Elementare Differentialgeometrie

Guofang Wang (Freiburg)

(SS 2020) Dieses Skript basiert auf dem Buch von Christian Bär “Elementare Differentialgeometrie”.

11.5.2020

Der Euklidische Raum

In dieser Vorlesung geht es (hauptsächlich) um differenziebare Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^n$, wobei zumeist $n = 3$ oder $n = 2$.

Skalarprodukt, Norm, Abstand

Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den Vektoreraum aller Spaltenvektoren mit n reellen Einträgen,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, \cdots, x^n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Das euklidische Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$$x \cdot y = \langle (x^1, \cdots, x^n)^t, (y^1 \cdots, y^n)^t \rangle = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j.$$

Die euklidische Norm ist gegeben durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Der Abstand $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $d(x, y) = \|x - y\|$.
$(\mathbb{R}^n, d)$ ein metrischer Raum

Der Winkel zwischen x und y? (Übung!)

Isometrie

Definition (Isometrie)

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heiß Isometrie, fass F injektiv und surjektiv ist und gilt:

$$d(F(x), F(x)) = d(x, y), \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel

a) Translation: $\tau_a(x) = x + a$, $(a \in \mathbb{R}^n)$
b) Rotation: $F_S(x) = Sx$, $S \in \mathbb{O}(n)$. (Orthogonale Gruppe)
c) Seien F_1, F_2 Isometrien. Dann ist $F_2 \circ F_1$ auch eine Isometrie.
$\tau_a \circ F_S = Sx + a$.

Man kann zeigen, dass die Menge der Isometrien vom $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe ist. Man nennt die Gruppe die Isometriegruppe.

Isometriegruppe

Theorem (Isometriegruppe von $\mathbb{R}^n$)

Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ sind die Abbildungen der From

$$F(x) = Sx + a \quad \textit{mit } S \in \mathbb{O}(n) \textit{ und } a \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Abbildungen nennt man auch eukldische Bewegungen (rigid motion auf Englisch).

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass jede solche Abbildung isometrisch und surjektiv ist.

Sei umgekehrt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie. Zunächst betrachten wir F mit $F(0) = 0$ und zeigen

$$\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Beweis

Beweis. Sei F Isometrie mit $F(0) = 0$.
Isometrie $\Rightarrow |F(x) - F(y)| = |x - y|$.

Dann folgt

$$|F(x)| = |x|.$$

Mit der Polarisationsformel

$$\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2}(|x - y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$$

schließ wir,

$$\begin{aligned} \langle F(x), F(y) \rangle &= -\frac{1}{2}(|F(x) - F(y)|^2 - |F(x)|^2 - |F(y)|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(|x - y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Beweis

Wir haben schon bewiesen

$$\langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Ist $e_1, \cdots, e_n$ die Standardbasis, so folgt

$$\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \tag{0.1}$$

d.h., $F(e_1), \cdots, F(e_n)$ ist wieder eine Orthonormalbasis, und es folgt für $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \langle F(x), F(e_i)\rangle F(e_i) = \sum_{i=1}^n x^i F(e_i).$$

Somit ist F eine lineare Abbildung. Mit (0.1) ist $F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$.

Sei schließlich $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie mit $F(0) = a \in \mathbb{R}^n$. Mit $\tau_{-a}(x) = x - a$ folgt dann $\tau_{-a} \circ F(0) = 0$, also $\tau_{-a} \circ F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$, bzw, $F(x) = Sx + a$.

Remark

Für eine Isometrie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Darstellung $F(x) = Sx + a$ eindeutig bestimmt, denn es gilt $a = F(0)$ und $S = DF(0)$ (sogar $S = DF(x) = D_x F$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$).

Hierbei ist $DF(x) = D_x F$ die Jacobi-Matrix in $x \in \mathbb{R}^n$

$$D_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

für $f = (f^1, \cdots, f^m)^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Speziell für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{grad} f = Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)^t$$

der Gradient.

eine Notation

Eine Gleichung der Form $f(x) = g(x) + O(h(x))$ für $x \to 0$ bedeutet, dass

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \leq C, \quad \text{für alle } x \neq 0 \text{ aus einer Umgebung von } 0,$$

Eine Gleichung der Form $f(x) = g(x) + o(h(x))$ für $x \to 0$ bedeutet, dass

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \to 0, \text{ mit } 0 \neq x \to 0.$$

Untervektorraum, Vektorprodukt

Für einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$V^\perp := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, y\rangle = 0, \forall\, y \in V\}$$

das orthogonale Komplement.

Das Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^3 - x^3y^2 \\ -x^1y^3 + x^3y^1 \\ x^1y^2 - x^2y^1 \end{pmatrix}.$$

Parametrisierungen

Definition (parametrisierte Kurve)

Eine parametrisierte Kurve ist eine C^∞-Abbildung

$$c : I \to \mathbb{R}^n,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall ist und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Das intervall I aus der definition kann offen, abgeschlossen oder halbabgeschlossen sein; auch kann I beschränkt oder unbschränkt sein.

Eine Abbildung $c(t)$ wird gegeben durch

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t))^t,$$

wobei $c_i : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion $\forall\ 1 \leq i \leq n$ ist.

c is genau dann C^∞, wenn $\forall\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ die Funktion c_i C^∞ ist.

Die Ableitung c' von c ist $c'(t) = (c'_1(t), c'_2(t), \cdots, c'_n(t))^t$.

Definition (reguläre parametrisierte Kurve)

Eine reguläre parametrisierte Kurve ist eine parametrisirte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^N$ mit

$$c'(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$.

Beispiel

a. (Die Gerade) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} c_0 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \to & p + vt, \end{array}$$

wobei $p, v \in \mathbb{R}^n$, ist eine parametrisierte Kurve. Ferner gilt $c'(t) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$, somit ist c genau dann regulär parametrisiert, wenn $v \neq 0$.

Beispiele

Beispiel

b. (Die Kreislinie in der Ebene mit Radius $r > 0$) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} c_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (r\cos t, r\sin t)^t, \end{array}$$

ist eine reguläre parametrisierte Kurve.

b'. (Die Kreislinie in der Ebene mit Radius $r > 0$) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} c_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (r\cos 2t, r\sin 2t)^t, \end{array}$$

ist eine reguläre parametrisierte Kurve.

c. (*Traktrix* oder *Schleppkurve*) Die Kurve

$$c(t) = (\sin t, \cos t + \ln\tan(t/2))^t$$

ist regulär auf $(0, \frac{\pi}{2})$, aber nicht regulär auf $(0, \pi)$, denn $c'(\frac{\pi}{2}) = (0,0)^t$.

Als Functionen $c_1 \neq c_2$. Aber das Bild von c_1 ist gleich das Bild von c_2, die Kreislinie.

Umparametrisierung

Definition (Umparametrisierung)

Seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $d : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre parametrisierte Kurven. Man sagt, dass d eine Umparametrisierung von c ist, g.d.w. ein Diffeomorphismus $\varphi : J \to I$ existiert mit

$$d = c \circ \varphi.$$

φ heißt eine Parametertransformation.

Ein Abbildung $\varphi : J \to I$ heißt Diffeomorphismus, g.d.w. sie eine C^∞-Bijektion und ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : I \to J$ auch C^∞ ist. Nach der Kettenregel gilt $(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$.

Damit eine Umparametrisierung einer regulär parametrisierten Kurve wiederum regulär ist, denn $d'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \neq 0$.

Im Beispiel 0.7 b ist die reguläre parametrisierte c_2 eine Umparametrisierung von c_1, denn $c_2 = c_1 \circ \varphi$ mit $\varphi(t) = 2t$.

Äquivalentrelation

Definition

Auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven wird die Relation " $\sim$ " definiert durch

$$d \sim c \Leftrightarrow d \text{ ist eine Umparametrisierung von } c.$$

Proposition

Die Relation " $\sim$ " ist eine Äquivalentrelation auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven.

Beweis. Wir müssen die Flexivität, die Symmetrie, und die Transitivität nachprüfen:

Reflexivität. ($c \sim c$):

Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Wähle $J := I$ und ein triviale Diffeomorphismus $\varphi = \mathrm{Id}_I$, dann ist $c = c \circ \varphi$, d.h. $c \sim c$.

Äquivalentrelation

Reflexivität. ($c \sim c$):

Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Wähle $J := I$ und ein triviale Diffeomorphismus $\varphi = \mathrm{Id}_I$, dann ist $c = c \circ \varphi$, d.h. $c \sim c$.

Symmetrie. ($d \sim c \Rightarrow c \sim d$): seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $d : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre parametrisierte Kurven so dass $d \sim c$.

Aus der Definition von $\sim$ existiert einer Diffoemorphismus $\varphi : J \to I$ mit $d = c \circ \varphi$. Ebenfalls ist seine Umkehrabbildung φ^{-1} ein Diffoemorphismus. Setze $\psi = \varphi^{-1}$. Dann gilt $c = d \circ \psi$, d.h., $c \sim d$.

Transitivität. ($d \sim c$ und $e \sim d \Rightarrow e \sim c$): seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ $d : J \to \mathbb{R}^n$ und $e : K \to \mathbb{R}^n$ reguläre parametrisierte Kurven mit $d \sim c$ und $e \sim d$.

Aus der Definition von $\sim$ folgt die Existenz zweier Diffeomorphismen $\varphi : J \to I$ und $\psi : K \to J$ mit $d = c \circ \varphi$ und $e = d \circ \psi$. Dann gilt $e = c \circ (\varphi \circ \psi)$ und $\varphi \circ \psi$ ist auch ein Diffeomorphismus. Somit gilt $e \sim c$. ■

Kurve

Definition (Kurve)

Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. " $\sim$ " von regulären parametrisirten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind. Wir bezeichnen mit $[c]$ die Äquivalenzklasse von c.

Definition (Spur einer Kurve)

Die Spur einer Kurve ist die Menge $c(I) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve ist.

Die Spur von $[c]$ ist wohldefiniert, denn: ist $d : J \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von $c : I \to \mathbb{R}^n$, so existiert ein Diifeomorphismus $\varphi : J \to I$ mit $d = c \circ \varphi$, und somit gilt $d(J) = c(\varphi(I)) = c(I)$.

Im Beispiel 0.7, die Spur von $[c_0]$ ist eine Gerade, und
die Spur von $[c_1]$ ist der Kreis $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = r^2\}$.

Orientierung

Eine parametertransformation kann die Richtung, in der die Bildkurve durchlaufen wird, entweder umkehren oder erhalten. $\varphi(t) = t$ ändert nichts an der parametrisierten Kurve, $\varphi(t) = -t$ dagegen kehrt den Durchlaufsinn um.

Definition (Orientierung)

Eine parametertransformation φ heißt
a) orientierungserhaltend, falls $\varphi'(t) > 0$.
b) orientierungsumkehrend,falls $\varphi'(t) < 0$.

Eine Umparametrisierung $d = c \circ \varphi$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), falls φ orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend) ist.

Jede parametertransformation ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend.

(Beweis: Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $\varphi'(t_1) < 0$ und $\varphi'(t_2) > 0$. Nach den Zwischenwertsatz existiert $t_3 \in (t_1, t_2)$ mit $\varphi'(t_3) = 0$. Das ist unmöglich.)

orientierte Kurve

Definition

Auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven wird die Relation "$\sim_+$" definiert durch

$$d \sim_+ c \Leftrightarrow \text{ d ist eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von c,}$$

Proposition

Die Relation " $\sim_+$ " ist eine Äquivalentrelation auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven.

Definition (orientierte Kurve)

Eine orientierte Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. " $\sim$ "$_+$ von regulären parametrisirten Kurven. Wir bezeichen mit $[c]_+$ die Äquivalenzklasse von c.

Jede Kurve hat genau zwei Orientierungen, d.h. es gibt genau zwei orientierte Kurven.

die Länge

Definition (Länge einer Kurve)

Die Länge einer Kurve $[c]$ ist definiert durch

$$L[c] := \int_I \|c'(t)\| dt,$$

wobei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve ist.

Proposition

Die Länge von $[c]$ ist wohldefiniert.

Beweis. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve und $d = c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von c. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_J \|d'(t)\| dt &= \int_J \|c'(\varphi)\varphi'(t)\| dt && \text{(Kettenregel)} \\ &= \int_J \|c'(\varphi)\| \cdot |\varphi'(t)| dt \\ &= \int_I \|c'(s)\| ds && \text{(Substitutionssatz mit } s = \varphi(t)\text{).} \end{aligned}$$

■

Die Länge von $c_0 = p + vt$ im Intervall $[t_0, t_1]$ ist

$$L[c_0] = \int_{t_0}^{t_1} \|v\| dt = (t_1 - t_0) \cdot \|v\|.$$

Die Länge von $c_1 = r(\cos t, \sin t)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ ist

$$L[c_1] = \int_0^{2\pi} \|c_1'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Parametrisierung nach Bogenlänge

Definition (nach Bogenlänge parametrisierte Kurve)

Eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt nach Bogenlänge parametrisiert g.d.w. für alle $t \in I$ gilt

$$\|c'(t)\| = 1.$$

Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $t_0 \in I$ fest. Für alle $t \in I$ mit $t > t_0$ gilt

$$L[c_{[t_0,t]}] = \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| ds = t - t_0.$$

Tatsächlich, $c : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle $t_0, t \in I$ mit $t > t_0$ gilt

$$L[c_{[t_0,t]}] = t - t_0.$$

Parametrisierung nach Bogenlänge

Proposition (Existenz der Umparametrisierung nach Bogenlänge)

("Eindeutigkeit") Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve. Dann existiert es eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c.
("Eindeutigkeit") Zwei Umparametrisierungen nach Bogenlänge von c unterscheiden sich durch eine affine Parametertransformation der Form

$$t \to \pm t + r_0,$$

für ein $r_0 \in \mathbb{R}$.

Beweis. (Existenz) Sei $t_0 \in I$ und sezte

$$\psi(t) := \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| ds.$$

die Länge Funktion von c

Existenz

Beweis. (Existenz) Sei $t_0 \in I$ und sezte

$$\psi(t) := \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| ds.$$

Die Funktion ψ ist C^∞ und $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0$ für alle $t \in I$. Sezte $J := \psi(I)$. Es ist klar, dass $\psi : I \to J$ eine Diffeomorphismus ist mit ihrer Umkehrabbildung $\varphi := \psi^{-1}$ und

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|c'(\varphi)\|}. \quad \text{(Ableitung von Umkehrabbildung)}$$

Setze $d = c \circ \varphi$. Dann ist d eine orentierungserhaltende Umparametrisierung von c und nach der Kettenregel gilt es für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} d'(t) &= c'(\varphi(t))\varphi'(t) \qquad\qquad (\varphi'(t) = \frac{1}{\|c'(\varphi)\|}) \\ &= \frac{c'(\varphi(t))}{\|c'(\varphi)\|}, \end{aligned}$$

so dass $\|d'(t)\| = 1$ für alle $t \in J$. Somit wird die Existenz bewiesen.

Eindeutigkeit

(Eindeutigkeit) Sei $e : K \to \mathbb{R}^n$ andere Umparametrisierung nach Bogenlaňge von c. Dann ist e auch eine Umparametrisierung von d (Sehe den Beweis der Transitivität der Relation $\sim$), d.h. ein Diffeomorphismus $\eta : K \to J$ so existiert, dass $e = d \circ \eta$. Aus

$$1 = \|e'(t)\| = \|d'(\eta(t))\| \cdot |\eta'(t)| = |\eta'(t)|,$$

haben wir

$$\eta(t) = \pm t + r_0,$$

für ein $r_0 \in \mathbb{R}$. ∎

Beispiele

a. Sei $c_0(t) = p + vt$ in Beispiele 1 gegeben. Im diesem Fall ist die im letzten Beweis angegebene Funktion ψ

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \|v\| ds = (t - t_0)\|v\|.$$

Ihre Umkehrabbildung ist $\varphi(t) = \psi^{-1} = t_0 + t\frac{1}{\|v\|}$. Die orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c_0 nun ist

$$\tilde{c}_0(t) = c \circ \varphi(t) = p + t_0 v + t\frac{v}{\|v\|} = \tilde{p} + t\frac{v}{\|v\|}.$$

b. Sei $c_1(t) = (r\cos t, r\sin t) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$. $(t_0 = 0)$. Dann haben wir

$$\psi(t) = \int_0^t r ds = rt, \quad \varphi(t) = \psi^{-1}(t) = \frac{t}{r}$$

mit $J := \psi([0, 2\pi)) = [0, 2r\pi)$. Die Abbildung

$$\tilde{c}_1(t) = c_1 \circ \varphi(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r}) : [0, 2r\pi) \to \mathbb{R}^2$$

ist die orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c_1.