.** *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve, sei $c : (\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ eine Variation dieser Kurve. Schreibe $c_s(t) = c(s,t)$. Sei ξ das Variationsvektorfeld. Dann gilt*

$$\frac{d}{ds}E[c_s]\big|_{s=0} = -\int_a^b g(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}c'(t)dt + g(\xi(b), c'(b))g(\xi(a), c'(a)).$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}E[c_s]\big|_{s=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_a^b g(c_s'(t), c_s'(t))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b \frac{d}{ds}g(c_s'(t), c_s'(t))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b 2g(\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial t}(0,t), \frac{\partial c}{\partial t})dt \\
&\overset{(*)}{=} \int_a^b g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}(0,t), \frac{\partial c}{\partial t})dt \\
&= \int_a^b g(\frac{\nabla}{\partial t}\xi, c'(t))dt \\
&= \int_a^b \big[\frac{d}{dt}g(\xi(t), c'(t)) - g(\xi, \frac{\nabla}{dt}c'(t))\big]dt \\
&= g(\xi(b), c'(b)) - g(\xi(a), c'(a)) - \int_a^b g(\xi, \frac{\nabla}{dt}c'(t))dt
\end{aligned}$$

□

Dabei folgt (*) aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs.

Lemma 13.3. *Es gilt*

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial t}(0,t) = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}(0,t).$$

Proof. Übung. □

Korollar 13.4. *Ist ξ das Variationsvektorfeld einer Variation mit festen Endpunkten, so gilt*

$$\frac{d}{ds}E[c_s]\big|_{s=0} = -\int_a^b g(\xi(t), \frac{\nabla}{dt}c'(t))dt.$$

Lemma 13.5. *Sei $c : [a,b] \to M$ eine glatte Kurve, sei ξ ein glattes Vektorfeld längs c. Dann existiert eine Variation von c mit Variationsvektorfeld ξ. Falls $\xi(a) = 0$ und $\xi(b) = 0$, so kann die Variation mit festen Endpunkten gewählt werden.*

Proof. (a) Betrachte den Fall, dass $\operatorname{supp}(\xi)$ in einer Karte (x, U) enthalten ist, das heißt $c(t) \in U$, falls $\xi \neq 0$. Schreibe $\xi(t) = \xi^j(t) = \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_{c(t)}$. Setze

$$c(s,t) := \begin{cases} x^{-1}(c^1(t), \cdots, c^n(t)) + s(\xi^1(t), \cdots, \xi^n(t)), & \text{falls } c(t) \in U \\ c(t), & \text{falls } c(t) \notin U. \end{cases}$$

Hierbei sind $c^j(t) = x^j(c(t))$ für $j = 1, \cdots, n$ die Komponenten von c unter der Karte x. Dann gilt für das zugehörige Variationsvektorfeld:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial c}{\partial s}(0,t)\right)^j &= dx^j\left(\frac{\partial c}{\partial s}(0,t)\right)\\ &= \frac{\partial(x^j \circ c)}{\partial s}(0,t)\\ &= \left.\frac{\partial(c^j(t) + s\xi^j(t))}{\partial s}\right|_{s=0}\\ &= \xi^j(t).\end{aligned}$$

(b) Im allgemeinen Fall überdecke die kompakte Menge $c([a,b])$ durch endlich viele Karten und konstruiere die Variation stückweise.

□

Notation. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien $p, q \in M$. Dann setze

$$\Omega_{p,q}(M) := \{\text{glatte Kurven } c : [a,b] \to M \text{ mit } c(a) = p \text{ und } c(b) = q\}.$$

Korollar 13.6. *Ist $c \in \Omega_{p,q}(M)$ ein kritischer Punkt des Energiefunktionals, das heißt*

$$\left.\frac{d}{ds}E[c_s]\right|_{s=0} = 0,$$

für alle Variationen c_s von c mit festen Endpunkten, dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt}c'(t) = 0$$

für alle $t \in [a,b]$.

Proof. Übung. (mit Lemma 13.5) □

Definition 13.7 (Geodätische)**.** Eine glatte Kurve c mit $\frac{\nabla}{dt}c' = 0$ heißt *Geodätische.*

Beispiel 13.8. Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^n, \delta)$. In kartesischen Koordinaten $x_1, \cdots, x_n$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{dt}c' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ddot{c}^1 = 0, \cdots, \ddot{c}^n = 0\\ &\Leftrightarrow \quad c^j(t) = p^j + tv^j\\ &\Leftrightarrow \quad c(t) = p + tv\\ &\Leftrightarrow \quad c \text{ ist eine Gerade, parametrisiert mit konstanter Geschwindigkeit.}\end{aligned}$$

Theorem 13.9 (Existenz und Eindeutigkeit von Geodätischen)**.** *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu $p \in M$ und ξT_pM existieren ein offenes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Geodätische $c : I \to M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = \xi$.*

Sind $c : I \to M$ und $\tilde{c} : \tilde{I} \to M$ zwei solche Geodätische mit $c(0) = \tilde{c}(0)$ und $c'(0) = \tilde{c}'(0)$, dann stimmen c und $\tilde{c}$ auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $I \cap \tilde{I}$ überein.

Proof. In der Karte (x,U) um p lautet die Geodätengleichung

$$\frac{\nabla}{dt}c'(t) = 0 \Longleftrightarrow \ddot{c}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{c}^i\dot{c}^j = 0, \forall k = 1, 2 \cdots, n$$

und $c^k = x^k \circ c$. Dies ist ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für $c(t)$. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf folgt die Behauptung. □

Lemma 13.10. *(1) Für Geodätische c ist $g(c', c')$ konstant.*

(2) Ist $\psi : M \to \widetilde{M}$ eine lokale Isometrie (d.h. $\varphi^*\tilde{g} = g$) und ist $c : I \to M$ ist geodätische genau dann, wenn $\tilde{c} : \psi\circ$ geodätische ist.

Definition 13.11. Sei $\psi : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Dann heißt

$$\mathrm{Fix}\,(\psi) := \{p \in M | \psi(p) = p\}$$

die Fixpunktmenge von ψ.

Proposition 13.12. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\psi \in Isom(M, g)$. Dann verläuft für $p \in\ Fix(\psi)$ und $\xi \in T_pM$ mit $d\psi\big|_p(\xi) = \xi$ die Geodätische $c : I \to M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = \xi$ ganz in $Fix(\psi)$, das heißt für alle $t \in I$ ist $c(t) \in\ Fix(\psi)$.*

Proof. Setze $\tilde{c}(t) := \psi \circ c(t)$. Da ψ eine Isometrie ist, ist $\tilde{c}$ ebenfalls eine Geodätische. Es gilt:

$$\tilde{c}(0) = \psi(c(0)) = \psi(p) = p = c(0)$$

und

$$\tilde{c}'(0) = d\psi\big|_{c(0)}(c'(0)) = d\psi\big|_p(\xi) = \xi = c'(0).$$

Der Eindeutigkeitsteil von Satz 13.9 liefert:

$$c(t) = \tilde{c}(t) = \psi(c(t)), \quad \forall t \in I$$

Das heißt: $c(t) \in \mathrm{Fix}\,(\psi)$ für alle $t \in I$. □

Beispiel 13.13. Sei $(M, g) = (\mathbb{S}^n, g_{std})$. Seien $p \in \mathbb{S}^n$, $\xi \in T_p\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. $(n = 2)$ Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der zweidimensionale Untervektorraum, der von p und ξ aufgespannt wird. Sei $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Spiegelung an E. Dann ist $A \in O(n + 1)$. $\varphi := A|_{\mathbb{S}^n} \in Isom(\mathbb{S}^n, g_{std})$. Dann gilt:

$$\mathrm{Fix}\,(A) = E \Longrightarrow \mathrm{Fix}\,(\varphi) = E \cap \mathbb{S}^n (\text{Großkreis}).$$

Mit der Proposition 13.12 folgt dann, dass $c(t) \in E \cap \mathbb{S}^n$ für alle t. Wir parametrisieren den Großkreis proportional zur Bogenlänge.

$$c(t) = p \cdot \cos(\alpha t) + \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sin(\alpha t).$$

Es müssen die Anfangsbedingungen erfüllt sein: $c(0) = p$ ist erfüllt.

$$\frac{d}{dt}c(0) = \frac{\xi}{|\xi|}\alpha \Longrightarrow \alpha = |\xi|.$$

Dann erhalten wir: $\frac{d}{dt}c(0) = \xi$, das heißt $c'(0) = \xi$. Daraus folgt:

$$c(t) = p \cdot \cos(|\xi|t) + \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sin(|\xi|t).$$

Bemerkung 13.14. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Zu $\xi \in T_pM$ sei c_ξ die Geodätische mit $c_\xi(0) = p$ und $c'_\xi(0) = \xi$.

Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ setze $\tilde{c}(t) := c_\xi(\alpha t)$. Dann ist $\tilde{c}$ ebenfalls eine Geodätische mit $\tilde{c}(0) = c(0) = p$ und $\tilde{c}'(0) = \alpha\xi$. Deshalb gilt: $\tilde{c} = c_{\alpha\xi}$. Insbesondere, $c_\xi(\alpha) = c_{\alpha\xi}(1)$. (Übung)

Definition 13.15 (Riemannsche Exponentialabbildung)**.** Zu $\xi \in T_pM$ setze $\exp_p(\xi) := c(1)$, falls der maximale Definitionsbereich von c die 1 enthält. Setze ferner

$$D_p := \{\xi \in T_pM | 1 \text{ ist im maximalen Definitionsbereich von } c\}.$$

Dann heißt $\exp_p : D_p \to M$ *Riemannsche Exponentialabbildung* (im Punkt p).

Bemerkung 13.16. . (1) $\exp_p(t\xi) = c_{t\xi}(1) = c_\xi(t)$. Daraus folgt, dass $t \mapsto \exp_p(t\xi)$ die Geodätische ist mit den Anfangswerten p und ξ.

(2) $\exp_p(0) = p$.

(3) D_p ist sternförmig bezüglich 0, denn: Sei $\xi \in D_p$. Sei $0 \leq \alpha \leq 1$. Dann ist c_ξ auf $[0, 1]$ definiert und gilt $c\alpha\xi(t) = c_\xi(\alpha t)$. Daraus folgt $c_{\alpha\xi}$ ist auf $[0, \frac{1}{\alpha}] \supset [0, 1]$ definiert, da $\alpha \leq 1$. Also $\alpha\xi \in D_p$.

(4) Setze $D := \cup_{p \in M} D_p \subset T_M$ und $\exp : D \to M$, $\exp(\xi) := \exp_{\pi(\xi}(\xi)$. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt, dass D offen und exp eine glatte Abbildung ist. Insbesondere ist $D_p = D \cap T_pM$ offen in T_pM.

Beispiel 13.17. (1) Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^n, \delta)$. Dann gilt:

$$\exp_p(\xi) = p + 1 \cdot \xi = p + \xi \quad \text{ mit } D_p = T_p\mathbb{R}^n.$$

(2) Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^2 - \{0\}, \delta)$. Dann: $D_p = T_pM - \{-t \cdot p | t \geq 1\}$.
(3) Sei $(M,g) = (\mathbb{S}^n, g_{std})$. Dann:

$$\exp_p(\xi) = p \cdot \cos(\|\xi\|) + \frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot \sin(\|\xi\|), \quad D_p = T_pM.$$

Lemma 13.18. *Das Differential der Abbildung* $\exp_p : D_p \to M$ *im Punkt* 0 *ist gegeben durch den kanonischen Isomorphismus*

$$d\exp_p\big|_0 = id : T_0D_p = T_0T_pM \to T_pM.$$

Proof. Sei $\xi \in T_pM$. Dann gilt:

$$d\exp_p\big|_0(\xi) = d\exp_p\big|_0(\frac{d}{dt}(t\xi)\big|_{t=0}) = \frac{d}{dt}\exp_p(t\xi)\big|_{t=0} = \xi,$$

denn $c(t) = \exp_p(t\xi)$ ist die Geodätische mit $c'(0) = \xi$. □

Korollar 13.19. *Zu* $p \in M$ *existiert eine offene Umgebung* $V'_p \subset D_p \subset T_pM$ *von 0, so dass*

$$\exp_p\big|_{V'_p} : V'_p \to \exp_p(V'_p) =: U_p$$

ein Diffeomorphismus ist.

Proof. Die Aussage folgt aus Lemma 13.18 ($d\exp_p\big|_0$ ist invertierbar) und dem Umkehrsatz. □

Bemerkung 13.20. Im Allgemeinen ist $\exp_p : D_p \to \exp_p(D_p) \subset M$ kein Diffeomorphismus, denn $d\exp_p\big|_{xi}$ ist im Allgemeinen nicht invertierbar.

Wir konstruieren nun gut an die Geometrie angepasste Koordinaten und wählen dazu eine verallgemeinerte Orthonormalbasis $E_1, \cdots, E_n$ von T_pM bezüglich $g\big|_p$, das heißt

$$g\big|_p(E_i, E_j) = \delta_{ij}.$$

Wir erhalten einen linearen Isomorphismus $A : \mathbb{R}^n \to T_pM$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$.

$$\begin{tikzcd}
T_pM \supset V'_p \arrow[r, "\exp_p", "\approx"'] & U_p \subset M \\
\mathbb{R}^n \supset V_p \arrow[u, "A", "\cong"'] \arrow[ur, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $V_p := A^{-1}(V'_p)$, also: $\exp_p \circ A : V_p \to U_p$ ist ein Diffeomorphismus. Setze $x := (\exp_p \circ A)^{-1}$. Dann ist $x : U_p \to V_p$ eine Karte.

Definition 13.21 (Riemannschen Normalkoordinaten)**.** Die so erhaltenen Koordinaten nennt man die Riemannschen Normalkoordinaten um den Punkt p.

Inwiefern sind diese Koordinaten gut an die Geometrie angepasst?

Proposition 13.22. *Seien* $g_{ij} : V_p \to \mathbb{R}$ *und* $\Gamma_{ij}^k : V_p \to \mathbb{R}$ *die zu den Riemannschen Normalkoordinaten* x *um* p *gehörigen* g_{ij} *bzw. Christoffel-Symbole. Dann gilt:*

$$x(p) = 0, \quad g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \Gamma_{ij}^k(0) = 0.$$

Proof. (a) $x(p) = A^{-1}(\exp_p^{-1}(p)) = A^{-1}(0) = 0$.

(b) Seien $e_1, \cdots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann

$$\begin{aligned} g_{ij}(0) &= g\big|_p(dx^{-1}\big|_0(e_i), dx^{-1}\big|_0(ej)) \\ &= g\big|_p(d(\exp_p \circ A)\big|_0(e_i), d(\exp_p \circ A)\big|_0(e_i)) \\ &= g\big|_p(d\exp_p\big|_0(E_i), d\exp_p\big|_0(E_j)) \\ &\overset{\text{Lemma 13.18}}{=} g\big|_p(E_i, E_j) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

(c) Sei $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $c(t) = x^{-1}(tv) = \exp_p(tAv)$ eine Geodätische mit $c(0) = p$ und $c'(0) = Av$. In Riemannschen Normalkoordinaten lautet die Geodätengleichung für diese Geodätische

$$0 = \ddot{c}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(c^1(t), \cdots, c^n(t)) \cdot \dot{c}^i(t) \cdot \dot{c}^j(t).$$

Hierbei ist $c^k(t) = x^k(c(t)) = tv^k$, $\dot{c}^k(t) = v^k$ und $\ddot{c}^k(t) = 0$. Für $t = 0$ ergibt sich

$$0 = 0 + \Gamma_{ij}^k(0, \cdots, 0) \cdot v^i \cdot v^j.$$

Dann ist β^k, definiert durch $\beta^k(y,z) := \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(0) y^i z^j$, eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, denn:

$$\beta^k(z,y) = \Gamma_{ij}^k(0) z^i y^j = \Gamma_{ji}^k(0) z^j y^i = \Gamma_{ij}^k(0) z^j y^i = \Gamma_{ij}^k(0) y^i z^j.$$

Daher gilt $\beta^k(v,v) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und daher $\beta^k(y,z) = 0$ für alle $y, z \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt:

$$\Gamma_{ij}^k(0) = 0 \quad \text{für alle } i, j, k.$$

□

Korollar 13.23. *In Riemannschen Normalkoordinaten gilt für die Taylorentwicklung um* 0 *von* $g_{i,j} : V_p \to \mathbb{R}$:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(\|x\|^2).$$

Proof.

$$g_{ij}(x) = g_{ij}(0) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) \cdot x^k + O(\|x\|^2)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = \Gamma_{ki}^l(0) g_{lj}(0) + \Gamma_{kj}^l(0) g_{il}(0) = 0$$

□