14. Krümmung

Definition 14.1 (zweite kovariante Ableitung)**.** Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Seien $\xi \in T_pM$ und $\eta, \psi \in \mathcal{V}(M)$. Dann ist $\nabla_\eta \psi \in \mathcal{V}(M)$ und

$$\nabla^2_{\xi,\eta}\psi := \nabla_\xi \nabla_\eta \psi - \nabla_{\nabla_\xi \eta}\psi \in T_pM$$

heißt zweite kovariante Ableitung von ψ in Richtungen ξ und η.

Lemma 14.2. *Die zweite kovariante Ableitung $\nabla^2_{\xi,\eta}\psi$ hängt von η nur vermöge $\eta|_p$ ab, das heißt, sind $\eta, \tilde{\eta} \in \mathcal{V}(M)$ mit $\eta|_p = \tilde{\eta}|_p$, dann gilt:*

$$\nabla^2_{\xi,\eta}\psi = \nabla^2_{\xi,\tilde{\eta}}\psi.$$

Proof. Wir wählen um p Riemannsche Normalkoordinaten x und schreiben in diesen Koordinaten die Vektorfelder lokal als:

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \quad \eta = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \psi = \psi^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Da die Christoffel-Symbole in 0 alle verschwinden erhalten wir:

$$\nabla_\xi \eta = \nabla_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}}\big(\eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big) = \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p + 0$$

und

$$\begin{aligned}\nabla_{\nabla_\xi \eta}\psi &= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p}\big(\psi^k \frac{\partial}{\partial x^k}\big) \\ &= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j}(0) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p.\end{aligned}$$

Und ebenso:

$$\nabla_\eta \psi = \nabla_{\eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}}\big(\psi^k \frac{\partial}{\partial x^k}\big) = \eta^j \big(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} + \psi^k \Gamma^m_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m}\big)$$

und

$$\begin{aligned}\nabla_\xi \nabla_\eta \psi &= \nabla_{\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}}\big(\eta^j \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} + \eta^j \psi^k \Gamma^m_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m}\big) \\ &= \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}(0) \frac{\psi^k}{\partial x^j}(0) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p + \xi^i \eta^j(0) \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial x^j \partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p \\ &\quad + \xi^i \eta^j(0) \psi^k(0) \frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p,\end{aligned}$$

womit dann folgt:

$$\Rightarrow \nabla^2_{\xi,\eta}\psi = \big(\xi^i \eta^j(0) \frac{\partial^2 \psi^k}{\partial x^j \partial x^i}(0) + \xi^i \eta^j(0) \psi^m(0) \frac{\partial \Gamma^k_{jm}}{\partial x^i}(0)\big) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p,$$

Die Abhängigkeit von η dieses Ausdruckes beschränkt sich auf die Werte $\eta^j(0)$, also auf $\eta|_p$. $\square$

Folgerung 14.3. *Der Ausdruck $\nabla^2_{\xi,\eta}\psi$ist wohldefiniert für $\xi, \eta \in T_pM$ und $\psi \in \mathcal{V}(U)$, eine Umgebung U vom p.*

Lemma 14.4. *Für $\xi, \eta \in T_pM$ und $\psi \in \mathcal{V}(M)$ hängt*

$$R(\xi,\eta)\psi := \nabla^2_{\xi,\eta}\psi - \nabla^2_{\eta,\xi,}\psi$$

nur von ψ vermöge $\psi\big|_p$ ab. Das heißt $R(\xi,\eta)\psi \in T_pM$ ist für $\xi, \eta, \psi \in T_pM$ wohldefiniert.

Proof. Wieder gilt in Riemannschen Normalkoordinaten um p:

$$\nabla^2_{\eta,\xi}\psi = \big(\xi^j(0)\eta^i(0)\frac{\partial^2\psi^k}{\partial x^j\partial x^i}(0) + \xi^j\eta^i(0)\psi^m(0)\frac{\partial\Gamma^k_{jm}}{\partial x^i}(0)\big)\frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} R(\xi,\eta)\psi &= (\xi^i(0)\eta^j(0)-\xi^j(0)\eta^i(0))\big(\frac{\partial^2\psi^k}{\partial x^j\partial x^i}(0)+\frac{\partial\Gamma^k_{jm}}{\partial x^i}(0)\big)\frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p, \\ &= \xi^i(0)\eta^j(0)\big(\frac{\partial^2\psi^k}{\partial x^j\partial x^i}(0)-\frac{\partial^2\psi^k}{\partial x^i\partial x^j}(0)+\frac{\partial\Gamma^k_{jm}}{\partial x^i}(0)-\frac{\partial\Gamma^k_{im}}{\partial x^j}(0)\big)\frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p \\ &= \xi^i(0)\eta^j(0)\big(\frac{\partial\Gamma^k_{jm}}{\partial x^i}(0)-\frac{\partial\Gamma^k_{im}}{\partial x^j}(0)\big)\frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p \end{aligned}$$

□

Definition 14.5 (Riemannscher Krümmungstensor)**.** Die Abbildung

$$R : T_pM\times T_pM\times T_pM \;\to\; T_pM(\xi,\eta,\psi)\mapsto R(\xi,\eta)\psi$$

heißt *Riemannscher Krümmungstensor* im Punkt p.

Darstellung in lokalen Koordinaten: Sei (x,U) eine Karte von M. Dann wird R auf U festgelegt durch glatte Funktionen $R^l_{kij}: x(U)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass in Riemannschen Normalkoordinaten gilt:

$$R^l_{kij}(0) = \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}(0)-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}(0).$$

Man kann nachrechnen (das ist nicht schwer, dafür aber etwas mühsam), dass in beliebigen Koordinaten gilt:

$$R^l_{kij}(0) = \frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}(0)-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}(0)+(\Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi}-\Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj}).$$

Proposition 14.6 (Symmetrien des Krümmungstensors)**.** *Sei* (M,g) *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei* $p\in M$*, seien* $\xi,\eta,\xi,\chi\in T_pM$ *Dann gelten:*
(1) $R: T_pM\times T_pM\times T_pM\to T_pM$ *ist trilinear,*
(2) $R(\xi,\eta)\psi = -R(\eta,\xi)\psi$*,*
(3) $g_p(R(\xi,\eta)\psi,\chi) = -g_p(R(\xi,\eta)\chi,\psi)$*,*
(4) Erste Bianchi-Identität.

$$R(\xi,\eta)\psi + R(\eta,\psi)\xi + R(\psi,\xi)\eta = 0$$

(5) $g_p(R(\xi,\eta)\psi,\chi) = g_p(R(\psi,\chi)\xi,\eta)$*.*

Proof. Wir geben nur den Beweis von (3) und zwar berechnen dies in Riemannschen Normalkoordinaten um p für

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \eta = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p, \psi = \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p, \chi = \frac{\partial}{\partial x^l}\Big|_p.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g_p(R(\xi,\eta)\psi,\chi) &= g_p\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_p,\frac{\partial}{\partial x^l}\Big|_p\right) \\ &= g_p\left(R\left(R^m_{kij}(0)\frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p,\frac{\partial}{\partial x^l}\Big|_p\right)\right. \\ &= R^m_{kij}g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p,\frac{\partial}{\partial x^l}\Big|_p\right) \\ &= g_{ml}(0)R^m_{kij}. \end{aligned}$$

Im Folgenden verwenden wir die einsteinsche Summenkonvention sowie die abkürzenden Schreibweisen

$$f_{,k} := \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad \text{und} \quad f_{,kl} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l}$$

für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen.

In beliebigen Koordinaten (und damit auch in Riemannschen Normalkoordinaten für $x \neq 0$) gilt:

$$g_{ij,k} = g_{mj}\Gamma^m_{ki} + g_{mi}\Gamma^m_{kj}.$$

Es folgt, in Riemannschen Normalkoordinaten,

$$g_{ij,kl}(0) = g_{mj}(0)\Gamma^m_{ki,l} + g_{mi}(0)\Gamma^m_{kj,l}.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= g_{ij,kl}(0) - g_{ij,lk}(0) \\ &= g_{mj}(0)\Gamma^m_{ki,l} + g_{mi}(0)\Gamma^m_{kj,l} - g_{mj}(0)\Gamma^m_{li,k} - g_{mi}(0)\Gamma^m_{lj,k} \\ &= g_{mj}(0)R^m_{ilk}(0) + g_{mi}(0)R^m_{jlk}(0) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{pmatrix} l \to i \\ k \to j \\ i \to k \\ j \to l \end{pmatrix}$$

folgt es

$$0 = g_{ml}(0)R^m_{kij}(0) + g_{mk}(0)R^m_{lij}(0).$$

Daraus haben wir

$$g_{ml}(0)R^m_{kij}(0) = -g_{mk}(0)R^m_{lij}(0),$$

die Behauptung für diese ξ, η, ψ, χ.

Mit der Multilinearität folgt die Behauptung für alle ξ, η, ψ, χ.

□

Beispiel 14.7. Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \delta)$. In kartesischen Koordinaten gilt $\Gamma^k_{ij} = 0$. Daraus folgt:

$$R^l_{kil} = 0$$

oder

$$R \equiv 0.$$

Definition 14.8. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $R \equiv 0$ heißt *flach*.

Warnung! In der Literatur existieren zwei verschiedene Vorzeichenkonventionen für R.

Lemma 14.9. *Seien (M, g) und $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten, sei $f : M \to \widetilde{M}$ eine lokale Isometrie. Sei $p \in M$. Dann gilt für den Krümmungstensor R von M in p und den Krümmungstensor $\widetilde{R}$ von $\widetilde{M}$ in $f(p)$:*

$$df_p(R(\xi, \eta)\psi) = \widetilde{R}(df_p(\xi), df_p(\eta))df_p(\psi)$$

für alle $\xi, \eta, \psi \in T_pM$.

Proof. Sei (x, U) eine Karte von M mit $p \in U$. Dann ist $(\tilde{x} := x \circ f^{-1}, \widetilde{U} := f(U))$ eine Karte von $\widetilde{M}$, wobei $\widetilde{U}$ und U eventuell verkleinert wurde (so dass $f : U \to \widetilde{U}$ ein Diffeomorphismus ist). Da f eine lokale Isometrie ist, folgt, dass $g_{ij} = \tilde{g}_{ij} : x(U) \to \mathbb{R}$, wobei die g_{ij} die Komponenten von g bezüglich x und $\tilde{g}_{ij}$ die Komponenten von $\tilde{g}$ bezüglich $\tilde{x}$ sind. (Es sit klar dass $x(U) = \tilde{x}(\widetilde{U})$.) Damit sind die entsprechenden Christoffel-Symbole gleich:

$$\Gamma^k_{ij} = \widetilde{\Gamma}^k_{ij}$$

und damit sind es auch die Komponenten der Krümmungstensoren:

$$R^l_{kij} = \widetilde{R}^l_{kij}.$$

□

Bemerkung 14.10. Verschwindet der Krümmungstensor $R : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ im Punkt p, i.A., nicht, dann gibt es keine Karte um p, für die $\Gamma^k_{ij} = 0$.

Alternativ kann man den Krümmungstensor auch definieren als eine multilineare Abbildung

$$R : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, R(\xi, \eta, \psi, \chi) = g(R(\xi, \eta)\psi, \chi).$$

In lokalen Koordinaten setze für eine Karte (x, U) um p

$$R_{ijkl} : x(U) \to \mathbb{R}, \quad R_{ijkl}(x(p)) := R\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\big).$$

Dann gilt

$$R_{ijkl} = g_{ml} R^m_{kij}.$$

(Übung)

Proposition 14.11. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. In Riemannschen Normalkoordinaten gilt dann:*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{ikjl}(0) x^k x^l + O(\|x\|^3).$$

Proof. Wir wissen bereits

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(\|x\|^2)$$

(Korollar 13.23). Wir haben

$$g_{ij,k} = \Gamma^m_{ki} g_{mj} + \Gamma^m_{kj} g_{mi}$$

Diese Gleichung differenzieren wir nach x^l, werten in 0 aus und benutzen, dass die Christoffelsymbole in 0 verschwinden:

$$g_{ij,kl}(0) = \Gamma^m_{ki,l}(0) \cdot g_{mj}(0) + \Gamma^m_{kj,l}(0) \cdot g_{mi}(0). \tag{14.1}$$

Wir behaupten:

$$\Gamma^k_{ij,l}(0) + \Gamma^k_{jl,i}(0) + \Gamma^k_{li,j}(0) = 0. \tag{14.2}$$

In Normalkoordinaten ergeben die Geraden $t \mapsto t \cdot x$ durch 0 Geodätische. Die Geodätengleichung lautet dann :

$$0 = \Gamma^k_{ij}(t \cdot x) x^i x^j.$$

Wir differenzieren das nach t und werten in $t = 0$ aus:

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Gamma^k_{ij}(t \cdot x) x^i x^j = \Gamma^k_{ij,l}(0) x^l x^i x^j.$$

Damit haben wir für jedes k ein Polynom 3. Grades in x , nämlich $P^k(x) := \Gamma^k_{ij,l}(0) x^i x^j x^l$, das identisch verschwindet. Also muss für jedes Monom $x^\alpha x^\beta x^\gamma$ die Summe der Koeffizienten $\Gamma^k_{ij,l}(0)$ mit $x^i x^j x^l = x^\alpha x^\beta x^\gamma$ verschwinden. Dies und die Symmetrie der Christoffelsymbole in den beiden unteren Indizes liefern die Behauptung.

Mit $R^l_{kij}(0) = \Gamma^l_{jk,i}(0) - \Gamma^l_{ik,j}(0)$ folgt:

$$\begin{aligned} R_{klij}(0) &= (\Gamma^m_{jk,i}(0) - \Gamma^m_{ik,j}(0)) g_{ml}(0) \\ &\overset{Behauptung}{=} -(\Gamma^m_{ij,k}(0) + \Gamma^m_{ki,j}(0) + \Gamma^m_{ik,j}(0)) g_{ml}(0) \\ 732 Das Yamabe-Problem &= -(\Gamma^m_{ij,k}(0) + 2\Gamma^m_{ki,j}(0)) g_{ml}(0). \end{aligned} \tag{14.3}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
2R_{ikjl}(0)x^kx^l &= (-R_{kijl}(0) - R_{ljik}(0))x^kx^l \quad \text{(Prop. 14.6)} \\
&\overset{(14.3)}{=} (\Gamma^m_{jl,k} + 2\Gamma^m_{kj,l}(0))g_{mi}x^kx^l + (\Gamma^m_{ik,l}(0) + 2\Gamma^m_{li,k}(0))g_{mj}(0)x^kx^l \\
&\overset{(*)}{=} (\Gamma^m_{jl,k} + 2\Gamma^m_{kj,l}(0))g_{mi}x^kx^l + \Gamma^m_{il,x}(0) + 2\Gamma^m_{ki,l}(0))g_{mj}(0)x^kx^l \\
&\overset{(14.1)}{=} (g_{ij,lk}(0) + 2g_{ij,kl}(0)) \cdot x^kx \\
&= 3g_{ij,kl}(0) \cdot x^kx^l.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der mit $(*)$ gekennzeichneten Umformung in der unteren Zeile den Summationsparameter k in l umbenannt und umgekehrt. Dies ergibt für den Term 2. Ordnung in der Taylorentwicklung

$$\frac{1}{2}g_{ij,kl}(0)x^kx^l = \frac{1}{3}R_{ikjl}(0) \cdot x^kx^l.$$

□

Lemma 14.12. *Sei V endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit positiv-definiter symmetrischer Bilinearform $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei $R : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ multilinear mit*

$$R(\xi, \eta, \psi, \chi) = -R(\eta, \xi, \psi, \chi) = -R(\xi, \eta, \chi, \psi)$$

für alle $\xi, \eta, \psi, \chi \in V$. Dann hängt für $E \in G_2(V, g)$ der Ausdruck

$$K(E) := \frac{R(\xi, \eta, \eta, \xi)}{\langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^2}$$

nicht von der Wahl der Basis $\eta, \xi \in E$ von E ab, sondern nur von E selbst.

Proof. Übung. □

Setze

$$G_k(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) := \{k - \text{dimensionale Untervektorräume von } V\}$$

und

$$G_2(M, g) = \cup_{p \in M} G_2(T_pM, g_p).$$

Definition 14.13 (Schnittkrümmung)**.** Die Funktion $K : G_2(M, g) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$K(E) := \frac{R(\xi, \eta, \eta, \xi)}{\langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^2},$$

wobei ξ, η eine Basis von E bildet, heißt *Schnittkrümmung* von (M, g). Hierbei ist R der Riemannsche Krümmungstensor.

Bemerkung 14.14. Die Schnittkrümmung ist nur für Mannigfaltigkeiten mit der Dimension gröer gleich 2 erklärt.

Definition 14.15 (Gauß-Krümmung)**.** Ist (M, g) eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, so heißt

$$K : M \to R, K(p) := K(T_pM)$$

die *Gauß-Krümmung* von M.

Wir Setzen

$$Q(\xi, \eta) := \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^2.$$

Lemma 14.16. *Die Schnittkrümmung bestimmt den Riemannschen Krümmungstensor. Es gilt nämlich*

$$\begin{aligned}6R(\xi,\eta,\psi,\chi) \;&=\; K(\xi+\chi,\eta+\psi)Q(\xi+\chi,\eta+\psi)-K(\eta+\chi,\xi+\psi)Q(\eta+\chi,\xi+\psi)\\&\quad -K(\xi,\eta+\psi)Q(\xi,\eta+\psi)K(\eta,\xi+\chi)Q(\eta,\xi+\chi)\\&\quad -K(\psi,\xi+\chi)Q(\psi,\xi+\chi)-K(\chi,\eta+\psi)Q(\chi,\eta+\psi)\\&\quad +K(\xi,\eta+\chi)Q(\xi,\eta+\chi)+K(\eta,\psi+\xi)Q(\eta,\psi+\xi)\\&\quad +K(\psi,\eta+\chi)Q(\psi,\eta+\chi)+K(\chi,\xi+\psi)Q(\chi,\xi+\psi)\\&\quad +K(\xi,\psi)Q(\xi,\psi)+K(\eta,\chi)Q(\eta,\chi)-K(\xi,,\chi)Q(\xi,\chi)-K(\eta,\psi)Q(\eta,\psi)\end{aligned}$$

für alle $\xi,\eta,\psi,\chi\in T_pM$, für die die entsprechenden Schnittkrümmungen definiert sind.

Proof. Übung. □

Die Menge der Quadrupel (ξ,η,ψ,χ) , die dies erfüllen, ist offen und dicht in $T_pM\times T_pM\times T_pM\times TpM$ Wegen der Stetigkeit legt dies R auf $T_pM\times T_pM\times T_pM\times TpM$ fest.

Theorem 14.17 (Schur)**.** *Sei $n>0$. Hängt $K(E)$, $E\in T_pM$, nur ab von p, d.h,*

$$R(\xi,\eta,\psi,\chi)=K(p)(\langle\eta,\psi\rangle\langle\xi,\chi\rangle-\langle\xi,\psi\rangle\langle\eta,\chi\rangle,$$

dann gilt

$$K(p)=const.$$

Solche Metrik heißt eine Metrik mit konstanter Krümmeng.

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p\in M$. Der Riemannsche Krümmungstensor an der Stelle $p\in M$ ist eine multilineare Abbildung $R:T_M\times T_pM\times T_pM\to T_pM$.

Für feste $\xi,\eta\in T_pM$ erhalten wir die lineare Abbildung

$$R(\xi,\cdot)\eta:T_pM\to T_pM,\quad \psi\mapsto R(\xi,\psi)\eta.$$

Definition 14.18. Die Abbildung

$$\mathrm{ric}\,:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R},\quad \mathrm{ric}\,(\xi,\eta):=\mathrm{Spur}\,(R(\xi,\cdot)\eta)=\mathrm{Spur}\,(R(\cdot,\xi)\eta)$$

heißt *Ricci-Krümmung* (an der Stelle p von der Metrik g) .

Bemerkung 14.19. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit positiv definiter symmetrischer Bilinearform g, seien $E_1,\cdots,E_n$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von (V,g), das heit $g(E_i,E_j)=\delta_{ij}$ Dann gilt für jeden Endomorphismus $A:VV$, dass

$$\mathrm{Spur}\,(A)=g(A(E_i),E_i).$$

In lokalen Koordinaten: Für eine Karte (x,U) von M setze

$$\mathrm{ric}_{\,ij}:T_pM\to\mathbb{R},\quad \mathrm{ric}_{\,ij}(x(p)):=\mathrm{ric}\,\big(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\big)$$

Lemma 14.20 (Eigenschaften der Ricci-Krümmung)**.** *(1) Die Abbildung* ric *ist bilinear und symmetrisch auf T_pM.*

(2) Für eine verallgemeinerte Orthonormalbasis $E_1,\cdots,E_n$ von $(T_pM,g|_p)$ gilt:

$$\mathrm{ric}\,(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^n g(R(\xi,E_i)E_i,\eta).$$

(3) Es gilt: $\mathrm{ric}_{\,ij}=\sum_{k=1}^n R^k_{ikj}$.

Proof. Übung. □

Lemma 14.21. *Die Ricci-Krümmung lässt sich durch Mittelung aus der Schnittkrümmung berechnen. Genauer: Ist $\xi\in T_pM$ mit $\xi\neq 0$ und ist $E_2,\cdot,E_n$ eine verallgemeinerte Orthonormalbasis von $\xi^\perp\subset T_pM$, dann*

$$ric(\xi,\xi)=g(\xi,\xi)\sum_{j=2}^n K(\mathrm{Span}\,\{\xi,E_j\}).$$

Die Abbildung ric $: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ist bilinear und symmetrisch. Es existiert genau ein EndomorphismusRic $: T_pM \to T_pM$, so dass

$$\mathrm{ric}\,(\xi, \eta) = g_p(\mathrm{Ric}(\xi), \eta)$$

für alle $\xi, \eta \in T_pM$.

In lokalen Koordinaten: Für eine Karte (x, U) erhält man Funktionen $Ric_i^j : x(U) \to \mathbb{R}$ durch:

$$\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\right) = \mathrm{Ric}^j(x(p))_i \frac{\partial}{\partial x^j}|_p.$$

Dabei gilt:

$$\mathrm{ric}_{\,ij} = Ric_i^k g_{kj}.$$

(Übung)

Definition 14.22 (Einstein-Metrik)**.** Eine Riemannsche Metrik g heißt *Einstein-Metrik*, falls gilt

$$\mathrm{ric}\,(\xi, \eta) = \lambda g(\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta \in T_pM, \forall p \in M,$$

mit λ konstant.

Definition 14.23 (Skalarkrümmung)**.** Die Abbildung

$$\mathrm{scal}\,(p) := \mathrm{Spur}\,(\mathrm{ric}\,)$$

heißt Skalarkrümmung im Punkt p M.

Lemma 14.24. *(1) In lokalen Koordinaten gilt*

$$\mathrm{scal}(p) = \mathrm{Ric}_i^i(x(p)).$$

(2) Für eine verallgemeinerte Orthonormalbasis $E_1, \cdots, E_n$ von $(T_pM, g|_p)$ gilt:

$$\mathrm{scal}(p) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ric}\,(E_i, E_i).$$

Spezialfall. $\dim M = 2$.

Sei K die Gaußkrümmung (das heißt $K(p) = K(T_pM)$), dann ist der Krümmungstensor gegeben durch

$$R(\xi, \eta, \psi, \chi) = K(p)(g(\eta, \psi)g(\xi, \chi) - g(\xi, \psi)g(\eta, \chi)).$$

Daraus folgt für die Ricci-Krümmung

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}\,(\xi, \eta &= \sum_{i=1}^{2} R(\xi, E_i, E_i\eta) \\
&= K(p)\sum_{i=1}^{2}(g(E_i, E_i)g)(\xi, \eta) - g(\xi, E_i)g(\eta, E_i) \\
&= K(p)(2g(\xi, \eta) - g(\xi, \eta) = K(p)g(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Also

$$\mathrm{ric}\, = K \cdot g$$

und

$$\mathrm{scal} = 2K.$$