15. Das Yamabe-Problem

Das Yamabe-Problem ist: In einer Konformen Klasse der Metrik exisiert es eine Metrik mit konstanter Sklarkrümmung?

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion f auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist das Vektorfeld grad f mit $g(\operatorname{grad} f(p), X) = df(X) = \partial_X f = \nabla_X f$ für alle XT_pM und alle $p \in M$. Das Laplace-Operator auf Funktionen ist definiert durch $\Delta_g = dd^* + d^*d = d^*d$.

In lokalen Koordinaten sind

$$\operatorname{grad} f = g_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}$$

und

$$\Delta_g f = d_g^* du = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial f}{\partial x^j})$$

Man bezechnet das Differential df einer Funktion f auch mit $\nabla_g f = \nabla f$ (kein gutes Zeichen, aber Ana). Aus $\nabla f \in \mathcal{V}(T^*M)$ definieren wir $\nabla f \otimes \nabla f \in \mathcal{V}(T^*M \otimes T^*M)$ durch

$$\nabla f \otimes \nabla f(X, Y) = \nabla f(X) \cdot \nabla f(Y), \quad \forall X, Y \in T_pM, p \in M.$$

Die Hesse-Matrix $\nabla^2 f \in \mathcal{V}(T^*M \otimes T^*M)$ ist definiert durch

$$\nabla^2 f(X, Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y) \quad \forall X, Y \in T_pM, p \in M.$$

Man kann zeigen, dass die Hesse-Matrik $\nabla^2 f$ symmetrisch ist, d.h.,

$$\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X) \quad \forall X, Y \in T_pM, p \in M.$$

(Übung)

Definition 15.1 (konforme Klasse)**.** Sei (M,g) Riemannsche Manigfaltigkeit. Die Konforme Klasse von g ist durch

$$[g] := \{\tilde{g} \,|\, \tilde{g} = e^{2u} g, u \in C^\infty(M)\}$$

Definition 15.2 (Das Kulkarni-Nomizu-Produkt)**.** Seien h und k zwei symmetrische Bilinearformen auf einem Vektorraum V. Das *Kulkarni-Nomizu-Produkt* $h \owedge k$ ist definiert durch

$$(h \owedge k)(X, Y, Z, W) := h(X, W)k(Y, Z) + h(Y, Z)k(X, W) - h(X, Z)k(Y, W) - h(Y, W)k(X, Z)$$

für $X, Y, Z, U \in \mathcal{V}(M)$.

Bemerkung 15.3. $h \owedge k$ hat dieselben Symmetire wie der Krümmungstensor R. (Übung)

Lemma 15.4 (Konforme Transformation)**.** *Seien g und $\tilde{g} = e^{2u} \cdot g$ konform äquivalente Riemannsche Metriken auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $u \in C^\infty(M)$. Dann gilt:*

(1) Der Levi-Civita-Zusammenhang auf TM zur Metrik $\tilde{g}$ ist gegeben durch:

$$\nabla^{\tilde{g}}_X Y = \nabla^g_X Y + \nabla u(X) \cdot Y + \nabla u(Y) \cdot X - g(X, Y) \cdot \operatorname{grad}_g u. \tag{15.1}$$

(2) Der $(4, 0)$-Krümmungstensor bzgl. $\tilde{g}$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(R^{\tilde{g}}(X, Y)Z, W) \quad = \quad & e^{2u} \cdot \Big\{ g(R^g((X, Y)Z, W) \\ & -\nabla^2 u \owedge g(X, Y, Z, W) + (\nabla u \otimes \nabla u) \owedge g(X, Y, Z, W) - \frac{1}{2} g \owedge g(X, Y, Z, W) |\nabla u|_g^2, \Big\} \end{aligned} \tag{15.2}$$

d.h., als ein $(4, 0)$-Tensor

$$R_{\tilde{g}} = e^{2u} \{R - \nabla^2 u \owedge g + (\nabla u \otimes \nabla u) \owedge g - \frac{1}{2} |\nabla u|_g^2 g \owedge g\}.$$

Hierbei sind alle Terme auf der rechten Seite bzgl. der Metrik g.

(3) Der Ricci-Tensor (als Bilinearform) bzgl. $\tilde{g}$ ergibt sich zu:

$$\operatorname{ric}^{\tilde{g}} = \operatorname{ric}^g - (n - 2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) + (\Delta u - (n - 2)|\nabla u|_g^2) \cdot g \tag{15.3}$$

(4) Für die Skalarkrümmung bzgl. $\tilde{g}$ erhalten wir dann:

$$s^{\tilde{g}} = e^{-2u} \cdot (s^g + 2(n-1)\Delta u - (n-2)(n-1)|\nabla u|_g^2). \tag{15.4}$$

(5) Für den spurfreien Anteil $B_g = \operatorname{ric}_g - \frac{scal_g}{n} g$ des Ricci-Tensors finden wir schließlich:

$$B_{\tilde{g}} = B_g - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u) - \frac{n-2}{n}(\Delta u + |\nabla u|^2) \cdot g. \tag{15.5}$$

Proof. (i) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} X\tilde{g}(Y,Z) &= X(e^{2u} g(Y,Z)) \\ &= e^{2u} \cdot 2\nabla u(X) \cdot g(Y,Z) + e^{2u} \cdot Xg(Y,Z) \end{aligned}$$

Die Koszul-Formel liefert daher:

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_X Y, Z) &= X\tilde{g}(Y,Z) + Y\tilde{g}(Z,X) - Z\tilde{g}(X,Y) \\ &\quad -\tilde{g}(X,[Y,Z]) + \tilde{g}(Y,[Z,X]) + \tilde{g}(Z,[X,Y]) \\ &= e^{2u}\big\{2\nabla u(X) \cdot g(Y,Z) + 2\nabla u(Y) \cdot g(Z,X) - 2\nabla u(Z) g(X,Y) \\ &\quad + Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\big\} \\ &= 2e^{2u}\big\{\nabla u(X) \cdot g(Y,Z) + \nabla u(Y) \cdot g(Z,X) - \nabla u(Z) g(X,Y) + g(\nabla^g_X Y, Z)\big\} \\ &= 2g(\nabla^g_X Y + \nabla u(X) \cdot Y + \nabla u(Y) \cdot X - g(X,Y) \cdot \operatorname{grad} u, Z). \end{aligned}$$

(ii) Der Krümmungstensor R_g ist tensoriell in allen Einträgen, d.h. der Wert in p von $g(R\tilde{g}(X,Y)Z,W)$ hängt nur von $X,Y,Z,W \in T_pM$ ab. Wähle daher Fortsetzungen von X, Y,Z zu Vektorfeldern, für die paarweise alle kovarianten Ableitungen bzgl. g in p verschwinden, also

$$(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_Y X)(p) = [X,Y](p) = 0$$

und analog für X,Z bzw. Y,Z. In dem Krümmungstensor verschwinden daher im betrachteten Punkt bereits die Terme mit kovarianten Ableitungen nach $[X,Y]$ bzw. $[Y,Z]$. Wir haben also:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(R^{\tilde{g}}(X,Y)Z,W) &= \tilde{g}((\nabla^{\tilde{g}})^2_{X,Y} Z - (\nabla^{\tilde{g}})^2_{Y,X} Z, W)(p) \\ &= \tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_X \nabla^{\tilde{g}}_Y Z, W)(p) - \tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_Y \nabla^{\tilde{g}}_X Z, W)(p) \end{aligned}$$

Bei der folgenden Berechnung von $\tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_X \nabla^{\tilde{g}}_Y Z, W)(p)$ können wir ferner alle Terme ignorieren, die symmetrisch in X,Y sind, denn diese fallen bei der anschlieenden Antisymmetrisierung zu $R^{\tilde{g}}((X,Y)Z,W)(p)$ ohnehin weg. Wir erhalten also durch zweimaliges Anwenden von (15.1) (hier und im Folgenden sind Terme ohne Index stets bzgl. g): in Punkt p

$$
\begin{aligned}
e^{-2u}\tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_X\nabla^{\tilde{g}}_Y Z, W)(p) &= g\Big(\nabla^{\tilde{g}}_X\big(\nabla_Y Z + \nabla u(Y)Z + \nabla u(Z)Y - g(Y,Z)\cdot \operatorname{grad} u, W\Big)(p) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_X\big(\nabla u(Y)Z + \nabla u(Z)Y - g(Y,Z)\cdot \operatorname{grad} u\big), W)(p) \\
&\quad +\nabla u(X)\cdot g\big(\nabla_Y Z + \nabla u(Y) + \nabla u(Z)Y - g(Y,Z)\cdot \operatorname{grad} u, W)(p) \\
&\quad +\big(\nabla u(Y)\nabla u(Z) + \nabla u(Z)\nabla u(Y) - g(Y,Z)\big)g(X,W)(p) \\
&\quad -g(X, \nabla_Y Z + \nabla u(Y) + \nabla u(Z)Y - g(Y,Z)\cdot \operatorname{grad} u)g(\operatorname{grad} u, W)(p) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_X(\nabla u(Y))Z + \nabla_X(\nabla u(Z))Y - g(Y,Z)\cdot \nabla_X \operatorname{grad} u\big), W)(p) \\
&\quad +\nabla u(X)\nabla u(Y)g(Z,W) + \nabla(X)\nabla u(Z)g(Y,Z) - \nabla u(X)\nabla u(W)g(Y,Z) \\
&\quad +\nabla u(Y)\nabla u(Z)g(X,W) + \nabla(Z)\nabla u(Y)g(X,Z) - g(Y,Z)g(X,W)|\nabla u|^2 \\
&\quad -\nabla u(Y)\nabla u(W)g(X,Z) + \nabla u(Z)\nabla u(W)g(X,Y) + \nabla u(X)\nabla u(W)g(Y,Z) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) + \nabla^2(X,Z)g(Y,W) - \nabla^2 u(X,W)g(Y,Z) \\
&\quad +\nabla u(X)\nabla u(Z)g(Y,W) + 2\nabla u(Y)\nabla u(Z)g(X,W) \\
&\quad -\nabla u(Y)\nabla u(W)g(X,Z) - g(Y,Z)g(X,W)|\nabla u|^2 \\
&\quad +\text{Terme symmetrisch in } X, Y.
\end{aligned}
$$

Die Terme von $\nabla u(X)\nabla u(W)g(Y,Z)$ kürzen sich. Zusammen mit den entsprechenden Termen für $\tilde{g}(\nabla^{\tilde{g}}_Y\nabla^{\tilde{g}}Z, W)$ ergibt sich die Behauptung.

Für ein $(4,0)$-Tensor $T : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, definieren wir $\operatorname{Spur} T : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{Spur} T(X,Y) := \sum_{i=1}^{n} T(X, e_i, e_i, Y),$$

wobei e_i eine orthogonale Basis. Für die Spur von $h \owedge k$ gilt:

$$\operatorname{Spur}(h \owedge k)(X,Y) = \operatorname{Spur} k \cdot h(X,Y) + \operatorname{Spur} h \cdot k(X,Y) - h(E_i,X)k(E_i,Y) - h(E_i,Y)k(E_i,X),$$

wobei $\{E_i\}$ eine orthonormale Basis bgzl. der Metrik. Daraus haben wir

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Spur}(\nabla^2 u \owedge g) &= (n-2)\nabla^2 u - \Delta u \cdot g \\
\operatorname{Spur}((\nabla u \otimes \nabla u) \owedge g) &= (n-2)(\nabla u \otimes \nabla u) + |\nabla|^2 g \\
\operatorname{Spur}(g \owedge g) &= 2(n-1)g.
\end{aligned}
$$

(Vorsichtig! Hier gilt $\operatorname{tr}\nabla^2 = -\Delta$.) Mit dieser Formeln, ist es leicht, um (15.3), (15.4) sowie (15.5) zu zeigen.

Z.B. zur (15.3): Bilden e_i, $i = 1, \cdot, n$ lokale Orthonormalbasis für g so bilden $e^{-u}e_i$ lokale Orthonormalbasis für $\tilde{g}$ Wir erhalten daher für den Ricci-Tensor,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ric}_{\tilde{g}} &= \operatorname{Spur}_{\tilde{g}} R^{\tilde{g}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} R^{\tilde{g}} g(\cdot, e^{-u}e_i)e^{-u}e_i, \cdot) \\
&= e^{-2u}\operatorname{Spur}_g R^{\tilde{g}} \\
&= e^{-2u}\operatorname{Spur}_g\big\{R - \nabla^2 u \owedge g + (\nabla u \otimes \nabla u) \owedge g - \frac{1}{2}|\nabla u|_g^2 g \owedge g\big\}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Korollar 15.5. *Sei $n \geq 3$. Setzen $v^{\frac{4}{n-2}} = e^{2u}$. Dann gilt die Transformationformel der Sklarkrümmung*

(15.6)
$$s^{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2} v^{-\frac{n+2}{n-2}} \left\{\Delta v + \frac{n-2}{4(n-1)} s^g v\right\}.$$

Proof. Wir leiten die Gleichung $v^{\frac{4}{n-2}} = e^{2u}$ ab und erhalten

$$2e^{2u}\nabla u = \frac{4}{n-2}v^{\frac{4}{n-2}-1}\nabla v$$

Daraus erhlaten wir

$$\nabla u = \frac{2}{n-2}v^{-1}\nabla u \tag{15.7}$$

und

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{2}{n-2}\right)^2 v^{-2}|\nabla v|^2.$$

Mit der Ableitung von (15.7) erhalten wir

$$\Delta u = -\mathrm{div}\,(\nabla u) = \frac{2}{n-2}(v^{-1}\Delta v + v^{-2}|\nabla v|^2).$$

Also haben wir

$$\Delta u - \frac{n-2}{2}|\nabla u|^2 = \frac{2}{n-2}v^{-1}\Delta v.$$

Nun ist es leicht zu sehen, dass (15.6) aus (15.4) folgt. □

Definition 15.6 (Der Yamabe-Operator)**.** Der Operator

$$Y_g(u) := \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}s_g u$$

heißt Yamabe-Operator oder Konformer Laplaceoperator bzgl. g.

Lemma 15.7. *Ist $\tilde{g} = e^{2u}$. So gilt*

$$Y_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2}u}Y_g(e^{\frac{n-2}{2}u}\varphi).$$

Korollar 15.8. *Sei $n \geq 3$. Ist $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}}g$. Dann gilt*

$$Y_{\tilde{g}}(v^{-1}\varphi) = v^{-\frac{n+2}{n-2}}Y_g(\varphi).$$

Setze

$$2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Also $2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$ und $2^* - 2 = \frac{4}{n-2}$.

Proof. Statt einer direkten Nachprüng wollen wir die Transformationformel (15.6) der Skalarkrümmung benutzen, mindesten für den Fall $\varphi > 0$. Setze $\bar{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g = (v^{-1}\varphi)^{\frac{4}{n-2}}\tilde{g}$. Nach (15.6) gilt

$$s^{\bar{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2}\varphi^{-\frac{n+2}{n-2}}Y_g\varphi$$

für $\bar{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g$, und

$$s^{\bar{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2}(v^{-1}\varphi)^{-\frac{n+2}{n-2}}Y_{\tilde{g}}(v^{-1}\varphi)$$

für $\bar{g} = (v^{-1}\varphi)^{\frac{4}{n-2}}\tilde{g}$. Somit erhalten wir

$$Y_g\varphi = (v^{-1})^{-\frac{n+2}{n-2}}Y_{\tilde{g}}(v^{-1}\varphi).$$

□

Lemma 15.9. *Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die nichtlineare Eigenwertgleichung $Y(f) = \lambda \cdot f^{\frac{4}{n-2}}$, d,h.,*

$$\Delta f + \frac{4(n-2)}{n-1}Rf = \lambda \cdot f^{\frac{n+2}{n-2}}$$

die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$Q(\tilde{g}) := \frac{\int_M R_g dvol_g}{\left(\int_M dvol_g\right)^{\frac{2}{p}}}$$

bzgl. der Variation in der konformen Äquivalenzklasse von g, also $\tilde{g} = e^{2u} \cdot g = f^{p-2} \cdot g$, $u, f \in C^\infty(M)$.

Proof. Für das Volumenelement von $\tilde{g}$ finden wir:

$$dvol_{\tilde{g}} = e^{nu} dvol_g = f^{2^*} dvol_g.$$

Daher ist

$$\int_M dvol_{\tilde{g}} g = \int_M f^{2^*} dvol g = \|f\|_{L_{2^*}(M,g)}.$$

(Im Folgenden sind alle nicht explizit indizierten Terme bzgl. g). Für den Zähler von $Q(\tilde{g})$ finden wir daher:

$$\begin{aligned} \int_M R_{\tilde{g}} dvol_{\tilde{g}} &= \int_M f^{1-p} \left(\frac{1}{a} \cdot \Delta f + R_g . f M, g) \right) \cdot f^p dvol_g \\ &= \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot f \Delta f + f^2 R_g \right) dvol_g \\ = &= \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot |\nabla f|^2 + f^2 R_g \right) =: E_g(f). \end{aligned}$$

Für die Variation von $Q(\tilde{g}) = Q_g(f) := \frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^p}}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_g(f + th) &= \int_M \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(\frac{1}{a} \cdot |\nabla (f + th)|^2 + (f + th)^2 R_g \right) dvol_g \\ &= 2 \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot \langle \nabla f, \nabla h \rangle + f \cdot h R_g \right) dvol_g \\ &= 2 \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot \Delta f + f R_g \right) h dvol_g \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(\|f + th\|^2_{L^p} \right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(\int_M (f + th)^p \right)^{\frac{2}{p}} \\ &= \frac{2}{p} \left(\int_M |f|^p \right)^{\frac{2}{p}-1} \int_M \left.\frac{d}{dt}\right|_0 |f + th|^p dvol_g \\ &= 2 \|f\|^{2-p}_{L^p} \int_M f^{p-1} \cdot h dvol_g \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_0 Q(f + th) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \frac{E_g(f + th)}{\|f + th\|^2_{L^p}} \\ &= \frac{1}{\|f\|^4_{L^p}} \left(\|f\|^2_{L^p} \left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_g(f + th) - E_g(f) \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \|f + th\|^2_{L^p} \right) \\ &= \frac{2}{\|f\|^2_{L^p}} \int_M \left(\frac{1}{a} \cdot \Delta f + f \cdot R_g - \|f\|^{-p} E_g(f) \cdot f^{p-1} \right) \cdot h \, dvol_g \end{aligned}$$

Somit ist f ein kritischer Punkt von Q_g genau dann, wenn

$$\left(\frac{1}{a} \cdot \Delta f + s_g . f - \|f\|_{L^p} E_g(f) \cdot f^{p-1} \right) M, g) = 0,$$

also genau dann, wenn

$$Y(f) = \lambda f^{p-1} \quad \text{mit } \lambda = a\frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^p}^p}.$$

□

Bemerkung 15.10. Das Yamabe-Funktional Q_g bzw. Q ist nach unten beschränkt, denn für den einzigen evtl. negativen Term finden wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\int_M s_g \cdot f^2 dvolg\right| &\leq \|s_k\|_{L^{(p/2)^*}} \cdot \|f^2\|_{L^{p/2}} \qquad \text{mit } \frac{1}{(p/2)^*} + \frac{1}{p/2} = 1 \\ &= \|s_k\|_{L^{(p/2)^*}} \cdot \|f\|_{L^p}^2, \end{aligned}$$

so dass

$$Q_g(f) \geq -\|s_k\|_{L^{(p/2)^*}} \quad \text{für alle } f.$$

Definition 15.11 (Die Yamabe-Konstante)**.** Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Die Yamabe-Konstante

$$\begin{aligned} Y(M, [g]) &:= \inf\{Q(\tilde{g}) | \tilde{g} \in [g]\} \\ &= \inf\{Q_g(f) | f \in C^\infty(M), f > 0\} \end{aligned}$$

ist eine Invariante der konformen Äquivalenzklasse (kurz: der konformen Klasse)

Bemerkung 15.12. Ist die Skalarkrümmung von (M, g) positiv, $s_g > 0$, so gibt es wegen der Kompaktheit von M eine positive untere Schranke $s_g \geq C_1 > 0$. Somit gilt für den Zähler des Yamabe-Funktionals

$$E_g(f) \geq \int_M (\frac{1}{a}|\nabla f|^2 + C_1 \cdot f^2) dvol_g \geq C_2 \|f\|_{H^1(M)}$$

Andererseits gilt wegen des Sobolevschen Einbettungssatzes

$$\|f\|_{L^p} \leq C_3 \cdot \|f\|_{H^1}.$$

Damit gilt für das Yamabe-Funktional

$$Q_g(f) \geq \frac{C_2}{C_3}, \quad \forall f > 0$$

und somit

$$Y(M, [g]) \geq \frac{C_2}{C_3} > 0.$$

Definition 15.13. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *konform flach* (oder lokal konform flach), falls es zu jedem $p \in M$ eine Karte (x, U) und eine Funktion $u \in C^\infty(U)$ gibt, so dass gilt:

$$g\big|_U = e^{2u} x^*(\delta).$$

In anderen Worten: (M, g) heißt konform flach, falls um jedes $p \in M$ Koordinaten existieren, in denen gilt:

$$g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}.$$

Bemerkung 15.14. Jede 2-dimeinsionale Mannigfaltigkeit ist flach. Solche Koordinaten in $n = 2$ heißt *isotherme Koordinaten.*

Definition 15.15. Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Der Weylsche Krümmungstensor W (kurz: die Weyl-Krümmung) ist definiert durch:

$$g(W(X, Y, Z), U) = W_4(X, Y, Z, U),$$

wobei

$$W_4(X, Y, Z, U) := R - \frac{s}{2n(n-1)}(g \owedge g) - \frac{1}{n-2}(B \owedge g).$$

Lemma 15.16. *Sei* $\dim(M) = n \geq 3$*, und seien* g *und* $\tilde{g} = e^{2u} \cdot g$ *konform äquivalente Riemannsche Metriken auf* M*. Dann ist* $W_{\tilde{g}} = W_g$*.*

Proof. Wir zeigen die folgende äquivalente Aussage

$$W_4^{\tilde{g}} = e^{2u} W_4.$$

$$\begin{aligned}
W_4^{\tilde{g}} &= R^{\tilde{g}} - \frac{s_{\tilde{g}}}{2n(n1)}(\tilde{g} \owedge \tilde{g}) - \frac{1}{n-2}(B_{\tilde{g}} \owedge \tilde{g}) \\
&= e^{2u}\Big\{ R - \nabla^2 u \owedge g + (\nabla u \otimes \nabla u) \owedge g - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 g \owedge g \Big\} \\
&\quad - \frac{e^{-2u}}{2n(n-1)}\{s_g + 2(n-1)\Delta u(n-2)(n-1)|\nabla u|^2\} e^{4u} g \owedge g \\
&\quad - \frac{1}{n-2}\Big\{ B - (n-2)(\nabla^2 u - \nabla u \otimes \nabla u - \frac{n-2}{n}(\Delta u + |\nabla u|^2) \cdot g \Big\} \owedge e^{2u} \cdot g \\
&= e^{2u}\Big\{ R_g - \frac{s}{2n(n-1)}(g \owedge g) - \frac{1}{n-2}(B \owedge g) \Big\} \\
&= e^{2u} W_g.
\end{aligned}$$

□

Korollar 15.17. *Ist (M, g) konform flach, so ist $W \equiv 0$, denn die Krümmung ist eine lokale Größe, und die Weyl-Krümmung W ist konform invariant.*

Diese notwendige Bedingung für konforme Flachheit auch hinreichend für $n \geq 4$

Theorem 15.18. *Es gilt:*

(1) $n = 2$. Jede Fläche ist konform flach.
(2) $n = 3$. Hier gilt stets $W \equiv 0$. Eine 3-Mannigfaltigkeit M ist konform flach genau dann, wenn $\nabla(B + \frac{1}{12}s_g \cdot g)$ ein symmetrischer $(3,0)$-Tensor.
(3) $n \geq 4$. (M, g) ist konform flach genau denn, wenn $W \equiv 0$.

Nach Definition des Weylsche Krümmungstensors rehalten wir eine Zerlegung des Riemannschen Krümmungstensor

$$R = W_4(X, Y, Z, U) + \frac{s}{2n(n-1)}(g \owedge g) + \frac{1}{n-2}(B \owedge g).$$

Man kann zeigen, dass die Zerlegung orthonormal ist, d.h $g(W_4, g \owedge g) = g(g \owedge g, B \owedge g) = g(W_4, B \owedge g) = 0$. Daraus erhalten wir

$$|R|_g^2 = |W_4|_g^2 + \left| \frac{s}{2n(n-1)}(g \owedge g) \right|^2 + \left| \frac{1}{n-2}(B \owedge g) \right|^2.$$

Korollar 15.19. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g). g ist eine Metrik mit konstanten Krümmung, d.h., $K \equiv \kappa \in \mathbb{R}$ genau denn, wenn $W = 0$ und $B = 0$.*

Lemma 15.20. *Sei $n \geq 3$. Eine Riemannsche Metrik ist eine Einstein-Metrik, d.h.,* ric $= \lambda g$ *mit λ konstant, genau dann, wenn $B = 0$.*

Proof. Mit Hilfe der 2. Bianchi-Identität. □

15.1. **Anhang: Die zweite Bianchi Identität.**

Lemma und Definition 15.21. Sei $B : (TM)^k := TM \otimes \cdots \otimes TM \to \mathbb{R}$ ein $(k, 0)$-Tensorfeld (d.h, T multilinear ist) und $X \in \mathcal{V}(M)$. Definiere $\nabla_X B : (TM)^k \to \mathbb{R}$ durch

$$(\nabla_X B)(X_1, \cdots, X_k) := X(B(X_1, \cdots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} T(X_1, \cdots, \nabla_X X_i, \cdots, X_k).$$

$\nabla_X T$ ist ein Tensorfeld und heißt kovariante Ableitung von T nach X.

Proof. Übung. □

∇B ist ein $(k+1,0)$-Tensorfeld.

Beispiel 15.22. Eine Riemannsche Metrik g ist ein $(2,0)$-Tensorfeld. Ihre kovariante Ableitung nach X verschwindet,

$$\nabla_X g(Y,Z) := X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0,$$

da ∇ verträglich mit g ist.

Proposition 15.23. *Die kovariante Ableitung von $(k,0)$-Tensorfeld besitzt die folgende Eigenschaften:*
(1) $\nabla_X(B_1 + B_2) = \nabla_X B_1 + \nabla_X B_2$
(2) $\nabla_X(fB) = X(f)B + f \cdot \nabla_X B$
(3) $\nabla_X(B_1 \otimes B_2) = \nabla_X B_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes \nabla_X B_2$.

Proof. Übung. □

Theorem 15.24 (die 2. Bianchi-Identität)**.** *Der Krm̈mungstensor einer Riemannschen Metrik hat noch eine wichtige Eigenschaften: Es gilt die 2. Bianchi-Identität:*

$$(\nabla_X R)(Y,Z,U,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,U,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,U,V) = 0, \qquad \forall X,Y,Z,U,V \in T_pM \tag{15.8}$$

Proof. Übung (direkte Rechnung) □

Definition 15.25 (Divergenz)**.** Für ein $(k,0)$- Tensorfeld B bezeichne $\operatorname{div} B$ das Tensorfeld

$$\operatorname{div} B(X_1, \cdots, X_{k-1}) := \sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} B(E_i, X_1, \cdots, X_{k-1}).$$

Wobei $E_i (1 \le i \le n)$ die ONB bzgl. g. Der $((k-1),0)$-Tensorfeld $\operatorname{div} B$ heißt *Divergenz* von B.

Als eine Folgerung von der 2. Bianch-Identität erhalten wir

Proposition 15.26. *Für den Ricci-Tensor einer Riemannschen Metrik g gilt*

$$\operatorname{div} \operatorname{ric}_g = \frac{1}{2} ds_g.$$

Proof. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ und $(e_1, \cdots, e_n)$ eine ONB von T_pM. Wähle ihre Fortsetzungen V und E_i $(1 \le i \le n)$ mit

$$\nabla_{E_i} E_j(p) = \nabla_V E_i(p) = \nabla_{E_j} V(p) = 0 \quad \forall i, j. \tag{15.9}$$

Aus der 2. Bianchi-Identität für R folgt dann

$$0 = (\nabla_V R)(E_i, E_j, E_j, E_i) + (\nabla_{E_i} R)(E_j, V, E_j, E_i) + (\nabla_{E_j} R)(V, E_i, E_j, E_i), \quad \forall, i, j.$$

Es folgt, wegen (15.9),

$$0 = v(R(E_i, E_j, E_j, E_i)) + e_i(R(E_j, V, E_j, E_i)) + e_j(R(V, E_i, E_j, Ei_)) \quad \forall, i, j.$$

Jetzt summieren wir dies und erhalten in p:

$$0 = v(s_g) - 2\sum_{i=1}^n e_i(\operatorname{ric}(V, E_i)) = ds_g(v) - 2\operatorname{div}\operatorname{ric}(v).$$

□

Beweis von Theorem 14.17 und Lemma 15.20. Wir brauchen nur Lemma 15.20 zu beweisen, denn eine Metrk in dem Satz 14.17 ist eine Metrik mit $B = 0$, mit $n(n-1)K(p) = s_g$. Mit Proposition 15.26 berechnen wir die Divergenz von B

$$\operatorname{div} B = \operatorname{div} ric - \frac{1}{n} ds_g = (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) ds_g. \tag{15.10}$$

Da $n \ge 3$ und $B = 0$, folgt $s_g = const.$, also ric $= \frac{1}{n} const.g$ □

16. Der Modellfall: Die Sphähre

Nun betrachten wir genauer den Modellfall: Die Sphähre.

Sei also $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ die Standardsphäre und $e_0 = (1, 0, \cdots, 0)$ der Nordpol. Schreibe $\bar{x} = (x^0, x^1, \cdots, x^n) = (x^0, x)$. Die stereografische Projektion im Nordpol $\sigma : \mathbb{S}^n - \{e_0\} \to \mathbb{R}^n$ ist beschrieben durch $(0, \sigma(\bar{x})) = (0, y) = (1-t)e_0 + t\bar{x}$.. Man kann leicht nachprüfen, dass $t = \frac{1}{1-x_0}$. D.h,

$$y = \sigma(\bar{x}) = \frac{1}{1-x^0}x.$$

Um $(\sigma^{-1})(g_{\mathbb{S}^n})$ zu bestimmen, berechnen wir die Änderung der Länge eines Tangentialvektors $\bar{v} \in T_y\mathbb{S}^n = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle = 0\}$ unter σ. OBdA. sei dazu $|\bar{v}| = 1$. Wir setzen dann $c(t) = \cos(t) \cdot \bar{x} + \sin(t) \cdot \bar{v}$. Dann ist $c(t) \in \mathbb{S}^n$ für alle t und $c(0) = \bar{x}$, $c'(0) = \bar{v}$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} d\sigma(\bar{v}) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \sigma(c(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{\cos(t) \cdot x + \sin(t) v}{1 - \cos(t) x^0 - \sin(t) v^0} \\ &= \frac{v \cdot (1-x^0) - x(-v^0)}{(1-x^0)^2}. \end{aligned}$$

Für die Länge erhalten wir also, unter Beachtung von $|v|^2 = 1-(v^0)^2$, $|x|^2 = 1-(x^0)^2$ und $\langle v, x\rangle = v^0x^0$

$$|d\sigma(\bar{v})|^2 = \frac{1}{(1-x^0)^2}.$$

Man kann zeigen, dass $|y|^2 + 1 = \frac{2}{1-x^0}$ und schließlich

$$(\sigma^{-1})^* g_{\mathbb{S}^n} = \frac{4}{(|y|^2+1)^2} g_{\mathbb{R}^n}. \tag{16.1}$$

Mit (15.1) erhalten wir

$$R_{\mathbb{S}^n} = \frac{1}{2} g_{\mathbb{S}^n} \owedge g_{\mathbb{S}^n},$$

d.h., die Sphäre hat die konstante Krümmung 1, insbesondere ist die Sphäre konform flach.

(16.1) ist äquivalent zu

$$g_{\mathbb{S}^n} = \frac{4}{(|\sigma(\bar{x})|^2+1)^2} \sigma^* g_{\mathbb{R}^n}. \tag{16.2}$$

Erinnerung. Die Isometriegruppe einer riemannschen Mannigfaltigkeit ist

$$\mathrm{Isom}\,(M, g) := \{\Phi : M \to M \text{ Diffeomorphismus mit } \Phi g = g\}.$$

Ersetzen wir die Gleichheit der Metriken Φg und g durch die schwächere Bedingung konformer Äquivalenz, so erhalten wir eine i. Allg. größere Gruppe:

Definition 16.1. Die konforme Gruppe von (M, g) ist

$$\mathrm{Conf}\,(M, g) := \{\Phi : M \to M \text{ Diffeomorphismus mit } \Phi g = e^{2u} g\}.$$

Bemerkung 16.2. (1) $\mathrm{Conf}\,(M, g) = \mathrm{Conf}\,(M, \tilde{g})$ für alle $\tilde{g} \in [g]$.
(2) $\mathrm{Isom}\,(M, g) \subset \mathrm{Conf}\,(M, g)$.
(3) Für jeden Diffeomorphismus $\Phi : M \to M$ ist

$$\int_M s_{\Phi^* g} dvol_{\Phi^* g} = \int_M s_g dvol_g$$

und $vol(M, \Phi^* g) = vol(M, g)$, denn $\Phi : (M, \Phi^* g) \to (M, g)$ ist eine Isometrie. Insbesondere ist also Q invariant unter $\mathrm{Conf}\,(M, g) : Q \circ \Phi^* = Q$ für alle $\Phi \in \mathrm{Conf}\,(M, g)$. (Falls $\Phi \notin \mathrm{Conf}\,(M, g)$, gilt $\Phi^* g \notin [g]$)

Somit haben wir

Lemma 16.3. *Mit $\tilde{g}$ ist für alle $\Phi^* \in \mathrm{Conf}\,(M,g)$ auch $\Phi^* g$ ein kritischer Punkt von Q.*

Bemerkung 16.4. Da $\mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ nicht kompakt ist, ist die Lösungsmenge des Yamabe-Problems der Sphäre nicht kompakt.

Beispiel 16.5. Für $(M,g) = (\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ ist $\mathrm{Isom}\,(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n}) = O(n+1)$.
Zu $F \in E(n) = \mathrm{Isom}\,(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{S}^n \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

d.h.,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{S}^n \\ \Phi(\bar{x}) &:= \begin{cases} \sigma^{-1} \circ F \circ \sigma(\bar{x}) & \bar{x} \neq e_0 \\ e_0, & \bar{x} = e_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Durch explizites Ausrechnen kann man unschwer sehen, dass und Φ^{-1} auch Φ in e_0 glatt sind und daher $\Phi \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{S}^n)$. Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned} \Phi^* g_{\mathbb{S}^n} &= \sigma^* \circ F^* \circ (\sigma^{-1})^* g_{\mathbb{S}^n} && ((16.1)) \\ &= \sigma^* \circ F^* \left(\frac{4}{(|y|^2+1)^2} g_{\mathbb{R}^n} \right)^2 \\ &= \sigma^* \left(\frac{4}{|F(y)|^2+1)^2} F^* g_{\mathbb{R}^n} \right) && (F^* g_{\mathbb{R}^n} = g_{\mathbb{R}^n}) \\ &= \sigma^* \left(\frac{(|y|^2+1)^2}{|F(y)|^2+1)^2} \frac{4}{(|y|^2+1)^2} g_{\mathbb{R}^n} \right) && ((16.2)) \\ &= \left(\frac{(|\sigma(\bar{x})|^2+1)}{|F(\sigma(\bar{x}))|^2+1} \right)^2 g_{\mathbb{S}^n} \end{aligned}$$

Somit sind $\Phi^* g_{\mathbb{S}^n}$ und $g_{\mathbb{S}^n}$ konform äquivalent und daher $\Phi \in \mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$.
Zu $\alpha > 0$ betrachte die Dilatation $\delta_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \delta_\alpha(x) := \alpha^{-1} \cdot x$ und setze

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{S}^n &\to \mathbb{S}^n \\ \Psi(\bar{x}) &:= \begin{cases} \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma(\bar{x}) & \bar{x} \neq e_0 \\ e_0, & \bar{x} = e_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wiederum kann man unschwer zeigen, dass $\Psi \in \mathrm{Diff}\,(\mathbb{S}^n)$. Wir haben zunächst

$$(\delta_\alpha^* g_{\mathbb{R}^n})(v,v) = g_{\mathbb{R}^n}(d\delta_\alpha(v), d\delta_\alpha(v)) = \alpha^{-2} g_{\mathbb{R}^n}(v,v)$$

und berechnen damit wie früh:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^* \circ (\sigma^{-1})^* &= \delta_\alpha^* \left(\frac{4}{(|y|^2+1)^2} g_{\mathbb{R}^n} \right)^2 \\ &= \frac{4}{(\alpha^{-2}|y|^2+1)^2} g_{\mathbb{R}^n} \\ &= \frac{4\alpha^2}{(|y|^2+\alpha^2)^2} g_{\mathbb{R}^n} \\ &=: 4 u_\alpha^{p-2} g_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

mit

$$u_\alpha(y) = \left(\frac{|y|^2+\alpha^2}{\alpha} \right)^{\frac{2-n}{2}}. \tag{16.3}$$