Elementare Differentialgeometrie

Guofang Wang (Freiburg)

(SS 2020)

Dieses Skript basiert auf dem Buch von Christian Bär “Elementare Differentialgeometrie”.

20.5.2020

Frenet-Gleichung

Satz (Frenet-Gleichungen)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld und κ die Krümmung von c. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix},$$

d.h.,

$$\begin{cases} c'' & = & \kappa \cdot n \\ n' & = & -\kappa \cdot c' \end{cases}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist die Definition der Krümmung κ.

Zur Zweite benutzen wir die folgende Formel

$$n'(t) = \langle n'(t), c'(t)\rangle c'(t) + \langle n'(t), n(t)\rangle n(t),$$

denn $\{c'(t), n(t)\}$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^2$.

Beim Ableiten der Gleichheit $\langle c', n\rangle = 0$,

$$0 = \langle c', n\rangle' = \langle c'', n\rangle + \langle c', n'\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle c', n\rangle = -\langle c'', n\rangle = -\kappa.$$

Analog wegen $\|n\|^2 = 1$ gilt

$$0 = (\|n\|^2)' = 2\langle n', n\rangle, \quad \Rightarrow \quad \langle n', n\rangle = 0,$$

somit wird die Zweite bewiesen.

Proposition (Invarianz der Krümmung unter euklidischer Bewegung)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei A eine oreintierungserhaltende euklidische Bewegung von $\mathbb{R}^2$. Setze $\tilde{c} := A \circ c : I \to \mathbb{R}^2$. Dann ist $\tilde{c}$ ebenfalls eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und es gilt für ihre Krümmung

$$\tilde{\kappa} = \kappa.$$

Beweis. Die euklidische Bewegung von $\mathbb{R}^2$, $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x) = Bx + v$ mit $B \in O(2)$, $v \in \mathbb{R}^2$. A ist orientierungserhaltend, g.d.w. $\det B = 1$, d.h., $B \in SO(2)$. Wegen $\tilde{c}(t) = Bc(t) + v$ für alle $t \in I$, gilt beim Ableiten

$$\tilde{c}'(t) = Bc'(t).$$

Da B eine orientierungserhaltende Transformation ist, gilt es

$$\tilde{n}(t) = Bn(t).$$

$(\det(Bc', Bn) = \det(B)\det(c', n) = 1.)$ Dann

$$\tilde{k} = \langle \tilde{c}''(t), \tilde{n}(t) \rangle = \langle Bc''(t), Bn(t) \rangle = \langle c''(t), n(t) \rangle = \kappa. \qquad \square$$

Bemerkung. Ist A orientierungsumkehrende, so gilt diesmal

$$\tilde{\kappa} = -\kappa.$$

Satz (Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven)

(Existenz) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung

$$\kappa = f.$$

(Eindeutigkeit) Seien c_1 und c_2 zwei nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit Krümmung $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Dann existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung A mit

$$c_2 = A \circ c_1.$$

Beweis. Zurnächst brauchen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz

Sei $A : I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ eine C^∞-Abbildung. Seien $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau eine C^∞-Abbildung $y : I \to \mathbb{R}^n$ so dass

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Ferner, falls $y_0 = 0$, dann gilt $y(t) = 0$ für alle $t \in I$.

(Existenz). Sei $t_0 \in I$ fest. Wir betrachten die folgende Gleichung

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' & = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t_0) & = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$. Aus dem Hilfssatz existiert eine eindeutige C^∞ Lösung $(v_1, v_2) : I \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Wir zeigen nun, dassfür alle t $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positiv ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden. Bei Ableiten haben wir

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1\rangle' &= 2\langle v_1', v_1\rangle = 2f\langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_2\rangle' &= 2\langle v_2', v_2\rangle = -2f\langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle' &= \langle v_1', v_2\rangle + \langle v_1, v_2'\rangle = f(\langle v_2, v_2\rangle - \langle v_1, v_1\rangle), \end{aligned}$$

insbesondere $(\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle)' = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 - \|e_2\|^2 \\ \langle e_1, e_2\rangle \end{pmatrix} = 0.$$

Durch die Anwendung des obigen Satzes, gilt

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}(t) = 0,$$

für alle $t \in I$. Zusammen mit $(\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle)' = 0$ ergeben sich

$$\|v_1(t)\| = \|e_1\| = 1, \|v_2(t)\| = \|e_2\| = 1, \langle v_1(t), v_2(t)\rangle = 0$$

für alle $t \in I$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden. Die Funktion $t \to \det(v_1(t), v_2(t))$ ist stetig und sie hat Werte in $\{-1, 1\}$. Also $\det(v_1(t).v_2(t)) = 1$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positive ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Jetzt setze

$$c(t) := \int_{t_0}^{t} v_1(s)ds.$$

Die Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^2$ ist C^∞, und es gilt: $c(t_0) = 0$, $c' = v_1$ und $c'' = v_1' = f v_2$. Aber $v_2 = n$, das Normalenfeld von c, denn $\{v_1(t), v_2(t)\}$ ist eine positive ONB von $\mathbb{R}^2$. Folglich haben wir

$$c'' = fn,$$

d.h., die Krümmung von c ist gleich f. Die Existenz ist bewiesen.

(Eindeutigkeit) 1. Fall. Seien c_1 und c_2 nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$ und $c_1(t_0) = c_2(t_0)$, $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$. Es is klar, dass $n_1(t_0) = n_2(t_0)$ gilt, wobei n_i das Normalenfeld von c_i ist. Aus den Frenet-Gleichungen gilt dann

$$\begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des obigen Hilfssattzes erhalten wir $c_1' - c_2' = n_1 - n_2 = 0$ auf I, und daher

$$\begin{aligned} c_2(t) &= c_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_2'(s)ds \\ &= c_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_1'(s)ds = c_1(t), \end{aligned}$$

d.h. $c_1 = c_2$.

2. Fall. Im allgemeinen Fall seien c_1, c_2 nach Bogenlänge parametrisierten Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Sei $t_0 \in I$ fest. Finde eine oerentirungserhaltende Transformation $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x) := Bx + v$ mit $\det B = 1$, so dass

$$\begin{cases} A(c_1(t_0)) & = & c_2(t_0), \\ Bc_1'(t_0) & = & c_2'(t_0), \\ Bn_1(t_0) & = & n_2(t_0). \end{cases}$$

Aus der Proposition 1 gilt dann

$$\kappa_{A \circ c_1} = \kappa_1 = f.$$

Wir wenden den 1. Fall auf $A \circ c_1$ und c_2 an und erhalten

$$A \circ c_1 = c_2.$$

$\square$

Definition (geschlossene Kurve)

Eine parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *heißt periodisch mit Periode* $L > 0$*, falls für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt* $c(t+L) = c(t)$*, und es kein* $0 < L' < L$ *gilt, so dass ebenfalls* $c(t+L') = c(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$*. Eine Kurve heißt geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.*

Beispiel

$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$ *ist eine periodische parametrisierte Kurve mit Periode* $L = 2\pi$*. Somit ist die durch diese parametrisierung repräsentierte Kurve geschlossenen.*

Nicht jede parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist periodisch:

$$c(t) = (\cos t^3, \sin t^3).$$

Definition (einfach geschlossene Kurve)

Eine geschlossene Kurve heißt einfach geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung c *mit Periode* L *hat, so dass*

$$c_{|[0,L)} : [0, L) \to \mathbb{R}^2$$

injektiv ist.

Lemma (Winkelfunktion)

(Existenz) Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Dann existiert es eine C^∞-Funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

(Eindeutigkeit) Ferner ist $\theta_2 : I \to \mathbb{R}$ eine andere C^∞-Funktion mit $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2(t) \\ \sin\theta_2(t) \end{pmatrix}$ für alle t, so existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\theta_2 = \theta + 2k\pi.$$

Beweis. (Eindeutigkeit). Angenommen, es gilt zwei Funktionen θ und $\theta_2 : I \to \mathbb{R}$ mit

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2(t) \\ \sin\theta_2(t) \end{pmatrix},$$

für alle $t \in I$. Dann gilt es zu jedem $t \in I$ eine eindeutiges $k(t) \in \mathbb{Z}$ so dass $\theta_2(t) - \theta(t) = 2k(t)\pi$. Weil $\theta_2 - \theta$ auf I stetig ist, muss k konstant auf I sein, d.h. es existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi, \quad \forall t \in I.$$

(Existenz). Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall. Die Menge $c'(I)$ ist in einem der folgenden Halbkreise enthalten:

$$S_R := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, x > 0\}, \qquad S_L := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, x < 0\}$$
$$S_O := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, y > 0\}, \qquad S_L := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, y < 0\}.$$

Sei die Menge $c'(I)$ z. B. in S_R, d.h. $c_1' > 0$. Für unsere Funktion θ muss also gelten

$$\frac{c_2'(t)}{c_1'(t)} = \frac{\sin\theta(t)}{\cos\theta(t)} = \tan\theta(t).$$

Also ist

$$\theta = \arctan\left(\frac{c_2'(t)}{c_1'(t)}\right) + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$.

Wird der Anfangswert $\theta(a)$ vorgegeben, so ist k und damit θ eindeutig festgelegt.

2. Fall. Im Allgemeinen kann man nicht voraussetzten, dass $c'([0,T]) \subset S_R$, bzw. S_L, S_O, S_U. Es existiert aber eine Teiling $\{0 =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := T\}$ von $[0,T]$ so dass

$$c'([t_i, t_{i+1}]) \subset S_R \text{ oder } S_L, S_O, S_U, \quad \forall i = \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

Dies folgt aus der Gleichmäßigsteigkeit von c' auf dem kompaktem $[0,T]$.

Wir wenden den 1. Fall auf $c'([t_0, t_1])$ an: Es existiert eine C^∞-Funktion $\theta_0 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ so dass $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0(t) \\ \sin\theta_0(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in [t_0, t_1]$.

Dann wenden wir wiederum den 1. Fall auf $c'([t_1, t_2])$ an mit der Bedingung $\theta_1(t_1) = \theta_0(t_1)$.

Rekursiv wenden wir den 1. Fall auf $c'([t_i, t_{i+1}])$ an mit der Bedingung $\theta_i(t_i) = \theta_{i-1}(t_i)$, und bekommen wir am Ende eine stückerwise glatte Funktion $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$, die durch $\theta_{[t_i, t_{i+1}]} := \theta_i$ definiert. Sie erfüllt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Eine solche Funktion θ ist C^∞ bei der Eindeutigkeit. $\square$

- Die Funktion θ misst den Winkel zwischen $c'(t)$ und der x-Achse.

Definition (Umlaufzahl)

Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, periodisch mit Periode L. Sie $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie Lemma 1. Dann heißt

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0))$$

Umlaufzahl von c.

Beispiel

Der Kreis vom Radius $r > 0$, $c(t) = (r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r})$ mit Periode $L = 2\pi r$. Der Tangentialverktor ist

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als Winkelfunktion

$$\theta(t) = \frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}.$$

und somit für die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi r) - \theta(0)) = 1.$$

Lemma

a). n_c ist stets eine Ganze Zahl, d.h., $n_c \in \mathbb{Z}$.
b). Sein c_1, $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zwei ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurven, periodisch mit Periode L. Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_2} = n_{c_1}.$$

Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungsumkehrende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_2} = -n_{c_1}.$$

Beweis. a). Die Periodizität $\Rightarrow \cos(\theta(L)) = \cos(\theta(0))$, $\sin(\theta(L)) = \sin(\theta(0))$ und somit

$$\theta(L) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

b) Sie $c_1 = c_2 \circ \varphi$. Die Parametertransformation hat die folgende Form

$$\varphi(t) = \pm t + r_0,$$

für $r_0 \in \mathbb{R}$, wobei das Vorzeichen davon anhängt, ob φ die Orientierung erhält oder umkehrt.

Ist θ_2 eine Winkelfunktion für c_2 wie im Lemma 1.32. Im orientierungserhaltenden Fall, ist $\theta_1 := \theta_2 \circ \varphi$ eine Winkelfunktion für c_1, denn

$$c_1'(t) = c_2'(t + r_0) = (\cos(\theta_2(t + r_0)), \sin(\theta_2(t + r_0))).$$

Aber $\tilde{\theta}_1(t) = \theta(t + L)$ ist auch eine Winkelfunktion für c_1, dann gilt

$$\begin{aligned} 2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) &= (\theta_2(L) - \theta_2(0)) - (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\ &= \theta_1(L - r_0) - \theta_1(-r_0) - (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\ &= (\tilde{\theta}_1(-r_0) - \tilde{\theta}_1(0)) - (\theta_1(-r_0) - \theta_1(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im orientierungsumkehrenden Fall sieht man, dass für eine Winkelfunktion θ_2 für c_2. Die Funktion $\theta_1 := \theta_2(-t + r_0) + \pi$ eine Winkelfunktion für c_1 ist, denn dann ist $\varphi(t) = -t + r_0$ und somit

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -c_2'(-t + r_0) \\ &= -(\cos(\theta_2(-t + r_0), \sin(\theta_2(-t + r_0)) \\ &= (\cos(\theta_2(-t + r_0) + \pi), \sin(\theta_2(-t + r_0) + \pi)). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 2\pi(n_{c_1} + n_{c_2}) &= (\theta_2(L) - \theta_2(0)) + (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\ &= \theta_1(-L + r_0) - \theta_1(r_0) + (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\ &= (\theta_1(-L + r_0) - \theta_1(0)) - (\tilde{\theta}_1(-L + r_0) - \tilde{\theta}_1(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Satz (Umlaufsatz)

Eine einfach geschlossene orientierte ebene Kurve hat Umlaufzahl 1 *oder* -1.

Lemma (Lifting)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig bgzl* x_0. *Sei* $e : X \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ *eine stetige Abbildung. Dann existierte eine stetige Abbildung* $\theta : X \to \mathbb{R}$ *so dass*

$$e(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x)).$$

(Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig* bzgl. $x_0 \in X$, falls für jeden Punkt $x \in X$ auch die Strecke zwischen x und x_0 ganz in X enthalten ist, d.h. für alle $t \in [0,1]$ gilt $tx + (1-t)x_0 \in X$.)

Bemerkung. Ist die Abbildung $e: X \to \mathbb{S}^1$ nicht surjektiv, so lässt sich die Abbildung $\theta: X \to \mathbb{R}$ viel leichter angeben.

Sei etwa $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ nicht im Bild von e. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Psi_k : (\phi_0 + 2\pi(k-1), \phi_0 + 2\pi k) & \to & \mathbb{S}^1 - \{(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)\}, \\ \Psi_k(t) & = & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

eine Homöomorphismus.

Dann definiere $\theta := \Psi_k^{-1} \circ e : X \to (\phi_0 + 2\pi(k-1), \phi_0 + 2\pi k)$. θ erfüllt

$$e(x) = \Psi_k \circ \theta(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x)).$$

Die Zahl k ist dann durch die Bedingung $\theta(x_0) = \theta_0$ eindeutig festgelegt. Insbesondere gilt

$$|\theta(x_1) - \theta(x_2)| < 2\pi, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Beweis von Lemma 1.39. Sei $x \in X$ und

$$\begin{aligned} e_x : [0,1] &\to \mathbb{S}^1 \\ e_x(t) &= e(tx + (1-t)x_0). \end{aligned}$$

Wörtlich wie im Beweis zur Existenz des Winkelfunktion erhält man eine Winkelfunktion θ_x mit

$$e_x(t) = (\cos\theta_x(t), \sin\theta_x(t))^t.$$

θ_x ist stetig, weil man lokal nach θ_x auflösen kann, je nachdem in welches Halbebene des Kreises man sich befindet. θ_x ist außerdem eindeutig nach Vorgabe von θ_0. Für das gesuchte $\theta : X \to \mathbb{R}$ kann dann nur gelten:

$$\theta(x) = \theta_x(1)$$

und ist somit eindeutig.

Wegen der Stetigkeit von

$$\tilde{e} : (t,x) \mapsto e(tx + (1-t)x_0) = e_x(t)$$

ist wegen der lokalen Auflösbarkeit auch

$$(x,t) \mapsto \theta_x(t)$$

stetig und insbesondere

$$x \mapsto \theta_x(1) = \theta(x).$$

Beweis des Umlaufsatzes. Durch einer Wahl der euklidischen Bewegung nehmen wir o.B.d.A. an, dass $c(t) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \le 0\}$, $c(0) = (0,0)$ und $c'(0) = (0,1)$. Setze $X := \{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le t_1 \le t_2 \le L\}$. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$e : X \to \mathbb{S}^1, \quad e(t_1,t_2) = \begin{cases} \dfrac{c(t_2) - c(t_1)}{\|c(t_2) - c(t_1)\|}, & t_2 > t_1 \text{ und } (t_1,t_2) \neq (0,L), \\ c'(t), & t_2 = t_1 = t, \\ -c'(0), & (t_1,t_2) = (0,L). \end{cases}$$

Die Abbildung e ist wohldefiniert und stetig, weil c als einfach geschlossen vorausgesetzt wurde. Wir wählen eine Funktion $\theta : X \to \mathbb{R}$ für e wie in Lemma 3. Wegen $e(t,t) = c'(t)$ ist $t \to \theta(t,t)$ eine Winkelfunktion wie in Lamma 1. Also die Umlaufzahl ist

$$2\pi n_c = \theta(L,L) - \theta(0,0) = \theta(L,L) - \theta(0,L) + \theta(0,L) - \theta(0,0)$$

Wir werden zeigen, dass $\theta(L,L) - \theta(0,L) = \pi$, $\theta(0,L) - \theta(0,0) = \pi$. Es folgt $n_c = 1$.

Wir werden zeigen, dass $\theta(L,L) - \theta(0,L) = \pi$, $\theta(0,L) - \theta(0,0) = \pi$.

Nun betrachten wir das Intervall $\{(0,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < t < L\}$. Für alle $0 < t < L$ $e(0,t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\}$. Also $e(0,t) \in \mathbb{S}^1 - \{(1,0)\}$ für alle $t \in (0,L)$. Wegen der Bemerkung nach Lemma 3 nimmt $t \to \theta(0,t)$ sein Bild in einem Intervall der Form $(2\pi k, 2\pi(k+1))$ an, $k \in \mathbb{Z}$. Wir haben

$$
\begin{aligned}
e(0,L) = -c'(0) = (0,-1) \quad &\Rightarrow \quad \theta(0,L) = \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \\
e(0,0) = c'(0) = (0,1) \quad &\Rightarrow \quad \theta(0,L) = \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k,
\end{aligned}
$$

somit gilt

$$\theta(0,L) - \theta(0,0) = \pi.$$

Analog ist $(-1, 0)$ nicht im Bild der Abbildung $t \to e(t, L) = \frac{-c(t)}{\|c(t)\|} \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\}$ und wir erhalten

$$\theta(L, L) - \theta(0, L) = \pi.$$

Also,

$$2\pi n_c = \pi + \pi = 2\pi.$$

$\square$