Elementare Differentialgeometrie

Guofang Wang (Freiburg)

(SS 2020)

Dieses Skript basiert auf dem Buch von Christian Bär "Elementare Differentialgeometrie".

20.5.2020

Definition (Konvexität)

Eine ebene Kurve heißt konvex, falls für jeden ihres Punktes gilt: Die Kurve liegt ganz auf einer Seite ihrer Tangente durch diesen Punkt.

Die Konvexitätabedingung für den Punkt $\Leftrightarrow c(t_0)$ gilt es

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } t$$

oder

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } t.$$

Lemma

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Normalenfeld n. Dann ist c genau dann konvex, wenn für alle $t, t_0 \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0$$

oder für alle $t, t_0 \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0.$$

Beweis. Angenommen falsch. Dann gibt es t_1 unf t_2 mit

$$\langle c(t) - c(t_1), n(t_1) \rangle \geq 0, \quad \text{und} \quad \langle c(t) - c(t_2), n(t_2) \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } t$$

Wir können zeigen, dass ein t_3 zwischen t_1 und t_2 derart existiert, dass

$$\langle c(t) - c(t_3), n(t_3) \rangle = 0, \quad \text{für alle } t$$

Es folgt, dass c eine Gerade sein muss. □

Satz

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge einer einfach geschlossenen ebenen Kurve. Sei $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Krümmung. Die Kurve ist genau dann konvex, wenn $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ Gemäß Lemma 1 können wir annehmen, dass für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0.$$

Die Taylorentwicklung gibt uns

$$c(t) = c(t_0) + c'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\kappa(t_0) n(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2).$$

Die Skalarmultiplikation mit $n(t_0)$ liefert uns wegen $\langle c'(t), n(t) \rangle = 0$

$$0 \leq \langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle = \frac{1}{2}\kappa(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

somit

$$\kappa(t_0) \geq 0$$

für alle $t_0 \in \mathbb{R}$.

b) $\Leftarrow$ Sei nun $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass die Kurve konvex ist.

Wäre die Kurve nicht konvex, so gäbe es ein t_0, derart dass die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle,$$

sowohl negativ als auch positiv Werte annimmt. Sei t_2 der Maximum-Punkt von φ, d.h.,

$$\varphi(t_2) = \max \varphi > 0.$$

Sei t_1 der Minimum-Punkt von φ, d.h.,

$$\varphi(t_1) = \min \varphi < 0.$$

Also

$$\varphi(t_1) < 0 = \varphi(t_0) < \varphi(t_2)$$

und

$$\varphi'(t_1) = \varphi'(t_2) = 0.$$

Aus $\varphi'(t_1) = 0$ folgt $\langle c'(t_1), n(t_0) \rangle = 0$. Also ist $c'(t_1) = \pm c'(t_0)$.

Analog folgt

$$c'(t_2) = \pm c(t_0).$$

Von $\{c'(t_0), c'(t_1), c'(t_2)\}$ müssen also mindestens zwei übereinstimmen.

Von $\{c'(t_0), c'(t_1), c'(t_2)\}$ müssen also mindestens zwei übereinstimmen.

Wir wählen $s_1, s_2 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass $c'(s_1) = c'(s_2)$, daraus gilt es

$$\theta(s_2) - \theta(s_1) = 2\pi k, \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Aus $\theta' = \kappa \geq 0$ folgt, dass θ monoton ist und somit $\theta(s_2) - \theta(s_1) \geq 0$ und $k \geq 0$. Analog folgt $\theta(s_1 + L) - \theta(s_2) = 2\pi l \geq 0$. Die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(s_1 + L) - \theta(s_1)) = k + l = 1$$

nach dem Umlaufsatz. Also muss $k = 0$ oder $l = 0$ gelten. Sei z. B., $k = 0$. Es folgt $\kappa = \theta' = 0$ auf $[s_1, s_2]$ und somit ist c auf $[s_1, s_2]$ eine Gerade, d.h., für alle $s \in [s_1, s_2]$

$$c(s) = c(s_1) + (s - s_1)c'(s_1) = c(s_1) \pm (s - s_1)c'(t_0). \quad \text{für alle } s \in [s_1, s_2]$$

Dann erhalten wir für die Funktion φ

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= \langle c(s) - c(t_0), n(t_0)\rangle \\
&= \langle c(s_1) \pm (s - s_1)c'(t_0) - c(t_0), n(t_0)\rangle \\
&= \langle c(s_1) - c(t_0), n(t_0)\rangle, \quad \text{für alle } s \in [s_1, s_2]
\end{aligned}$$

d.h., φ ist konstant auf $[s_1, s_2]$. Also $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$. Das ist unmöglich. $\square$

Definition

Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ *eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Man sagt,* c *hat einem* ***Scheitel*** *in* $t_0 \in I$*, falls*

$$\kappa'(t_0) = 0.$$

Ellipse, die parametrisiert ist durch

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ c(t) &= (a\cos t, b\sin t) \end{aligned}$$

mit $0 < a < b$. Die Krümmung von c ist

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} = \frac{\det\begin{pmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}\right\|^3} \\ &= \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

und

$$\kappa'(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2)\sin t\cos t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Also $\kappa'(t) = 0$ gilt genau dann, wenn $\sin t \cdot \cos t = 0$, d.h., $t = \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z}$.

Damit hat die Ellipse genau vier Scheitel in $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Satz (Vierscheitelsatz)

Ist $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte konvex ebene Kurve mit Periode* L*, dann hat* c *mindestens vier Scheitel in* $[0, L)$*.*

Lemma

Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als zwei Punkten, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden und hat damit insbesondere unendlich viele Schnitt Punkte mit der Geraden.

Lemma

Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als einem Punkt tangential, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden.

Beweis des Vierscheitelsatzes. Die Krümmung κ von c nimmt wegen der periodizität Maximum und Minimum an, somit haben wir schon zwei Scheitel.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass das Minimum in $t = 0$ und das Maximum in $t = t_0 \in (0, L)$ angenommen wird. Sei G die Gerade durch die beiden Punkte $c(0)$ und $c(t_0)$.

Gemäß Lemma 2 und Lemma 3 nehmen wir an, dass G keinen weiteren Punkte mit der Kurve gemein hat, ansonst die Krümmung auf einem ganzen Segment konstant 0 ist, und wir erhalten unendlich viele Scheitel.

Nach Anwendung einer euklidischen Bewegung können wir annehmen, dass G die x-Achse ist.

Angenommen, die Kurve hat keine weitere Scheitel. Dann verschwindet κ' nirgends auf den beiden Intervallen $(0, t_0)$ und (t_0, L).

Wegen $\int_0^L \kappa'(t) = \kappa(L) - \kappa(0) = 0$, muss κ' auf einen der beiden Intervall positiv, auf anderen negativ sein. Also nehmen wir ohne Einschränkung $\kappa'(t) > 0$ für $t \in (0, t_0)$ und $\kappa'(t) < 0$ für $t \in (t_0, L)$, somit

$$\int_0^L \kappa(t)' c_2(t) > 0.$$

Aber wir haben aus die Frenet-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\int_0^L \kappa'(t) c(t) dt &= -\int_0^L \kappa(t) c'(t) dt \\
&= \int_0^L n'(t) dt = n(L) - n(0) = 0,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Somit muss es einen dritten Scheitel geben, etwa in $t_1 \in (t_0, L)$.

Angenommen, es gäbe keinen vierten Scheitel. Dann nehmen wir ohne Einschränkung an, dass es $\{s_1, s_2\} \subset \{0, t_0, t_1\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass κ' auf (s_1, s_2) positiv und auf $\mathbb{S}^1 \backslash \{s_1, s_2\}$ negativ ist, existiert. Verwenden wir die obige Methode, erhalten wieder ein Widerspruch. $\square$

Beweis des Lemmas. Sie $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierung nach Bogenlänge mit Periode L. Durch eine Parametertransformation $t \to \pm t + r_0$ können wir erreichen, dass $c(0)$ eine drei Schnittpunkte mit der Geraden ist und $\kappa \geq 0$ erfüllt. Die Winkelfunktion θ aus Lemma 1.32 gilt $\theta'(t) = \kappa(t) \geq 0$. Nach dem Umlaufsatz ist $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi n_c = 2\pi$. Also ist

$$\theta : [0, L] \to [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$$

eine glatte monoton wachsende surjektive Funktion, wobei $\theta_0 = \theta(0)$ ist.

Die Kurve c schneide die Gerade G in den Punkten $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < L$. Sei G parametrisiert durch $t \cdot v + p_0$ mit $\|v\| = 1$. Sei $n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$ der Normalenvektor von G.

Sei I eines der drei Intervall $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ und $[t_2, L]$. In den Endpunkten I liegt c auf der Gerade G. Wenn $c(t)$ für alle $t \in I$ auf G liegt, so enthält c ein Segment von G und das Lemma ist bewiesen. Nehmen wir also an, dass es auch Punkte $t \in I$ gibt, so dass $c(t)$ nicht auf G liegt. Nun betrachten wir die zu G parallel Gerade G_s, die durch

$$t \to s \cdot n + t \cdot v + p_0$$

parametrisiert werden. Falls $\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} \neq \emptyset$, definiert $s_1 := \sup\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\}$. Falls $\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} = \emptyset$, muss $\{s < 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} \neq \emptyset$, dann $s_: = \inf\{s < 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\}$.

In jeden Fall schneidet G_{s_1} das Kurvestück $c_{|I}$ in einem Punkt τ aus dem Inneren von T tangetial, d.h., $c'(\tau) = \pm v$. Das Argument gilt für jedes Intervall $I = [0, t_1],$, $[t_1, t_2]$ oder $[t_2, t_3]$. Deshalb erhalten wir τ_1, τ_2, τ_3 mit $0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < t_3 < L$ und $c'(\tau_j) = \pm v$.

Nun wir bezeichnen θ_1 den eindeutigen Wert aus $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. for den $v = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)^t$ und $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi$ denjenigen mit $-v = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)^t$. OEdA, annehmen wir an, dass $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, ansosten tauschen wir die Rollen von θ_1 unf θ_2.

1. Fall. $\theta_1 > \theta_0$. Dann muss θ an den drei Stellen τ_1, τ_2, τ_3 jeweils einen der beiden Werte θ_1 oder θ_2 annehmen. Insbesondere muss θ an wenigstens zwei der frei Stellen gleich sein, z. B. $\theta(\tau_1) = \theta(\tau_2)$. Da θ monoton ist ($\theta' = \kappa \geq 0$), muss θ auf $[\tau_1, \tau_2]$ konstant sein. Also $\kappa = \theta' = 0$ auf $[\tau_1, \tau_2]$. Dann ist $c_{|[\tau_1, \tau_2]}$ ein Stück von der Gerade.

2. Fall. $\theta_1 = \theta_0$. Dann gibt es noch die Möglichkeit: $\theta(\tau_1) = \theta_1 = \theta_0$, $\theta(\tau_2) = \theta_2$ und $\theta(\tau_2) = \theta_0 + 2\pi$. Wieder wegen der Monotonie muss θ auf dem Intervall $[0, \tau_1]$ konstant sein. Dann ist $c_{|[0, \tau_1]}$ ein Stück von der Gerade. $\square$