Daraus erhalten wir also:

$$\begin{aligned}\Psi^* g_{\mathbb{S}^n} &= \sigma^* 4u_\alpha^{p-2} g_{\mathbb{R}^n} \\ &= \sigma^*\Big((\frac{u_\alpha}{u_1})^{p-2} \cdot 4u_1^{p-2} g_{\mathbb{R}^n}\Big) \\ &= (\frac{u_\alpha}{u_1} \circ \sigma)^{p-2} g_{\mathbb{S}^n}.\end{aligned}$$

Damit ist also $\Psi \in \mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$.

Die Funktion u_α in (16.3) spielt eine große Role in der Analysis des Yamabe-Problems.

Proposition 16.6 (Obata). *Sei $M = \mathbb{S}^n$, $n \geq 3$. Ist $g \in [g_{\mathbb{S}^n}]$ eine Metrik konstanter Skalarkrümmung, so gibt es $C > 0$ und $\Phi \in \mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ mit $g = C \cdot g_{\mathbb{S}^n}$.*

Proof. a) Zeige zunächst: g ist eine Einstein-Metrik. Schreibe dazu $g_{\mathbb{S}^n} = e^{-2u} \cdot g = \varphi^{-2} \cdot g$ mit $\varphi = e^{-u} \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$, $\varphi > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= -\varphi\nabla u \\ \nabla^2\varphi &= -\nabla \otimes \varphi - \varphi \cdot \nabla^2 u = \varphi \cdot (\nabla u \otimes \nabla u - \nabla^2 u) \\ \Delta\varphi &= \varphi \cdot (\Delta u - |\nabla u|^2).\end{aligned}$$

Da $g_{\mathbb{S}^n}$ eine Einstein-Metrik ist, haben wir aus der Transformationformel von B:

$$\begin{aligned}0 = B_{g_{\mathbb{S}^n}} &= B_g - (n-2)(\nabla^2 - \nabla u \otimes \nabla u) - \frac{n-2}{n}(\Delta u + |\nabla u|^2) \\ &= B_g + (n-2)^{-1}\varphi^{-1}\big(\nabla^2\varphi + \frac{1}{n}(\Delta\varphi)\cdot g\big).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^n} |B_{g_{\mathbb{S}^n}}|^2 dvol_g &= -(n-2)\int_{\mathbb{S}^n} g(B_g, \nabla^2\varphi + \frac{1}{n}(\Delta\varphi))dvol_g \\ &= -(n-2)\int_{\mathbb{S}^n} g(B_g, \nabla^2\varphi)dvol_g \qquad (g(B_g, g) = \mathrm{tr}\, B = 0) \\ &= (n-2)\int_{\mathbb{S}^n} g(\mathrm{div}\, B_g, \nabla\varphi)dvol_g = 0,\end{aligned}$$

denn nach (15.10) ist $\mathrm{div}\, B_g = \mathrm{div}\,(ric_g - \frac{s_g}{n}\cdot g) = \frac{1}{2}\nabla s_g - \frac{1}{n}\nabla s_g = 0$, da g konstante Skalarkrümmung hat. Daraus folgt direkt $B_g = 0$, denn der Integrand ist nicht negativ, und $\varphi > 0$. Somit ist g eine Einstein-Metrik.

b) Da die Weyl-Krümmung konform invariant ist, gilt $W_g = W_{g_{\mathbb{S}^n}} = 0$, also hat nach Bemerkung 2.1.24 auch g konstante Schnittkrümmung $K_g \equiv c \in \mathbb{R}$. Wäre $c \leq 0$, so wäre $(\mathbb{S}^n, g)$ isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{H}^n$, ein Wiederspruch. Folglich ist $c > 0$. Setze $C := \sqrt{c}$. Dann hat $\bar{g} = \frac{1}{C}\cdot g$ Schnittkrümmung $\equiv 1$. Es gibt also eine Isometrie $\Phi : (\mathbb{S}^n, \bar{g}) \to (\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$. Damit ist $g = C \cdot \Phi^* g_{\mathbb{S}^n}$.

□

Folgerung 16.7. *Falls für $(M, [g]) = (\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}])$ das Funktional Q das Infimum annimmt, so geschieht dies genau auf den Metriken der Form $g = c\Phi^* g_{\mathbb{S}^n}$ für ein $c > 0$ und ein $\Phi \in \mathrm{Conf},(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$.*

Proof. Hat Q das Minimum in g, so ist g ein kritischer Punkt von Q und hat daher konstante Skalarkrümmung. Die Proposition von Obata liefert die Behauptung. □

Tatsächlich nimmt Q das Minimum an; der Beweis kommt später, wenn wir Zeit haben. Damit können wir die Yamabe-Konstante von $(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}])$ nun explizit angeben:

$$\begin{aligned} Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) &= Q(g_{\mathbb{S}^n}) \\ &= \frac{\int_{\mathbb{S}^n} s_{g_{\mathbb{S}^n}} dvol_{g_{\mathbb{S}^n}}}{vol(g_{\mathbb{S}^n})^{2/p}} \\ &= n(n-1)(vol(g_{\mathbb{S}^n}))^{1-2/p} = n(n-1)(vol(g_{\mathbb{S}^n}))^{2/n} \\ &= n(n-1)\frac{4^{1/n}\pi^{(n+1)/n}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})^{2/n}} \end{aligned}$$

Solange wir nicht wissen, dass das Minimum angenommen wird, wissen wir nur, dass einerseits nach Bemerkung 15.12 $Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) > 0$ und andererseits

$$Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) \geq n(n-1)\frac{4^{1/n}\pi^{(n+1)/n}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})^{2/n}}$$

Lemma 16.8. *Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Dann gilt:*

$$Y(M, [g]) = a \inf\{Q_g(f) | f \in H^1(M), f \neq 0\},$$

wobei

$$Q_g(f) := \int_M (|\nabla f|^2 + a s_g |f|^2) dvol_g.$$

Proof. Der Beweis foglt aus:
1). $C^\infty \subset H^1$ ist dicht (bzgl. H^1-norm).
2). Mit $h \in H^1(M)$ ist $|h|$ auch in $H^1(M)$ mit $\int_M |\nabla h|^2 dvol_g = \int_M |\nabla |h||^2 dvol_g$.

□

Lemma 16.9. *Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und $\Sigma \subset M$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Kodimension ≥ 3. Dann gilt:*

$$Y(M, [g]) = \inf\{Q_g(f) | f \in C^\infty(M), \exists\delta > 0 : f\big|_{U_\delta(\Sigma)} \equiv 0\},$$

wobei $U_\delta = \{x \in M \mid \operatorname{dist}(x, \Sigma) < \delta\}$.

Proof. Setze zunächst

$$Y'(M, [g]) := \inf\{Q_g(f) | f \in C^\infty(M), \exists\delta > 0 : f\big|_{U_\delta(\Sigma)} \equiv 0\}.$$

Aus

$$\{f \in C^\infty(M), \exists\delta > 0 : f\big|_{U_\delta(\Sigma)} \equiv 0\} \subset C^\infty(M) \subset H^1(M),$$

folgt dann

$$Y(M, [g]) \leq Y'(M, [g]).$$

Wir sollen noch $Y'(M, [g]) \leq Y(M, [g])$. Wähle eine glatte Abschneidefunktion $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\eta \geq 0$ und

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t \leq 1, \\ \leq 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 2, \\ 1 & \text{für } t \geq 2, \end{cases}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $f \in C^\infty(M)$ mit $Q_g(f) \leq Y(M, [g]) + \varepsilon$. Zu $\delta > 0$ setze

$$f_\delta(x) := f(x) \cdot \eta\big(\frac{1}{\delta} \operatorname{dist}(x, \sigma)\big).$$

Da $\Sigma \subset M$ kompakt ist, ist für hinreichend kleines δ die Funktion $x \mapsto \operatorname{dist}(x, \Sigma)$ auf der offenen Teilmenge $\{x | 0 < \operatorname{dist}(x, \Sigma) < 2\delta\}$ glatt. Somit ist dann $f_\delta \in C^\infty(M)$ und $f_\delta\big|_{U_\delta(\Sigma)} \equiv 0$. Aus majorisierter Konvergenz folgt

$$\|f_\delta\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$$

und

$$\int_M s_g \cdot f_\delta^2 dvol \to \int_M s_g \cdot f^2 dvol$$

mit $\delta \to 0$.

Für den $|f|$-Term in Q_g haben wir:

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla f_\delta|^2 dvol &= \int_M \left|\nabla f \cdot \eta \circ \frac{\mathrm{dist}(\cdot,\Sigma)}{\delta} + f \cdot (\eta' \circ \frac{\mathrm{dist}(\cdot,\Sigma)}{\delta})\frac{1}{\delta}\nabla \,\mathrm{dist}(\cdot,\Sigma)\right|^2 \\
&= \int_{M-U_{2\delta}(\Sigma)} |\nabla f_\delta|^2 dvol \\
&\quad + \int_{U_{2\delta}(\Sigma(-U_\delta(\Sigma)} \left|\nabla f \cdot \eta \circ \frac{\mathrm{dist}(\cdot,\Sigma)}{\delta} + f \cdot (\eta' \circ \frac{\mathrm{dist}(\cdot,\Sigma)}{\delta})\frac{1}{\delta}\nabla \,\mathrm{dist}(\cdot,\Sigma)\right|^2 \\
&=: I + II.
\end{aligned}$$

Der erste Term I konvergiert mit majorisierter oder monotoner Konvergenz gegen $\int_M |\nabla f|^2 dvol$. Für den zweiten Term II finden wir:

$$\begin{aligned}
II &\leq 2\int_{U_{2\delta}(\Sigma)-U_\delta(\Sigma)} \left(|\nabla f|^2 + f^2 \cdot (\eta' \circ \frac{\mathrm{dist}(\cdot,\Sigma)}{\delta})^2 \frac{1}{\delta^2}\right) \\
&\leq C \cdot \int_{U_{2\delta}(\Sigma)-U_\delta(\Sigma)} (1 + \frac{1}{\delta^2}) dvol \\
&\leq C \cdot (1 + \frac{1}{\delta^2}) vol(U_{2\delta}(\Sigma)).
\end{aligned}$$

Mit $vol(U_{2\delta}(\Sigma)) \leq C\delta^{\mathrm{codim}}$ haben wir $II \leq (1+\delta^{-2})\delta^3 \to 0$. Hier haben wir $\nabla\,\mathrm{dist}(\cdot,\Sigma) = 1$ benutzt. In der Abschätzung von $vol(U_{2\delta}(\Sigma)) \leq C\delta^{\mathrm{codim}}$ verwendt man dem Satz von Fubini.

□

Lemma 16.10. *Sei $n \geq 3$. Es gilt*

$$Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) = \inf_{0 \neq f \in H^1(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_{g_{\mathbb{R}^n}} f|^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx)^{2/p}}.$$

Proof. Verwende Lemma 16.9 auf $M = \mathbb{S}^n$ mit $n \geq 3$ und $\Sigma = e_0$ an, denn $\mathrm{codim}\,(\Sigma) = n \geq 3$ und erhalte

$$Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) = \inf\{Q_{g_{\mathbb{S}^n}}(f) | f \in C^\infty(M) : \exists \delta > 0 : f\big|_{B_\delta(e_0)} \equiv 0\}.$$

Für ein solches f haben wir:

$$\begin{aligned}
Q_{g_{\mathbb{S}^n}}(f) &= Q_{\sigma^*(4u_1^{p-2} g_{\mathbb{R}^n})}(f) \\
&= Q_{4u_1^{p-2} g_{\mathbb{R}^n}}(f \circ \sigma^{-1}) \\
&= Q_{g_{\mathbb{R}^n}}(4^{2-p} \cdot u_1 \cdot f \circ \sigma^{-1}) \\
&= Q_{g_{\mathbb{R}^n}}(u_1 \cdot f \circ \sigma^{-1}),
\end{aligned}$$

mit $u_1 \cdot f \circ \sigma^{-1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Daraus foglt

$$Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) \geq \inf_{0 \neq f \in H^1(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_{g_{\mathbb{R}^n}} \nabla f|^2 dx}{(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx)^{2/p}}.$$

Umgekehrt setzt sich auch für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Verkettung $\varphi \circ \sigma$ zu einer glatten Funktion auf $\mathbb{S}^n$ fort, die in einer Umgebung von e_0 verschwindet. □

Damit haben wir

$$\begin{aligned} Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}]) &= \inf\{Q_{g_{\mathbb{R}^n}(\varphi)|\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{a}\cdot\frac{\int_M|\nabla\varphi|^2dx}{\|\varphi\|_{L^p}}\mid\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\right\} \\ &= \frac{1}{a}\frac{1}{\sigma_n}, \end{aligned}$$

wobei σ_n die beste Konstante in der Sobolevschen Ungleichung. (Definition 17.10) Wir erhalten somit:

$$\sigma_n=\frac{4(n-1)}{n-2}\frac{1}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])}.$$

Proposition 16.11. *Sei (M,g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n\geq 3$. Dann gilt:*

$$Y(M,[g])\leq Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}]).$$

Proof. Wähle eine glatte Abschneidefunktion $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $0\leq\eta\leq 1$ und

$$\eta(t)=\begin{cases} 1, & \text{für } t\leq 1,\\ \leq 1 & \text{für } 1\leq t\leq 2,\\ 0 & \text{für } t\geq 2.\end{cases}$$

17. Die subkritische Gleichung

Wie zuvor ist in diesem Abschnitt (M,g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n\geq 3$ und

$$p=2^*=\frac{2n}{n-2}\quad a=\frac{n-2}{4(n-1)}.$$

Das Yamabe-Funktional

$$Q_g(f)=\frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^p}^2}\text{ mit }E_g(f)=\int_M(\frac{1}{a}|\nabla f|^2+s_g\cdot f^2)dvol_g.$$

Wir haben schon bewiesen: für $f>0$

$$\begin{aligned} f\text{ ist kritischer Punkt von }Q_g &\Leftrightarrow\ Y(f)=\frac{a\cdot Q_g(f)}{\|f\|^{p-2}}\cdot f^{p-1} \\ &\Leftrightarrow\ \tilde g=f^{p-2}\cdot g\text{ hat konstante Skalarkrümmung }\frac{Q_g(f)}{\|f\|^{p-2}} \end{aligned}$$

Definition 17.1. Für $s\in[2,p]$ setze

$$Q_g^s(f):=\frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^s}^2}\qquad\text{für }f\in H^1(M)-\{0\}$$

und

$$\begin{aligned} Y_s(M,g) &:= \inf\{Q_g^s(f)|f\in C^\infty(M)-\{0\}\} \\ &= \inf\{Q_g^s(f)|f\in C^\infty(M)-\{0\},f>0\} \\ &= \inf\{Q_g^s(f)|f\in H^1(M)-\{0\}\} \end{aligned}$$

Lemma 17.2. *Wir haben:*

1)

$$f>0\text{ ist kritischer Punkt von }Q_g^s\Leftrightarrow Y(f)=\frac{a\cdot Q_g^s(f)}{\|f\|^{s-2}}\cdot f^{s-1}.$$

Insbesondere, falls $f>0$ das Funktional Q_g^s minimiert und ohne Einschränkung $\|f\|_{L^s}=1$ ist, so gilt

$$Y(f)=aY_s(M,g)f^{s-1}.$$

2) $Q_g^s(f) \geq -\|s_g\|_{L^{(s/2)}}$.

Proposition 17.3 (Yamabe)**.** *Sei* (M,g) *eine zusammenhängende, geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* $n \geq 3$. *Sei* $2 \leq s < p = \frac{2n}{n-2}$. *Dann gibt es eine Lösung* $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$ *des subkritischen Extremalproblems, d.h.*

$$Q_g^s(f) = Y_s(M,g)$$

(und ohne Einschränkun gist $\|f\|_{L^s} = 1$*).*

Proof. Sei $f_i \in C^\infty(M), f_i > 0$ eine Minimalfogle mit $Q_g^s(f_i) \to Ys(M,g)$. Ohne Einschränkung sei $\|f_i\|_{L^s} = 1$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \|f_i\|_{H^1} &= \int_M (|\nabla f_i|^2 + f_i^2) dvol \\ = aE_g(f_i) + \int_M (f_i^2 - as_g f_i^2) dvol & \\ &= aQ_g^s(f_i) + \int_M (f_i^2 - as_g f_i^2) dvol \\ &\leq C(1 + \|f_i\|^2) \leq C.. \end{aligned}$$

Damit ist f_i beschränkt in $H^1(M)$, und nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $f_i \rightharpoonup f$ schwach in H^1. Nach dem Kompaktheitssatz 17.12 ist die Einbettung $H^1(M) \subset L^s(M)$ kompakt für alle s mit $\frac{1}{s} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, also für s mit $s < p$. Somit ist $f_i \to f$ in L^s und insbesondere $\|f\|_{L^s} = \lim_{i\to\infty} \|f_i\|_{L^s} = 1$, also $f \not\equiv 0$.

Mit $f_i \to f$ in L^s gilt auch $f_i \to f$ in L^2. Man kann leicht zeigen:

$$\int_M s_g \cdot f_i^2 dvol \to \int_M s_g \cdot f^2 dvol.$$

Außerdem gilt mit $f_i \rightharpoonup f$ in H^1 insbesondere $\nabla f_i \rightharpoonup \nabla f$ in L^2 und daher:

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|_{L^2} &= \lim_{i\to\infty} \int_M \langle \nabla f_i, \nabla f \rangle dvol \\ &\leq \liminf_{i\to\infty} \|\nabla f_i\|_{L^2} \cdot \|\nabla f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

also $\|\nabla f\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{i\to\infty} \|\nabla f_i\|_{L^2}$, d.h., das Funktional $\|\nabla \cdot\|^2$ unterhablstetig bzgl der schwachen Konvergenz ist.

Schließlich ist:

$$\begin{aligned} Y_s(M,g) &\leq Q^s g(f) = E_g(f) \leq \liminf_{i\to\infty} E_g(f_i) \\ &= \liminf_{i\to\infty} Q_g^s(f_i) = Y_s(M,g), \end{aligned}$$

also $Q_g^s(f) = Y_s(M,g)$. Damit erfüllt f auch die nichtlineare gleichung

$$Y(f) = a \cdot Y_s(M,g) \cdot f^{s-1}.$$

Wir wenden nun Satz 17.13 mit $r = s$ an, wobei wir beachten, dass nach Voraussetzung $s > \frac{n}{2}(s-1)$, und erhalten $f \in C^\infty(M)$ und $f > 0$. □

Lemma 17.4 (Aubin)**.** *Sei* (M,g) *eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* $n \geq 3$, *und sei* $vol(M,g) = 1$. *Dann ist die Funktion* $[2,p] \to \mathbb{R}, s \mapsto Y_s(M,g)$ *monoton fallend.*

Entweder ist $Y_s(M,g)$ *für alle* $s \in [2,p]$ *negativ oder* $Y_s(M,g) \geq 0$ *für alle* $s \in [2,p]$. *Falls* $Y(M,g) \geq 0$, *so ist die Funktion* $s \mapsto Y_s(M,g)$ *linksstetig.*

Proof. Übung. □

Lemma 17.5 (Trudinger, Aubin). *Sei (M,g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, und sei $vol(M,g)=1$. Sei $Y(M,[g]) < Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])$. Für jedes $s \in [2,p)$ seien $f_s \in C^\infty(M)$, $f_s > 0$, $\|f_s\|_{L^s} = 1$ Lösungen des subkritischen Problems $Q_g^s(f) = Y_s(M,g)$ wie in Proposition 17.3. Dann gibt es ein $s_0 \in [2,p)$, ein $r > p$ und eine Konstante $C > 0$, so dass $\|f_s\|_{L^r} \leq C$ fur alle $s \in [s_0,p)$, d.h. die Lösungen sind gleichmäßig beschränkt in $L^r(M)$.*

Proof. Für $s \in [2,p)$ ist f_s eine Lösung von

$$\Delta f + a \cdot s_g f = a \cdot Y_s(M,g) \cdot f^{s-1} \tag{17.1}$$

mit $\|f_s\|_{L^s} = 1$

a). Sei $\delta > 0$. Multipliziere (17.1) mit $f_s^{1+2\delta}$ und integriere partiell:

$$\begin{aligned}\int_M a \cdot Y_s(M,g) \cdot f^{s+2\delta} dvol &= \int_M f_s^{1+2\delta}(\Delta f + a \cdot s_g f) dvol \\ &= \int (1+2\delta) f_s^{2\delta} |\nabla f_s|^2 + a \cdot s_g f^{2+2\delta}.\end{aligned}$$

Wir substituieren nun $u := f_s^{1+\delta}$ und erhalten dann mit $\nabla u = (1+\delta) f_s^{\delta} \nabla f_s$:

$$\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2} \int_M |\nabla u|^2 dvol = \int_M (a \cdot Y_s(M,g) \cdot u^2 \cdot f_s^{s-2} - a s_g \cdot u^2) dvol.$$

b) Fï $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 17.11 eine Konstante $C_1(\varepsilon) > 0$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p}^2 &\leq (1+\varepsilon) \cdot \sigma_n \cdot \|\nabla u\|_{L^2}^2 + C_1(\varepsilon) \cdot \|u\|_{L^2} \\ &\leq (1+\varepsilon) \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \frac{1}{a} Y(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n}) \cdot \int_M a Y_s(M,g) u^2 f_s^{s-2} dvol + C_2(\varepsilon) \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq (1+\varepsilon) \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \frac{Y_s(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])} \|u^2\|_{L^{(p/2)}} \cdot \|f_s^{s-2}\|_{L^{(p/2)^*}} + C_2(\varepsilon) \|u\|_{L^2}^2 \\ &= (1+\varepsilon) \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \frac{Y_s(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])} \|u\|_{L^p}^2 \cdot \|f_s\|_{L^{(p/2)^*(s-2)}}^{s-2} + C_2(\varepsilon) \|u\|_{L^2}^2 \\ &= (1+\varepsilon) \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \frac{Y_s(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])} \|u\|_{L^p}^2 \cdot \|f_s\|_{L^{n(s-2)/2}}^{s-2} + C_2(\varepsilon) \|u\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

denn $(p/2)^* = n/2$. Mit $s < p$ ist $s(n-2) < 2n$, also $\frac{n(s-2)}{2} < s$ und folglich $\|f_s\|_{L^{n(s-2)/2}} \leq \|f_s\|_{L^s} = 1$. Wir erhalten also:

$$\|u\|_{L^p}^2 \leq (1+\varepsilon) \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \frac{Y_s(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])} \|u\|_{L^p}^2 + C_2(\varepsilon) \|u\|_{L^2}^2$$

und schließlich

$$\left(1 - (1+\varepsilon) \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \frac{Y_s(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])}\right) \|u\|_{L^p}^2 \leq C_2(\varepsilon) \|u\|_{L^2}^2$$

c) Ist $Y_s(M,g) < 0$, so ist $Y_s(M,g) < 0$ für alle s und somit

$$\left(1 - (1+\varepsilon) \frac{(1+\delta)^2}{1+2\delta} \frac{Y_s(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])}\right) > 0.$$

Ist $Y_s(M,g) \leq 0$, so ist $Y_s(M,g)$ linksstetig in s, daher gibt es ein $s_0 \in [2,p)$, so dass $\frac{Y_{s_0}(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])} < 1$. Wegen der Monotonie in s ist dann auch

$$\frac{Y_s(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])} \leq \frac{Y_{s_0}(M,g)}{Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])} < 1.$$

für alle $s \in [s_0,p)$. Für hinreichend kleine $\varepsilon, \delta > 0$ ist somit

$$\|u\|_{L^p}^2 \leq C_3(\varepsilon,\delta) \|u\|_{L^2}^2.$$

d) Für hinreichend kleines $\delta > 0$ und $s \geq s_0$ ist $2(1+\delta) \leq s$, also gemäss unserer Substitution:

$$\|u\|_{L^2} = \|f_s^{1+\delta}\|_{L^2} = \|f_s\|^{1+\delta}_{L^{2(1+\delta)}} \leq \|f_s\|^{1+\delta}_{L^s} = 1.$$

Analog ist $\|u\|_{L^p} = \|f^{1+\delta}\|_{L^p} = \|f_s\|^{1+\delta}_{L^{p(1+\delta)}}$. Mit $r = p(1+\delta)$ erhalten wir also

$$\|f_s\|_{L^r} \leq C_3(\varepsilon,\delta)^{1/2(1+\delta)} =: C.$$

□

Theorem 17.6. *Sei (M,g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, und sei $vol(M,g) = 1$. Sei $Y(M,[g]) < Y(\mathbb{S}^n,[g_{\mathbb{S}^n}])$. Dann konvergiert für $s \to p$ eine Teilfolge der Lösungen f_s des subkritischen Problems gegen eine glatte positive Funktion f mit $Q_g(f) = Y(M,g)$ und $Y(f) = aY(M,g) \cdot f^{p-1}$.*

Proof. Die Lösungen f_s sind gleichmäig beschränkt in L^r für ein $r > p$ und für alle $s[s_0,p)$. Nach Satz 17.14 gibt es eine Konstante $C > 0$ so dass $\|f_s\|_{C^{2,\alpha}} \leq C$ für alle $s[s_0,p)$. Man kann zeigen, dass die Einbettung $C^{2,\alpha}(M) \subset C^2(M)$ kompakt, so dass es eine Folge $s_i \to p$ gibt, für die $f_{s_i} \to f$ in C^2. Damit. Wir erhalten:

$$Y(f) = aY_f^{p-1}$$

mit $Y_0 := \lim_{s_i \to p} Y_{s_i}(M,g)$. Insbesondere ist $\|f\|_{L^p} = \lim_{i\to\infty} \|f_s\|_{L^{s_i}} = 1$, also auch $f \not\equiv 0$. Nach Satz 17.13 ist dann $f \in C^\infty(M)$ und $f > 0$. Außerdem haben wir:

$$Q_g(f) = \frac{E_g(f)}{\|f\|_{L^p}} = \lim_{i\to\infty} \frac{E_g(f_{s_i})}{\|f_{s_i}\|_{L^p}} = \lim_{i\to\infty} Q_g^{s_i}(f_{s_i}) = \lim_{i\to\infty} Y_{s_i}(M,g) = Y_0.$$

Falls $Y(M,g) \geq 0$, so ist $s \to Y_s(M,g)$ linksstetig und damit $Y_0 = Y(M,g)$. Falls $Y(M,g) < 0$, so ist $s \to Y_s(M,g)$ monoton wachsend, also $Y_0 \leq Y(M,g)$. Andererseits ist $Y(M,g) \leq Q_g(f) = Y_0$, also auch in diesem Fall $Y_0 = Y(M,g)$. □

Folgerung 17.7. *Sei (M,g) eine zusammenhängende, geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, und sei $Y(M,g) < Y(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$. Dann gibt es eine konform äquivalente Metrik $\tilde{g}$ mit*

$$s_{\tilde{g}} \equiv Y(M,g).$$

17.1. **Anhang 1. Sobolevsche Ungleichung.**

Lemma 17.8 (Gagliardo-Nirenberg)**.** *Für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leq \frac{1}{2}\Pi_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x^i}\|_{L^1}^{\frac{1}{n}}.$$

Proposition 17.9. *Sei $n \geq 2$. Für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ alle $p,q \leq 1$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$*

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{p}{2}\frac{n-1}{n}\|\nabla u\|_{L^q}.$$

Proof. Wende Lemma 17.8 mit $\varphi = |u|^{p\frac{n-1}{n}}$ an. □

Im Spezialfall $q = 2$, also $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, also $p = \frac{2n}{n-2}$ gilt somit:

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq (\frac{n-1}{n-2})^2 \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Definiere

$$\sigma_n := \sup_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}}{\|\nabla u\|^2_{L^2}}.$$

Es gilt also

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq \sqrt{\sigma_n}\|\nabla u\|_{L^2} \text{ und } 0 < \sigma_n \leq (\frac{n-1}{n-2})^2.$$

Definition 17.10. σ_n heißt Sobolev-Konstante von $\mathbb{R}^n$ in Dimension $n \geq 3$.

In der Ungleichung $\|u\|^2_{L^p} \leq \sigma_n \|\nabla u\|^2$ gilt für die Function $u = u_\alpha$ Gleichheit. (Übung.)
Man kann diese Abschätzungen vom $\mathbb{R}^n$ auf Mannigfaltigkeiten übertragen

Theorem 17.11. *Sei $n \geq 2$, und sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann gilt:*

(i) Für alle $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ gibt es eine Konstante $C_1 > 0$ so dass gilt:

$$\|u\|_{L^p(M)} \leq 2\frac{p}{2}\frac{n-1}{n}\|\nabla u\|_{L^q} + C_1\|u\|_{L^q}.$$

(ii) Im Spezialfall $n \geq 3$, $q = 2$ haben wir: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C_3 > 0$ so dass gilt:

$$\|u\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(M)} \leq (1+\varepsilon)\sigma_n\|\nabla u\|^2_{L^2} + C_2\|u\|_{L^2}.$$

Theorem 17.12. *Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ oder (M, g) eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$.*

(1) Dann haben wir für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$, $p, q \in [1, \infty)$ mit $\frac{1}{q} \leq \frac{l}{n} + \frac{1}{p}$ stetige Inklusionen

$$W^{k+l,q}(M) \subset W^{k,p}(M).$$

(2) Dann ist für jedes $p, q \geq 1$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $l \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{q} < \frac{l}{n} + \frac{1}{p}$ die Einbettung

$$W^{k+l,q}(M) \subset W^{k,p}(M)$$

kompakt.

(3) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$, sei $0 < \alpha < 1$ und $1 \leq q < \infty$ mit $\frac{1}{q} \leq \frac{l}{n} - \frac{\alpha}{n}$. Dann haben wir stetige Einbettungen

$$H^{k+l,q}(M) \subset C^{k,\alpha}(M).$$

(4) Seine $k, l \in \mathbb{N}_0$, sei $0 < \alpha < 1$ und $1 \leq q < \infty$ mit $\frac{1}{q} < \frac{l}{n} - \frac{\alpha}{n}$. Dann ist die Einbettung

$$H^{k+l,q}(M) \subset C^{k,\alpha}(M)$$

kompakt.

□

17.2. **Anhang 2. Elliptische Regularität.**

Theorem 17.13 (Globale elliptische Regularität)**.** *Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Funktion $uL^1(M)$ löse die Gleichung*

$$\Delta u = f$$

im schwachen Sinne. Dann gilt:

(1) Ist $f \in W^{k,q}(M)$, so ist $u \in W^{k+2,q}(M)$. Ferner gibt es ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{W^{k+2,q}} \leq C \cdot (\|u\|_{W^{k,q}} + \|u\|_{L^q}).$$

(Ungleichungen dieses Typs bezeichnet man als elliptische Abschätzungen.)

(2) Ist $fC^{k,\alpha}(M)$, so ist $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$. Ferner gibt es ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}} \leq C \cdot \|u\|_{C^{k,\alpha}} + \|u\|_{C^\alpha})$$

(Ungleichungen dieses Typs bezeichnet man als Schauder-Abschätzungen.)

Theorem 17.14. *Sei (M, g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Seien $K_1, K_2 > 0$ sowie $0 < \alpha < 1$ und $p = \frac{2n}{n2}$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(M, g, K_1, K_2, \alpha)$, so dass für jedes $s \in [2, p]$, jedes $r > \frac{n}{2}(s-2)$ und jede schwache Lösung $fL^r(M)$ mit $f \geq 0$ von $Y(f) = \lambda \cdot f^{s-1}$ mit mit $|\lambda| \leq K_1$ und $\|f\|_{L^r} \leq K_2$ folgendes gilt:*

(1) $f \in C^\infty(M)$.
(2) $f \equiv 0$ oder $f > 0$.
(3) $\|f\|_{C^{2,\alpha}} \leq C$.

Proof. Sei $f \in L^r(M)$, $f \geq 0$, eine schwache Lösung wie oben mit $r > \frac{n}{2}(s-1)$. Dann gilt:

$$\Delta f = Y(f) - as_g f = \lambda \cdot f^{s-1} - as_g f \in L^q,$$

mit $q = \frac{r}{s-1}$. Satz 17.13 liefert dann $f \in W^{2,q}$. Nach Satz 17.12 haben wir $f \in L^{r_1}$ mit

$$r_1 = \frac{nq}{n-2q} = r\frac{n}{n(s-1)-2r} > r\frac{n}{n(s-1)-n(s-2)} > r.$$

Wiederholung dieses Argument knnen wir zeigen, dass $f \in L^q$ für alle $q \in [2, \infty)$. (Übung) Mit elliptischer Abscätzung haben wir $f \in H^{2,q}$ für alle $q \in [2, \infty)$. Dann Der Sobolevsche Einbettungssatz liefert $f \in C^\alpha$, wobei wir q so groß wählen, dass $\frac{1}{q} \leq \frac{2}{n} - \frac{\alpha}{n}$. Damit erhalten wir:

$$\Delta f = \lambda f^{s-1} - as_g f \in C^\alpha.$$

Die Schauder-Abschätzung lierfert also $f \in C^{2,\alpha}$, und auch $f \in C^\infty$.

(ii) folgt aus das Maximumprinzip.

□

18. Blow-up Analysis

Theorem 18.1 (Singularitätenhebungssatz)**.** *Sei (M^n, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n \geq 3$. Sei $x \in M$ und $h \in L^{n/2}(M)$. Sei $u \in L^q(M)$ eine schwache Lösung der Gleichung*

$$\Delta u + hu = 0$$

auf $M - \{x\}$ für ein $q > \frac{p}{2} = \frac{n}{n-2}$. Dann ist u eine schwache Lösung der Gleichung $(\Delta + h)u = 0$ auf ganz M.

Proof. Sei $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Zu zeigen ist dann:

$$\int_M u(\Delta + h)\varphi dx = 0.$$

Nach Voraussetzung ist das richtig, falls $x \notin \operatorname{supp}(\varphi)$. Wähle also eine glatte Funktion $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\eta(t) = 1$ für $t \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \eta(t) \leq 1$ für $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ und $\eta(t) = 0$ für $t \geq 1$. Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ betrachte die Abschneidefunktion $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(M)$, definiert durch $\eta_\varepsilon(y) := \eta\big(\frac{\operatorname{dist}(y,x)}{\varepsilon}\big)$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_M u(\Delta + h)\varphi dvol &= \int_M u(\Delta + h)((1 - \eta_\varepsilon)\varphi) + \int_M u(\Delta + h)(\eta_\varepsilon \varphi) \\
&= \int_M u(\Delta + h)(\eta_\varepsilon \varphi).
\end{aligned}$$

Zeige nun: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_M u(\Delta + h)(\eta_\varepsilon \varphi) = 0$.

Setze $K := \operatorname{supp}(\varphi)$.Für den Term mit dem Potential h finden wir:

$$\begin{aligned}
\|uh\varphi\|_{L^1(M)} & \quad C_1 \|uh\|_{L^1(K)} \\
&\leq C_1 \|h\|_{L^{n/2}(K)} \|u\|_{L^{(n/2)^*}(K)} \\
&\leq C_1 \|h\|_{L^{n/2}(K)} \|u\|_{L^q(K)} vol(K)^{\frac{q-p/2}{q \cdot p/2}} \\
&\leq C_2 \|h\|_{L^{n/2}(K)} \|u\|_{L^q(M)} < \infty
\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $uh\varphi$ integrierbar, und folglich $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_M uh\eta_\varepsilon \varphi = 0$ nach dem Satz über majorisierte Konvergenz.

Für den Term mit Δ berechnen wir (mit $r = \operatorname{dist}(, x)$):

$$\Delta(\eta_\varepsilon \varphi) = \varphi \Delta \eta_\varepsilon - 2\langle \nabla \eta_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle + \eta_\varepsilon \Delta \varphi.$$

Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned}
|\nabla \eta_\varepsilon &= |\eta' \cdot \frac{\nabla r}{\varepsilon}| \leq \frac{C}{\varepsilon}, \\
|\Delta \eta_\varepsilon| &= |\eta \Delta (\frac{r}{\varepsilon}) + \eta'' |\nabla \frac{r}{\varepsilon}|^2| \\
&\leq \frac{c}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist damit $\Delta(\eta_\varepsilon \varphi) \leq C\varepsilon^{-2}$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
|\int_M u \cdot \Delta(\eta_\varepsilon \varphi) dvol| &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{B_\varepsilon(x)} |u| dvol \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \|u\|_{L^q(B_\varepsilon(x)} \cdot vol(B_\varepsilon(x))^{1-1/q} \\
&\leq C\varepsilon^{-2+n(1-1/q)} \|u\|_{L^q} \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

denn

$$-2 + n(1 - 1/q) > 0 \Leftrightarrow q > \frac{n}{n-2}.$$

□