Elementare Differentialgeometrie

Guofang Wang (Freiburg)

(SS 2020)

Dieses Skript basiert auf dem Buch von Christian Bär "Elementare Differentialgeometrie".

27.5.2020

Theorem (Isoperimetrische Ungleichung)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, berandet von der einfach geschlossenen ebenen Kurve c. Sei $A[G]$ der Flächeninhalt des Gebietes. Dann gilt

$$4\pi A[G] \leq L[c]^2.$$

Gleichheit hilt genau dann, wenn c ein Kreis ist.

Lemma

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, berandet von der einfach geschlossenen ebenen Kurve c. Sei $c(t) = (x(y), y(t))^t$ eine periodische Parametrisierung von c mit Periode L, die das Gebiet im mathematisch positiven Sinn umläuft, d.h., mit Umlaufzahl $+1$. Dann gilt:

$$A(G) = -\int_0^L x'(t)y(t)dt = \int_0^L x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt.$$

Beweis. Es folgt aus dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_G \operatorname{div} X \, dxdy = -\int_0^L \langle X, n(t)\rangle dt$$

mit außerem Normalfeld $-n$. Wähle $X = (x, y)^t$ in obiger Formel. Wir erhalten

$$\int_G \operatorname{div} X \, dxdy = \int_G 2 \, dxdy = 2A[G],$$

$$\int_0^L \langle X, n(t)\rangle dt = \int_0^L \langle \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \rangle dt = \int_0^L (-x(t)y'(t) + x'(t)y(t))dt$$

Aslo,

$$2A[G] = \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt.$$

Die beiden anderen Formeln folden durch partielle Integration.

Beweis der isoperimetrischen Ungleichung

Sei $c(t)(x(t), y(t))^t$ Parametrisierung von c nach Bogenlänge mit Periode L. Es ist klar, dass $L = L[c]$. Wir nehmen an, dass c das Gebiete im mathematisch positiven Sinn umläuft, ansonst betrachten wir $\bar{c}(t) = c(-t)$. Wir betracten die komplexwertige Funktion

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad z(t) = x(\frac{L}{2\pi}t) + iy(\frac{L}{2\pi}t).$$

z ist periodisch mit Periode 2π. Wir entwicheln z in eine Fourier-Reihe

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit den Fourier-Koeffiziten $c_k \in \mathbb{C}$. Wir könenn die Länge von c, $L[c] = L$ durch die Fourier-Koeffiziten c_k ausdrüchen

$$L^2 = L[c]^2 = (2\pi)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2. \tag{0.1}$$

Für $A[G]$ können wir mit Lemma 1 durch die Fourier-Koeffiziten c_k ausdrüchen

$$A[G] = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 \tag{0.2}$$

Von (0.1) und (0.2) erhalten wir

$$\frac{A[G]}{\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2},$$

und damit

$$4\pi A[G] \leq L[c]^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2},$$

d.h., genau dann, wenn all $c_k = 0$ für $k \neq 0, 1$. Die heißt gerade

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it},$$

d.h., c beschreibt einen Krei. $\square$

Beweis von (1). Einerseits gilt

$$\int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} (\frac{L}{2\pi})^2 \|c'(\frac{Lt}{2\pi})\|^2 = \frac{L^2}{2\pi}.$$

Andererseits gilt

$$z'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ike^{ikt}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} z'(t)\bar{z}'(t) dt &= \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_l k l e^{i(k-l)t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} |c_k|^2 k^2 dt. \end{aligned}$$

$\square$

Beweis von (2). Gemäß Lemma 1 gilt

$$
\begin{aligned}
2A[G] &= \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt \\
&= \int_0^L \Re(z(\frac{2\pi t}{L})\frac{2\pi t}{L} i\bar{z}'(\frac{2\pi t}{L}))dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Re(z(s)i\bar{z}'(s))ds \\
&= \int_0^{2\pi} \Re(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks} i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{c}_l(-i)le^{ils})ds \\
&= \Re \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} lc_k\bar{c}_k e^{i(k-l)} ds \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 2\pi.
\end{aligned}
$$

$\square$

Raumkurven

Definition

Eine parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ *ist parametrisierte Raumkurve. Analog sind reguläre parametrisierte Raumkuren, Raumkurven und orientierte Raumkurven definiert.*

Jetzt haben wir ein Problem, den Normalenvektor zu definieren.

Definition (Krümmung einer Raumkurve)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Die Funktion $\kappa : i \to \mathbb{R}, \kappa(t) := \|c''(t)\|$ heiß **Krümmung** *von c.*

Bemerkung. $a)$ Die Krümmung von c, $\kappa \geq 0$.

Ferner, verschwindet c'' nirgends auf I, so ist $\kappa \in C^\infty$.

$b)$ Jetzt die Orientierung hat "kein Sinn". Sei $\bar{c} : -I \to \mathbb{R}^3$ die durch $\bar{c}(t) := c(-t)$ definierte Abbildung, dann ist $\bar{c}$ nach Bonglänge parametrisiert und ihre Krümmung $\bar{\kappa}$ ist gegeben durch

$$\bar{\kappa}(t) = \kappa(-t)$$

für alle $t \in -I$.

$c)$ Da die Ebene im 3-dimensioanlen Raum enthalten ist, etwa als $x - y$-Ebene, können wir ebene Kurven auch als Raumkurven ansehen. Somit wir jetzt für ebene Kurven zwei verschieden Definitionen der Krümmung. Ist $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Krümmung $\tilde{\kappa} : I \to \mathbb{R}$, und ist $c = (\tilde{c}, 0) : I \to \mathbb{R}^3$ dieselbe parametrisierte Kurve, aufgefasst als Raumkurve mit Krümmung $\kappa : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\kappa(t) = \|c''(t)\| = \|(\tilde{c}''(t), 0)\| = \|\tilde{c}''(t)\| = |\tilde{\kappa}(t)|.$$

Definition (Normalvektor)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ *eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei* $t_0 \to I$ *und* $\kappa(t_0) \neq 0$*. Dann heißt*

$$n(t_0) := \frac{c''(t_0)}{\kappa(t_0)} = \frac{c''(t_0)}{\|c''(t_0)\|}$$

der ***Normalenvektor*** *von* c *in* t_0*.*

Definition (Binormalvektor)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ *eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei* $t_0 \in I$ *und* $\kappa(t_0) \neq 0$*. Dann heißt*

$$b(t_0) := c'(t_0) \times n(t_0)$$

der ***Binormalenvetor*** *von* c *in* t_0*.*

Definition

Die Orthonormalbasis $\{c'(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ *heißt* ***begleitendes Dreibein*** *von* c *in* t_0*.*

Definition (Windung)

Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ *eine Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei* $t_0 \in I$ *mit* $\kappa(t_0) \neq 0$*. Sei* $\{c'(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ *das begleitendes Dreibein von* c *in* t_0*. Dann heißt*

$$\tau(t_0) := \langle n'(t_0), b(t_0) \rangle$$

die Windung (oder auch die Torsion) von c *in* t_0*.*

Beispiel. (Schraubenlinie). Sei $c(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$ für $I = \mathbb{R}$. Aus $c'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, t)$ folgt $\|c'(t)\| = 1$ für alle t, d.h., c ist nach Bogenlänge parametrisiert. Aus $c''(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 0)$ folgt für die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Spur von $[c]$ heißt die Schraubenlinie. Ihre Normalenvektor und bzw. Binormalenvektor sind

$$n(t) = \frac{1}{\kappa(t)} c''(t) = -(\cos t, \sin t, 0),$$

bzw,

$$b(t) = c'(t) \times n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1).$$

Aus $n'(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$ gilt

$$\tau(t) = \langle n', b \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin^2 t + \cos^2 t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proposition (Frenet-Gleichungen der Raumkurve)

$c : I \to \mathbb{R}^3$ *eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung,* $\kappa(t) > 0$ *für alle* $t \in I$. *Sei* (c', n, b) *das begleitende Dreibein von* c. *Sei* τ *die Windung. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Gleichung $(c')' = \kappa \cdot n$ ise gerade die Definition des Normalenvektors. Die zweite Spalte ergibt sich aus $\langle n', c' \rangle = \langle n, c' \rangle' - \langle n, c'' \rangle = -\kappa$, aus $\langle n', n \rangle = \frac{1}{2}\langle n, n \rangle' = 0$ und aus der Definition von τ, d.h., $\langle n', b \rangle = \tau$.

Wegen $\langle b', n \rangle = \langle b, c' \rangle' - \langle b, c'' \rangle = 0 - \kappa\langle b, n \rangle = 0$, $\langle b', n \rangle = \langle b, n \rangle' - \langle b, n' \rangle = -\tau$ und $\langle b', b \rangle = 0$, folgt die dritte Spalte. $\square$

Definition (Die Schmiegebene)

$c : I \to \mathbb{R}^3$ *eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung,* $\kappa(t) > 0$ *für alle* $t \in I$*. Die von* $c'(t)$ *und* $n(t)$ *aufgespannte Ebene heißt* ***Schmiegebene*** *von* c *in* t*.*

Proposition (Invarianz der Krümmung und Torsion der euklidischen Bewegung)

$c : I \to \mathbb{R}^3$ *eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung und* A *eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung. Dann ist* $A \circ c : I \to \mathbb{R}^3$ *nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve und es gilt für die Krümmung bzw. die Windung von* $A \circ c$*:*

$$\kappa_{A \circ c} = \kappa, \quad \tau_{A \circ c} = \tau.$$

Satz (Hauptsatz der Raumkurventheorie)

(Existenz) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ C^∞ Funktionen, mit $f > 0$. Dann existiert eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit

$$\kappa = f, \quad \tau = g.$$

(Eindeitigkeit) Diese Kurve ist bis auf Dahinterschaltung von orientierungserhaltende euklidische Bewegung, d.h., sind c_1 und c_2 zwei Lösungen, so existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung A von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$c_2 = A \circ c_1 .$$