Elementare Differentialgeometrie

Guofang Wang (Freiburg)

(SS 2020)

Dieses Skript basiert auf dem Buch von Christian Bär "Elementare Differentialgeometrie".

3.6.2020

Reguläre Flächen

Definition (Reguläre Fläche)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. S heißt eine reguläre Fläche, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V von p im $\mathbb{R}^3$ gibt, falls es ferner eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^3$ gibt, so dass gilt

(i) *$F(U) = S \cap V$ und $F : U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.*

(ii) *Die Jacobimatrix $D_u F$ hat für jeden Punkt $u \in U$ Rang 2.*

Bemerkung. a). Eine reguläre Fläche kann sich nicht selbstschneiden.

b). $D_u F(e_1)$ and $D_u F(e_2)$ sind unabhängig.

Definition (Parametrisierung)

- *Die Abbildung $F : U \to S \cap V$ aus Definition 1 oder auch als das Tripel*

$$(U, F, V)$$

heißt lokale Parametrisierung von S um p.

- *Die Menge $S \cap V$ heißt Koordinatenumgebung von p.*
- *Die Komponenten u^1 und u^2 von $u = (u^1, u^2)$ heißen dann auch Koordinaten des Punktes $F(u) \in S$ (bzgl. der Parametrisierung F).*

Beispiel

1). Affine Ebene. Die affine Ebene durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^3$, *aufgespannt durch die linear unabhängigen Vektoren* $X, Y \in \mathbb{R}^3$ *ist die Menge*

$$S = \{p + u^1 \cdot x + u^2 \cdot Y \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Wir kommen mit einer einzigen Parametrisierung aus. Setzt $V := \mathbb{R}^3$, $U := \mathbb{R}^2$ *und* $F : U \to \mathbb{R}^3$

$$F(u^1, u^2) := p + u^1 \cdot X + u^2 \cdot Y.$$

2). Funktionsgraphen. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ *offen,* $f : U \to \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion. Der Funktionsgraph von* f *ist definiert durch*

$$S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Setzte $V := \mathbb{R}^3$, $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$. *Dann gilt* $F(U) = S = S \cap V$. F *is glatt und ihre Umkehrabbildung* $G : S \to U$, $G(x, y, z) = (x, y)$ *ist ebenfalls stetig. Also (i) ist erfüllt. Für (ii) hat die Funktion*

$$D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \textit{Rang } 2.$$

Beispiel

3). Die Sphäre: $S = \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
$V := V_3^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. *Dann ist* $\mathbb{S}^2 \cap V_3^+$ *der graph der Funktion*

$$f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \quad \textit{für } x^2+y^2 < 1.$$

Wie Beispiel 2) definiere $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ *und*

$$F_3^+(x,y) = (x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}).$$

$F_3^+ : U \to \mathbb{S}^2 \cap V_3^+$ *ist eine lokale Parametrisierung. Analog erhalten wir für die Punkte aus* $\mathbb{S}^2 \cap V_3^-$, $V_3^- := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$ *durch die Parametrisierung*

$$F_3^- : U \quad \to \quad \mathbb{R}^3, \qquad F_3^-(x,y) = (x, y, -\sqrt{1-(x^2+y^2)}).$$

Und auch

$$\begin{aligned} V_1^\pm : &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \pm x > 0\} \\ V_2^\pm : &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \pm y > 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1^\pm : U \to \mathbb{R}^3 \quad & F_1^\pm(y,z) = (\pm\sqrt{(1-(y^2+z^2)}, y, z) \\ F_2^\pm : U \to \mathbb{R}^3 \quad & F_1^\pm(x,z) = (x, \pm\sqrt{1-(x^2+z^2)}, z). \end{aligned}$$

Jeder Punkt $p \in \mathbb{S}^2$ *kommt in wenigstens einer der Mengen* $V_i^\pm$ *vor, also ist* $\mathbb{S}^2$ *eine reguläre Fläche.*

Proposition (als Niveaumenge)

Sei $V_0 \in \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : V_0 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir setzen

$$S := \{(x, y, z) \in V_0 \,|\, f(x, y, z) = 0\}.$$

Falls für alle $p \in S$ gilt

$$\operatorname{grad} f(p) \neq 0,$$

dann ist S eine reguläre Fläche.

Beweis. Sei $p := (x_0, y_0, z_0)^t \in S$. Wegen der Voraussetzung

$$\operatorname{grad} f(p) = (\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p))^t \neq (0, 0, 0)^t,$$

können wir oBdA annehmen, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizierte Funktionen existiert es eine Umgebung $V \subset V_0$ von p, eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$S \cap V = \{(x, y, g(x, y))^t \,|\, (x, y)^t \in U\}.$$

Setzen wir $F : U \to V$ mit

$$F(x, y) := (x, y, g(x, y))^t,$$

so erhalten wir eine lokale Parametrisierung von S.

Beispiel. 4) Ellipsoid: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Setze $V_0 = \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Also

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}.$$

Wir können überprüfen, dass

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right) \neq 0 \text{ für } (x, y, z) \in S.$$

Proposition (als Funktionsgraph)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ *eine reguläre Fläche und* $p \in S$. *Dann gibt es eine Umgebung* V *von* p *in* $\mathbb{R}^3$, *so dass* $S \cap V$ *der Funktionsgraph einer glatten Funktion ist, die eine der folgenden drei Formen hat:* $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$.

Beispiel. Der Doppelkegel.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2\}$$

ist keine reguläre Fläche. Aber $S \backslash \{0\}$ ist eine reguläre Fläche.
Beweis. Fläche S ist Nullstellengebilde der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

definiert. Der Gradient $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)^t$ verschwindet nur in $(0,0,0)^t$. Also man kann mit Proposition 1 zeigen, dass $S \backslash \{0\}$ eine reguläre Fläche ist. Proposition 1 sagt darüber nicht aus, dass die Funktion f könnte für den Punkt $(0,0,0)^t$ ungeschickt gewählt sein.

Angemonnen, dass S wäre eine reguläre Fläche. Dann gäbe es eine lokale Parametrisierung (F, U, V) um $p = (0,0,0)^t$. Setze $u_0 = F^{-1}((0,0,0)^t)$. OBdA können wir annemhen, dass U eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt u_0 ist. Da $V \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von $p = (0,0,0)^t$, sind alle Vektoren $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ mit hinrechend kleiner Länge in V enthalten. Insbesondere liegen in $S \cap V$ Punkte $p_i = (x_i, y_i, z_i)^t$ $(i = 1,2)$ mit $z_1 > 0$ und $z_2 < 0$.

Seien $u_i := F^{-1}(p_i)$ $(i = 1,2)$. In U verbinden wir u_1 durch einen stetigen Weg c mit u_2 ohne durch u_0 zu laufen. Der Bildweg $F \circ c$, der p_1 und p_2 verbindet, muss aber, wegen des Zwischenwertsatzes, durch $p = (0,0,0)^t = F(u_0)$ laufen. Ein Widerspruch $\square$

Proposition

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S. Sei $W \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, und $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $\varphi(W) \subset S \cap V$. Dann ist φ als Abbildung von W nach $\mathbb{R}^3$ glatt genau dann, wenn $F^{-1} \circ \varphi : W \to U \subset \mathbb{R}^2$ glatt ist.

Beweis.

"$\Leftarrow$" $\Psi = F^{-1} \circ \varphi$ ist glatt, so ist $\varphi = F \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen ebenfalls glatt.

"$\Rightarrow$" Sei also $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ glatt. Setze $g := \varphi(p) \in S \cap V$ und $u_0 := F^{-1}(g) \in U$. Schreiben $F(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2))$.

Weil das Differential $D_{u_0}F$ maximalen Rang hat, knnen wir o.E.d.A. annehmen, dass die 2×2- Matrix $(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1,u^2)}, u_0)$ invertierbar ist. Definieren die Abbildung:

$$\begin{aligned} G : U \quad &\times \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ G(u^1, u^2, t) \quad &= \quad (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) + t) \end{aligned}$$

Beweis. Ihr Differential an der Stelle $(u^1, u^2, t) = (u_0^1, u_0^2, 0)$ ist:

$$D_{(u_0^1,u_0^2,0)}G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial x}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial y}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial z}{\partial u^2}(u_0) & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist:

$$\det D_{(u_0^1,u_0^2,0)}G = \det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1,u^2)}(u_0)) \neq 0$$

Nach dem Umkehrsatz haben wir eine offene Umgebung $U_1 \subset U \times \mathbb{R}$ von $(u_0^1, u_0^2, 0)$ und eine offene Umgebung $V_1 \subset V$ von g, so dass $G_{|U_1} : U_1 \to V_1$ ein Diffeomorphismus ist. Setze $W_1 := \varphi^{-1}(V_1)$. Dann ist W_1 eine offene Umgebung von p. Für alle $p' \in W_1$ gilt:

$$G^{-1} \circ \varphi(p') = (F^{-1} \circ \varphi(p'), 0)$$

denn $G(F^{-1} \circ \varphi(p'), 0) = F \circ F^{-1} \circ \varphi(p') = \varphi(p')$. Weil $G^{-1} \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt ist, ist $F^{-1} \circ \varphi$ als die Erste der Zweite Koordinatenfunktionen auch glatt auf W_1. Nun ist W_1 eine offene Umgebung des beliebigen vorgegebenen Punktes p und die Aussage ist bewiesen. $\square$

Corollary

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ *eine reguläre Fläche, seien* (U_1, F_1, V_1), (U_2, F_2, V_2) *lokale Parametrisierungen von* S. *Dann ist* $F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ *glatt.*

Beweis. Anwendung von Prop.2.6. auf $W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$, $\varphi = F_1$ und $(U, F, V) = (V_2, F_2, V_2)$ □

Proposition

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ *eine reguläre Fläche,* $p \in S$, *und* $f : S \to \mathbb{R}^n$ *eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

1). *Es gibt eine offene Umgebung* V *von* p *in* $\mathbb{R}^3$ *und eine Fortsetzung* $\tilde{f}$ *von* $f_{S \cap V}$ *auf* V, *die um* p *glatt ist.*
2). *Es gibt eine lokale Parametrisierung* (U, F, V) *mit* $p \in V$, *so dass* $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ *um* $F^{-1}(p)$ *glatt ist.*
3). *Für alle lokalen Parametrisierungen* (U, F, V) *mit* $p \in V$, *so dass* $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ *um* $F^{-1}(p)$ *glatt ist.*

Beweis.

a. $1. \Rightarrow 3.$ Da F und $\tilde{f}$ glatt um p sind, also ist auch

$$f \circ F = \tilde{f} \circ F$$

als Verkettung eine glatte Abbildung auf einer Umgebung von $F^{-1}(p)$

b. $3. \Rightarrow 2.$ trivialerweise

c. $2. \Rightarrow 1.$ Aus dem Beweis von Prop.2.6. wissen wir, dass

$$G(u^1, u^2, t) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) + t)$$

ein lokaler Diffeomorphismus ist. Wir setzen:

$$g(u^1, u^2, t) := f \circ F(u^1, u^2) = f \circ G(u^1, u^2, 0)$$

g ist glatt nahe $(F^{-1}(p), 0)$. Setzen $\tilde{f} := g \circ G^{-1}$. $\tilde{f}$ ist glatt um p und ist eine Fortsetzung von f, denn:

$$\tilde{f}_{|S \cap V} = f_{|S \cap V}$$

$\square$