Satz 17.6 knnen wir auch durch die so-gennante "Blow-up-Methode" beweisen.

2. Beweis von Satz 17.6. Sei f_s die Lösung der subkritischer Gleichung mit $s \in [2, p)$. Wir haben 2 Fälle.

(a) $\limsup_{s \nearrow p} \max f_s < \infty$.
(b) $\limsup_{s \nearrow p} \max f_s = \infty$.

In Fall (a) haben wir $f_s \le C$ für $s \in [s_0, p)$ mit $s_0 \ge 2$. Nach elliptischer Abschätzung und Sobolevschem Einbettungssatz erhalten wir $\|f_s\|_{C^{k,\alpha}} \le C(K, \alpha)$ für bleibes $K \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann existiert eine Folge s_i ($s_i \to p$), so dass f_{s_i} gegen f in $C^{k,\alpha}$ konvergiert. It ist leicht to nachprüfen, dass f das Minimum of Q_g ist. Insbesondere, ist f eine Lösung von dem Yamabe-Problem.

Wir werden den Fall (b) durch die "Blow-up-Methode" ausschließen. Sei $x_k \in M$ mit $m_i = \max f_{s_k}$, und $m_i \to \infty$ mit $i \to \infty$ (und $s_i \nearrow p$). Da M kompakt ist, knnen wir annhemen, dass $z_k \to z_0 \in M$. Wähle die Normalkoordinaten um z_0, in den haben wir

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^2) \quad \text{ und } \det(g_{ij})(x) = 1 + O(|x|^2).$$

In der Normalkoordinaten bezeichnen wir z_k mit x_k. Insbesondere $x_k \to 0$ als $k \to \infty$. In der Normalkoordinaten ist die Gleichung von f_{s_k} durch

$$-\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\partial_j(\sqrt{g(x)}g^{ij}(x)\partial_i u_k + a s_g(x) u_i = a \cdot Y_{s_k} u_i^{s_k - 1}$$

gegebn, mit $u_k := f_{s_k} \circ x^{-1}$. OBdA nahmen wir an, dass die Gleichung in $|x| < 1$ definiert. Nun sezten wir

$$v(x) = m_k^{-1} u_k(\delta_k x + x_k), \tag{18.1}$$

wobei $\delta_k = m_k^{(2-s_k)}/2 \to 0$. (Also ist $v_k \circ \exp_{z_0}$ eine in einer Umgebung um z_0 loklae definierte Funktion.) Dann ist v_k definiert in $B_{\rho_i} \subset \mathbb{R}^n$ mit Raduis $\rho_i = (1 - |x_i|)/\delta_i \to \infty$, und erfüllt u_i die Gleichung

$$-\frac{1}{b_k}\partial_j(b_k(x) a^{ij}(x)\partial_i v_k) + c_k v_k = a \cdot Y_{s_k} v_k^{s_k - 1}, \tag{18.2}$$

$$\begin{array}{rcl} a_k^{ij}(x) & = & g^{ij}(\delta_k x + x_k) \to \delta_{ij} \\ b_k(x) & = & \sqrt{\det g(\delta_{ij} x + x_k)} \to 1, \\ c_k(x) & = & a m_k^{1-s_k} s_g(\delta_k x + x_k) \to 0. \end{array} \tag{18.3}$$

Die Konvergenz in (18.3) ist $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition haben wir

$$v_k \le v_k(0) \le 1.$$

Dann die Abschätzung liefert

$$\|v_k\|_{C^{2,\alpha}}(\overline{B}_R) \le C(R), \forall k \ge k(R),$$

wobei B_R ist der Ball um 0 mit Raduis R. Durch diagonalem Verfahren erhalten wir eine Teilefogle v_k mit $v_k \to v$ in $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n$. Aus (18.2) und 18.3) knnen wir leicht zeigen, dass v eine Lösung von

$$\Delta v - a \cdot \lambda v^{p-1} = 0, \tag{18.4}$$

wobei $\lambda = \lim_{i \to \infty} Y_{s_i}(M, g)$. $\lambda = Y(M, (g))$, falls $Y(M, (g)) \ge 0$. Sonst ist $\lambda \le 0$. (Lemma 17.14)

Wir berechnen

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{|x| < \frac{1}{2}\delta_k^{-1}} v_k^{s_k} dx & = & \delta_k^{\alpha_k} \cdot \displaystyle\int_{B_{\frac{1}{2}(x_k)}} u_k^{s_k} \sqrt{g} dx \\ & \le & \delta_k^{\alpha_k} \|u_k\|_{L^{s_k}}^{s_k} = \delta_k^{\alpha_k}, \end{array}$$

wober $\alpha_k = \frac{2s_k}{s_k - 2} - n > 0$. Daher folgt nach Lemma von Fatou

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^2 \le 1. \tag{18.5}$$

Ähnlich gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx < \infty.$$

Sei $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n$ eine Abscheidefunktion mit $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ in B_1 und $\eta = 0$ in $\mathbb{R}^n \backslash B_2$. Setze $v_R = \eta(\frac{x}{R}) \cdot v(x)$. Man kann zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla(v - v_R)|^2 + |v - v_R|^2) dx \to 0, \text{ als } R \to \infty.$$

Multiplikation (18.4) mit v_R und Integration über $\mathbb{R}^n$ liefern

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla v_R dx = a \cdot \lambda \int_{R^n} v^{p-1} v_R dx.$$

Mit (18.5) und der Grenzübergang von $R \to \infty$ erhlaten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx = a \cdot \lambda \int_{R^n} v^p dx. \tag{18.6}$$

Falls $\lambda \leq 0$, folgt aus (18.6) $v = const.$, also $v = 0$. Ein Wiederspruch. Also haben wir $\lambda > 0$, und damit $\lambda = Y(M, [g])$. Die Sobolevsche Umgelichung liefert

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p}^2 &\leq \sigma_n \|\nabla v\|_{L^2}^2 \\ &= a\sigma_n Y(M, [g]) \|v\|_{L^p}^2. \end{aligned}$$

Also

$$Y(M, [g]) \geq \frac{1}{a\sigma_n} = Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]),$$

ein Wiederspruch.

□

Diese Methode funktioniert in vielen geometrischen Probleme, z B., Minimalflächen, harmonische Abbildungen und Yang-Mills-Felder.

Mit ähnlicher Idee zeigen wir, dass das Yamabe-Funktional von der Standardmetrik der Sphäre nimmt sein Minimum an.

Theorem 18.2. *Für $n \geq 3$ gibt es eine positive Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ mit $Q_{g_{\mathbb{S}^n}}(f) = Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}])$.*

Idee des Beweises.

a) Seien $f_s \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$, $f > 0$ Lösungen des subkritischen Problems $Q^s_{g_{\mathbb{S}^n}}(fs) = Ys(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ für $s \in [2, p)$ mit der Normierung $\|f_s\|_{L^s} = 1$. Dann ist

$$Y(f_s) := \Delta + as_{g_{\mathbb{S}^n}} = aY_s(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) \cdot f_s^{s-1}.$$

Ersetze nun f_s durch $f_s \circ \Phi_s$ mit $\Phi_s \in \mathrm{Isom}\,(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n}) = O(n+1)$ so, dass die neue Funktion, wieder f_s genannt, in e_0 ihr Maximum annimmt.

Wie vorher sollen wir nur den Fall

$$\lim_{s \to p} (\max_{x \in M} f_s(x)) = \lim_{s \to p} f_s(e_0) = \infty$$

betrachten.

b) Sei $\kappa_\alpha \in \mathrm{Conf}\,(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ die konforme Abbildung, die auf $\mathbb{S}^n\{e_0\}$ durch $\kappa_\alpha := \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$ definiert ist. (Biespiel 16.5) Setze

$$g_\alpha := \kappa_\alpha^* g_{\mathbb{S}^n} = \big(\frac{u_\alpha}{u_1} \circ \sigma\big)^{p-2} \cdot g_{\mathbb{S}^n},$$

wobei

$$u_\alpha = \big(\frac{|x|^2 + \alpha^2}{\alpha}\big)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Setze $v_\alpha := \frac{u_\alpha}{u_1} \circ \sigma$. Dann ist $v_\alpha(-e_0) = \alpha^{-(n-2)/2}$. Wähle $\alpha_s > 0$ so, dass vs $v_{\alpha_s}(-e_0)^{-1} = f_s(-e_0)$ und setze

$$w_s := v_{\alpha_s} \cdot (f_s \circ \kappa_{\alpha_s}). \tag{18.7}$$

(Die Definition von w_s ist ähnlich wie v_k in (18.1).) Dann gilt:

$$\begin{aligned} w_s(-e_0) &= 1, \\ w_s(\hat{x}) &\leq \alpha_s^{(n-2)/} \cdot v_{\alpha_s}(\hat{x}), \text{ für } \hat{x} \in \mathbb{S}^n. \end{aligned}$$

Mit $\alpha_s^{(n-2)/2} = \max_{x \in \mathbb{S}^n} f_s(x) \to \infty$ folgt $\alpha_s \to \infty$, als $s \nearrow p$.

c). Der wichtige Punkt ist: E_g und $\|\cdot\|$ sind unter der Transformation 18.7 invariant, d.h.,

$$E_{\mathbb{S}^n}(w_s) = E_{\mathbb{S}^n}(f_s) \tag{18.8}$$

$$\|w_s\|_{L^p(\mathbb{S}^n)} = \|f_s\|_{L^p(\mathbb{S}^n)} \tag{18.9}$$

Der beweis von (18.9) folgt aus dem Tranformationssatz:

$$\begin{aligned} \|w_s\|_{L^p(\mathbb{S}^n)}^p &= \int_{\mathbb{S}^n} v_{\alpha_s}^p f_s \circ \kappa_{\alpha_s} dvol_{g_{\mathbb{S}^n}} \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} f_s \circ \kappa_{\alpha_s} dvol_{g_\alpha} \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} f_s dvol_{g_{\mathbb{S}^n}} = \|f_s\|_{L^p(\mathbb{S}^n)}^p. \end{aligned}$$

Der beweis von (18.8) folgt aus dem Tranformationssatz und Konforminvarianz des Yamabe-Operators (oder (18.10) unten). (Übung)

d) Aus (18.9) folgt

$$\begin{aligned} \|w_s\|_{H^1}^2 &\leq C_1 E(w_s) = C_1 E(f_s) \leq C_2 \|f_s\|_{H^1} \\ &\leq C_3 \|f_s\|_{H^{2,2n/(n+2)}} \quad \text{(Sobolev)} \\ &\leq C_4 \cdot (\|f_s^{s-1}\|_{L^{2n/(n+2)}}^2 + \|f_s\|_{L^{2n/(n+2)}}^2) \quad \text{(Abschätzung für } f_s) \\ &\leq C_4 \cdot (\|f_s\|_{L^{(s-1)2n/(n+2)}}^{2(s-1)} + \|f_s\|_{L^{2n/(n+2)}}^2) \\ &\leq C_5 (\|f_s\|_{L^s}^{2(s-1)} + \|f_s\|_{L^s}^2), \end{aligned}$$

da $(s-1)2n/(n+2) \leq s$ und $2n/(n+2) < 2 \leq s$.

Damit ist die Folge $(w_s)_s$ beschränkt in $H^1(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ unabhängig von s. Es gibt also eine Teilfolge $s_i \nearrow p$ und ein $w \in H^1(\mathbb{S}^n)$, so dass $w_{s_i} \rightharpoonup w$ in $H^1(\mathbb{S}^n)$.

d) Sei Y_α der Yamabe-Operator zur Metrik g_α. Dann ist

$$Y_{\alpha_s}(f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) = Y(f_s) \circ \kappa_{\alpha_s},$$

da $\kappa_\alpha : (\mathbb{S}^n, g_\alpha) \to (\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ eine Isometrie ist. Die Funktion w_s erfüllt

$$\begin{aligned} Y(w_s) &= Y(v_{\alpha_s} \cdot (f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \\ &= v_{\alpha_s}^{p-1} \cdot Y_{\alpha_s}(f_s \circ \kappa_{\alpha_s}) \\ &= v_{\alpha_s}^{p-1} \cdot Y(f_s) \circ \kappa_{\alpha_s} \\ &= v_{\alpha_s}^{p-1} \cdot a \cdot Y_s(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n}) \cdot f_s^{s-1} \circ \kappa_{\alpha_s} \\ &= a \cdot Y_s(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n}) v_{\alpha_s}^{p-s} \cdot w_s^{s-1}. \end{aligned} \tag{18.10}$$

e) Sei nun $K \subset \mathbb{S}^n - \{e_0\}$ kompakt und $\Omega \subset \mathbb{S}^n - \{e_0\}$ offen mit $K \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset \mathbb{S}^n - \{e_0\}$ Dann ist $\sigma(\overline{\Omega}) \subset B_R(0)$ für ein hinreichend großes $R > 0$. Damit ist

$$\frac{u_\alpha}{u_1} = u_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{|x|^2 + 1}{|x|^2 + \alpha^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \leq C(R) \cdot \alpha^{-(n-2)/2}.$$

Die rechte Seite der Gleichung (18.10) ist daher beschränkt. Mit der elliptische Regularität und des Sobolevschen Einbettungssatzes ist die Folge w_s beschränkt in $L^r(K)$ unabhängig von s.

Setze nun $K_j := \sigma^{-1}(\overline{B}_j(0))$. Dann ist $K_j \subset \mathbb{S}^n - \{e_0\}$ kompakt und $\cup_{j=1}^{\infty} K_j = \mathbb{S}^n - \{e_0\}$. Mit der diagonalen Verfahren und der elliptische Regularität kdironnen wir zeigen, dass eine Teilfolge von w_{s_i} gegen $w \in C^2(\mathbb{S}^n - \{e_0\})$ konvergiert in $C^2_{loc}(\mathbb{S}^n - \{e_0\})$.

Wegen $w_s(-e_0) = 1$ ist auch $w(-e_0) = 1$ und insbesondere $w \not\equiv 0$. Aus $w_s > 0$ folgt ferner $w \geq 0$.

f) Wir haben $Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) > 0$ schon bewiesen und somit gilt nach Lemma 17.4, dass $\lim_{s\to p} Y_s(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) = Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}])$ Die linke Seite in (18.10) konvergiert auf $\mathbb{S}^n - \{e_0\}$ lokal gleichmäßig gegen $\Delta w + as_{\mathbb{S}^n} w$. Die rechte Seite konvergiert gegen $a \cdot Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) H w^{p-1}$, wobei

$$H = \frac{\Delta w + as_{\mathbb{S}^n} w}{a \cdot Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) w^{p-1}},$$

wo w nicht verschwindet. Dort ist H insbesondere stetig. In der Nullstellenmenge von w und in e_0 können wir einfach $H = 1$ setzen. Nach Definition wissen wir dass $0 \leq v_\alpha \leq 1$ und damit auch $0 v_\alpha^{p-s} \leq 1$ für s nahe p. Also gilt $0 \leq H \leq 1$ auf ganz $\mathbb{S}^n$ und damit $H \in L^\infty(\mathbb{S}^n) \subset L^{n/2}(\mathbb{S}^n)$. Dann knnen wir Satz 18.1 benutzen und erhlaten dass, w im schwachen Sinn die Gleichung

$$\Delta w + as_{\mathbb{S}^n} = a \cdot Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) H w^{p-1}$$

auf ganz $\mathbb{S}^n$ erfüllt ist. In anderen Worten, für jedes $h \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{S}^n} (\Delta h + as_{\mathbb{S}^n}) w = \int_{\mathbb{S}^n} a \cdot Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) H h w^{p-1}.$$

Damit knnen wir durch die Approximation von $w_j \to w$ in H^1 (mit $w_j \in C^\infty$) zeigen

$$E(w) = Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) \int_{\mathbb{S}^n} H w^p dvol \leq Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) \|w\|^p_{L^p}. \tag{18.11}$$

Andererseits nach (18.9) knnen wir zeigen dass

$$\|w\|_{L^p} \leq 1.$$

Es folgt:

$$Q_{g_{\mathbb{S}^n}}(w) \leq Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) \|w\|^{p-2}_{L^p} \leq Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]).$$

g) Da $Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}])$ per Definition das Infimum von $Q_{g_{\mathbb{S}^n}}$ ist, muss $Q_{g_{\mathbb{S}^n}}(w) = Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}])$ gelten, d. h. w ist ein Minimierer von $Q_{g_{\mathbb{S}^n}}$. Ferner muss in (18.11) Gleichheit gelten, d. h. $H \equiv 1$. Somit ist w eine schwache Lösung der Gleichung $\Delta w + as_{\mathbb{S}^n} w = aY(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]) w^{p-1.}$

h) Man kann zeigen, dass $w \in L^r$ für ein $r > q$. Aus elliptischer Abschätzung folgt dann $w \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ ☐

19. Lösung des Yamabe-Problems

Das Yamabe-Problem ist durch die folgende zwei wichitge Sätzes bewiesen

Theorem 19.1 (Aubin (1978)). *Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 6$ und sei M nicht konform flach. Dann ist*

$$Y(M, [g]) < Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]).$$

Theorem 19.2 (Schoen (1984)). *Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ mit $Y(M, [g]) > 0$ und nicht konform äquivalent zur $\mathbb{S}^n$. Sei ferner $n \in \{3, 4, 5\}$ oder (M, g) konform flach. Dann ist*

$$Y(M, [g]) < Y(\mathbb{S}^n, [g_{\mathbb{S}^n}]).$$

Insbesondere ist das Yamabe-Problem dann lösbar.