Elementare Differentialgeometrie

Guofang Wang (Freiburg)

(SS 2020)

Dieses Skript basiert auf dem Buch von Christian Bär “Elementare Differentialgeometrie”.

13.5.2020

Ebene Kurven

Definition (ebene Kurve)

Eine ebene Kurve ist eine Kurve von $\mathbb{R}^2$ $c : I \to \mathbb{R}^2$.

Definition (Normalenfeld)

Sei $c : R \to \mathbb{R}^2$ *eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Das Normalenfeld zu* $c = (c_1, c_2)^t$ *ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} n: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & n(t) := Jc'(t) = \begin{pmatrix} -c_2'(t) \\ c_1'(t) \end{pmatrix}, \end{array}$$

wobei

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

c' (oder $\dot{c}$) ist das Tangentialfeld von der Kurve c. $c'(t)$ heiß auch der Geschwindigkeitsvektor.

(c', n) bilden eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$. Mit anderen Worten, wir drehen dem Geschwindigkeitsvector um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn. Insbesondere gelten $\|n(t)\|^2 = 1$, $n(t) \perp c'(t)$, und

$$\det\left(c'(t), n(t)\right) = 1.$$

(Beweis. $\det\left(c'(t), n(t)\right) = \det\begin{pmatrix} c_1' & -c_2' \\ c_2' & c_1' \end{pmatrix} = \|c'(t)\|^2 = 1.$)

Bemerkung.

- Das Normalenfeld n is C^∞.

- Das Normalenfeld (bzw. der Geschwindigkeitsvektor) hängt vom Durchlaufsinn ab. Setze $\bar{c}(t) = c(-t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{c}'(t) &= -c'(-t) \\ \bar{n}(t) &= -n(-t). \end{aligned}$$

Beispiele

Beispiel

a). $c(t) = p + vt$, $v \neq 0$, $\|v\| = 1$.

$$c'(t) = v, \quad n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v.$$

Beispiel

b) $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})^t$.

$$\begin{aligned} c'(t) &= (-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r})^t \\ n(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\frac{t}{r} \\ \cos\frac{t}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{r} \\ -\sin\frac{t}{r} \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}c(t). \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir messen, wie stark der Geschwindigkeitsvektor mit der Zeit t variiert.

Proposition

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und n das Normalenfeld zu c. Dann steht für jedes $t \in I$ der $c''(t)$ proportional zu $n(t)$.

Beweis. Wegen $\|c'(t)\|^2 = 1$ für alle $t \in I$ gilt beim Ableiten

$$\begin{aligned} 0 &= (\|c'\|^2)'(t) = \langle c', c'\rangle'(t) \\ &= \langle c'', c'\rangle(t) + \langle c', c''\rangle(t) \\ &= 2\langle c'', c'\rangle(t). \end{aligned}$$

Somit $c''(t) = \langle c'', c'\rangle c' + \langle c'', n\rangle n = \langle c'', n\rangle n.$ $\square$

die Krümmung

Nun definieren wir den wichtige Begriff der Differentialgeometrie:

Definition (Krümmung einer nach Bögenlänge parametrisierten Kurve)

Die Krümmung einer nach Bögenlänge parametrisierten ebenen Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ *ist die Funktion* $\kappa : I \to \mathbb{R}$ *so dass*

$$c''(t) = \kappa(t)n(t), \qquad \text{für alle } t \in I.$$

- $\kappa(t) = \langle c''(t), n(t) \rangle$ ist C^∞.

Beispiel

a). $c(t) = p + vt$, $v \neq 0$, $\|v\| = 1$. *Wegen* $c'(t) = v$ *für alle* t *gilt dann* $c''(t) = 0$ *und somit* $\kappa(t) = 0$.

b). $c(t) = (r \cos \frac{t}{r}, \sin \frac{t}{r})$. *Wir wissen, dass* $n(t) = -\frac{1}{r}c(t)$ *und*

$$c''(t) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{t}{r}) = -\frac{1}{r^2}c(t).$$

Damit gilt $c'' = \frac{1}{r}n$ *und* $\kappa = \frac{1}{r}$.

Definition (Krümmung einer parametrisierten ebenen Kurve)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Die Krümmung κ von c wird definiert durch

$$\kappa := \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}, \quad \kappa(t) = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}(t),$$

wobei $c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^2$ eine orinetierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ist mit Krümmung (in Sinne der Def.) $\kappa_{c\circ\varphi}$.

Bemerkung. Die Krümmung von c ist wohldefiniert, d.h., κ hängt nicht von der Wahl der orientierungserhaltenden Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ab. Denn: ist $c \circ \xi$ eine andere orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c, so existiert aus Proposition 1.16 ein $r_0 \in \mathbb{R}$ so dass $\xi(t) = \varphi(t + r_0)$ für alle t. Nun gilt für die Krümmung von $t \to c \circ \varphi(t + r_0) = c \circ \xi(t)$: $\kappa_{c\circ\xi}(t) = \kappa_{c\circ\varphi}(t + r_0)$ für alle t, und somit

$$\begin{aligned} \kappa_{c\circ\xi} \circ \xi^{-1}(t) &= \kappa_{c\circ\xi}(\xi^{-1}(t)) = \kappa_{c\circ\xi}(\varphi^{-1}(t) - r_0) \\ &= \kappa_{c\circ\varphi}(\varphi^{-1}(t) - r_0 + r_0) = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}(t), \end{aligned}$$

d.h. $\kappa = \kappa_{c\circ\xi} \circ \xi^{-1} = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}$.

Lemma (Krümmung einer parametrisierten ebenen Kurve)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Dann ist die Krümmung von c gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

(Übung !)

Proposition (Geometrische Interpretation der Krümmung)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ *eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve,* n *das Normalenfeld und* κ *die Krümmung von* c*. Sei* $t_0 \in I$*. Dann gilt für* $t \in I$

$$c(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\kappa(t_0)n(t_0) + (t - t_0)^3 o(t - t_0),$$

wobei $o(t - t_0) \to 0$ *als* $t \to t_0$.

Beweis. Bei Taylorentwicklung. $\square$

Satz (Frenet-Gleichungen)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ *eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve,* n *das Normalenfeld und* κ *die Krümmung von* c*. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix},$$

d.h.,

$$\begin{cases} c'' & = & \kappa \cdot n \\ n' & = & -\kappa \cdot c' \end{cases}$$