VRIATIONSRECHNUNG

Zusammenfassung.

1. Einleitung, Beispiele

Beispiel 1.1 (Isoperimetrisches Problem (*Problem der Dido*))**.**
Aufgabe. Finde die geschlossene Kurve einer vorgegebenen länge mit maximalem Inhalt.

Lösung. Kreis.

Beispiel 1.2. *Für die Kurve $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $u : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, ist die Länge definiert durch*

$$L(u) := \int_a^b |u'(x)| dx.$$

Sei $\mathcal{U} = \{u \in C^1([a, b], R^m) : u(a) = p, u(b) = q\}$ die Menge aller Kurven, welche p und q verbindet. Dies führt zum Problem der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten.

Aufgabe. Finde die Kurve in $\mathcal{U}$ mit kurzster Verbungung zwischen p und q.

Lösung. die Gerade.

Beispiel 1.3 (Geodätische)**.** *Es sei M eine Untermanigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, $p, q \in M$. Sei $\mathcal{U} = \{u \in C^1([a, b], M) : u(a) = p, u(b) = q\}$ die Menge aller Kurven, die auf M liegt und p und q verbindet.*

Aufgabe. Finde die Kurve in $\mathcal{U}$ mit kurzster Verbungung zwischen p und q.

Lösung. die Geodätische.

Beispiel 1.4 (Minimalflächen)**.** $(x, u(x)), x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ *sei eine Fläche (Graph) im $\mathbb{R}^3$. Ihre Oberfläche*

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

Aufgabe. Finde Fläche minimalen Inhalts, die die Randbedingung $u = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt.

Beispiel 1.5 (Dirichletsches Prinzip)**.** *Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$, ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen). Das Dirichletintegral (oder die Dirichletenergie) ist definiert durch*

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2(x) dx$$

Dirichletsches Prinzip: Konstruktion harmonischer Funktionen als Minimierer von E.

Beispiel 1.6 (Brachistochrone (Bernoulli, 1696))**.** *Aufgabe: Finde Kurve* $u = u(x)$ *zwischen den Punkten* $A = (0,0)$ *und* $B = (b_1, b_2)$ *mit* $b_1 > 0, b_2 > 0$, *so dass ein Körper in dem konstanten Schwerefeld* $F = (g, 0), g > 0$ *reibungsfrei möglichst schnell von* A *nach* B *kommt – bei Anfangsgeschwindigkeit* 0.

Lösung: Zykloidenbogen (Radkurve), obwohl längerer Weg als Verbindungsgerade.

Gegenstand der VL :Untersuchung von Extremalstellen von Variationsintegralen (oder Energie-Funktionalen):

$$u \mapsto \mathcal{F}(u) := \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))dx : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

auf Mengen $\mathcal{U} \subset \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N\}$.

$F(x, z, p)$ heißt *Lagrange Funktion.*

Idee: Verallgemeinerung von Extremwertmethoden für skalare Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- notwendige Bedingungen (analog zu $f'(x_0) = 0$ für $f \in C^1$).
- hinreichende Bedingungen (analog zu $f''(x_0) > 0$ oder < 0 für $f \in C^2$).
- Existenz globaler Extremwerte (analog zur Annahme der Extremwerte stetiger Funktionen auf Kompakta)

Definition 1.7. *Sei* $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. *Der "Punkt"* $u \in \mathcal{U}$ *heißt*

1. *(globale) Minimalstelle von* F, *falls* $\mathcal{F}(u) \le F(v)$, $\forall v \in \mathcal{U}$;
2. *strikte (globale) Minimalstelle von* $\mathcal{F}$, *falls* $\mathcal{F}(u) < F(v)$, $\forall v \in \mathcal{U}$;
3. *(strikte) lokale Minimalstelle von* $\mathcal{F}$, *falls* $\mathcal{U}$ *topologischer Raum ist, und eine offene Umgebung* $U \subset \mathcal{U}$ *von* u *existiert, so dass* u *eine (strikte) Minimalstelle von* $\mathcal{F}_{|U}$ *ist.*

Beispiel 1.8. *Für festes* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$F(u) := \int_0^1 (1 + u'(x)^2)^\alpha dx \qquad \textit{auf}\ \mathcal{U} := \{u \in C^1[0,1] | u(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

Das Infimum wird aber nicht angenommen.

Beispiel 1.9.

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 \qquad \textit{auf}\ \mathcal{U} = \{u \in C^1[0,1] | u(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

Das Infimum wird aber nicht angenommen. Aber $\mathcal{F}$ *nimmt das Infimum in* $\mathcal{U}_{Lip} = \{u \in Lip[0,1] | u(0) = 0, u(1) = 1\}$. *Weiter besitzt* $\mathcal{F}$ *unendlich viele Lösungen.*

2. Euler-Lagrange Gleichungen

Inhalt. Klassische Theorie, “indirekte Method”, d.h. Zugang mittels Differentialgleichungen (ohne Funktionalanalysis)

Fragen: Zuerst machen wir die Annahme, dass das Variationsproblem eine Lösung (z.B. Minimum) hat).

- Welche Gleichung erfüllt die Lösung?
- Welche Eigenschaften (z.B. Symmetrien) erbt sie vom Variationsintegral?

2.1. **ertse Variation.** Betrachte Funktional $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{U} \subset X$, X linearer Raum über $\mathbb{R}$. Sei $u_0 \in \mathcal{U}, \xi \in X$, sodass $\{u_0 + \epsilon\xi; |\epsilon| < \epsilon_0\} \subset \mathcal{U}$ für ein $\epsilon_0 > 0$ gelte. Setze

$$\phi(\epsilon) := \mathcal{F}(u_0 + \epsilon\xi), \text{ für } \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0).$$

Definition 2.1 (erste Variation)**.** *Falls $\phi'(0)$ existiert, heißt*

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) := \phi'(0)$$

erste Variation *von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ.*

Beispiel 2.2. *$X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_0 \in U$, $\mathcal{F} = f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = Df(\xi), \qquad \textit{für } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

D.h., die erste Variation of $\mathcal{F}$ ist die Richtungsableitung von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ.

Bemerkung 2.3. *Für einen (lokalen) Minimierer u_0 gilt*

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0, \qquad \textit{wenn } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \textit{ definiert ist} \tag{2.1}$$

(2.1) ist also eine *notwendige Bedingung* dafür, dass u_0 lokale Extremalstelle von $\mathcal{F}$ ist.

Definition 2.4. *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{U} \subset X \to \mathbb{R}$. $u_0 \in \mathcal{U}$ heißt stationärer Punkt (bzw. kritischer Punkt) von $\mathcal{F}$, falls*

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0, \qquad \forall \xi \in X, \textit{ für die } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \textit{ existiert.}$$

Bemerkung 2.5. *Sei $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0, \qquad \forall \xi \in X$, Dann ist u_0 lokale Extremalstelle von $\mathcal{F}$ oder Sattelpunkt.*

Beispiel 2.6. *$\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen. $\mathcal{F}(u) = E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$ und $\mathcal{U} = C^1(\Omega, \mathbb{R})$ oder $W^{1,2}(\Omega)$.*

Definition 2.7 (m-te Variation)**.** *Sei $m \in mathbbN$. Falls $\phi^{(m)}(0)$ existiert, heißt*

$$\delta^m\mathcal{F}(u_0, \xi) := \phi^{(m)}(0)$$

m-te Variation von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ.

Beispiel 2.8. *Sei $\mathcal{F}C^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_0 \in \Omega$:*

$$\delta^2\mathcal{F}(u_0, \xi) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial u_i \partial u_j}(u_0)\xi_i\xi_j$$

quadratische Form in ξ.

Bemerkung 2.9. *Sei $\mathcal{U}$ topologischer Raum. Hat $\mathcal{F}$ lokales Minimum (Maximum) an u_0, dann gilt:*

$$\delta^2\mathcal{F}(u_0, \xi) \geq 0 \quad (\leq 0), \qquad \forall \xi \in X, \textit{ für die } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \textit{ existiert.}$$

Bemerkung 2.10. *"Variation" ist ein "schwacher" Ableitungsbegriff; er benötigt keine Topologie auf X.*

3

4

5

6

7

8. Symmetrie und der Satz von Noether

Lemma 8.1. *Sei $U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi \in C^2((-\delta,\delta)\times U, \mathbb{R}^n)$, $\Phi = \Phi(t,x)$, mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\Phi_t : U \to \Phi_t(U) \subset \Omega$ ist Diffeomorphismus für alle t ($\Phi_t(x) = \Phi(t,x)$).*
(2) *$\Phi_0 = id_U$.*

Dann gilt für $g \in C^1((-\delta,\delta)\times\Omega)$ mit

$$\xi = \partial_t \Phi(0,\cdot)$$

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \int_{\Phi_t(U)} g(t,y)dy = \int_U (\partial_t g + \operatorname{div}(g\xi)).$$

Proof. Aus der Transformationsformel

$$\int_{\Phi_t(U)} g(t,y)dy \quad = \quad \int_U g(t,\Phi_t(x)) \det(D\Phi_t(x))dx,$$

gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}_{|t=0} \int_{\Phi_t(U)} g(t,y)dy &= \int_U \frac{d}{dt}_{|t=0} \left\{ g(t,\Phi_t(x)) \det(D\Phi_t(x)) \right\} dx \\
&= \int_U \{\partial_t g + D_x g \xi + g \frac{d}{dt}_{|t=0} \det(D\Phi_t(x))\} dx \\
&= \int_U \{\partial_t g + D_x g \xi + g \operatorname{tr}(D\xi)\} dx \\
&= \int_U \{\partial_t g + \operatorname{div}(g\xi)\} dx,
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} A(t) = \operatorname{tr} \frac{d}{dt}_{|t=0} A(0)$$

benutzen haben. Hier $A(t)$ ist eine Familie von Matrizen mit $A(0) = id$. □

Beispiel 8.2. *Sei $\Phi : (-\delta,\delta)\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ die Strömung mit Geschwindigkeitsfeld $\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0,\cdot)$. Sei $\rho = \rho(t,x)$ die zeitabhängigeg Dichte. Dann ist*

$$m(t,U) = \int_U \rho(t,x)dx$$

die zeitabhängige Masse im Gebiet $U \subset \Omega$. Wie die Masse durch die Strömung transportiert?

$$\frac{d}{dt} m(t, \Phi_t(U)) = \int_U (\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\xi)).$$

Massenerhaltung für alle $U \subset \Omega$ ist äquivalent zur Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\xi) = 0.$$

Lemma 8.3. *Sei $U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi \in C^2((-\delta,\delta)\times U, \mathbb{R}^n)$, $\Phi = \Phi(t,x)$, wie in vorherigem Lemma. Sei weiter $u \in C^2((-\delta,\delta)\times\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Setze*

$$\xi = \partial_t \Phi(0,\cdot), \qquad \eta = \partial_t u(0,\cdot).$$

Dann gilt für $\mathcal{F}(u) = \int_U F(x,u(x),Du(x))dx$ die Formel

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u_t \circ \Phi_t^{-1}, \Phi_t(U))_{|t=0} = \int_U \langle L_F(u), \eta - Du\cdot\xi\rangle + \int_U \operatorname{div}(H_F \xi + D_p F \eta).$$

Dabei ist

$$
\begin{aligned}
L_F(u)_i &= -\sum_\alpha \partial_\alpha(\partial_{p_{i\alpha}}F) + \partial_{z_i}F) \qquad \textit{EL-Oprator} \\
H_F(u)_{\alpha\beta} &= F\delta_{\alpha\beta} - \sum_i \partial_{p_{i\alpha}}F\partial_\beta u_i \qquad \textit{Hamiltonopeartor} \\
(D_pF\eta)_\alpha &= \partial_{p_{i\alpha}}F\eta_i
\end{aligned}
$$

Proof. Nach Definition gilt

$$
\mathcal{F}(u_t\circ\Phi_t^{-1},\Phi_t(U)) = \int_{\Phi_t(U)} F(y, u_t\circ\Phi_t^{-1}(y), D(u_t\circ\Phi_t^{-1})(y))dy
$$

Nach Lemma 8.1 haben wir

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u_t\circ\Phi_t^{-1},\Phi_t(U))_{|t=0} &= \int_U \left\{\frac{d}{dt}_{|t=0} F(x, u_t\circ\Phi_t^{-1}, D(u_t\circ\Phi_t^{-1})) + \operatorname{div}(\xi F(x,u,Du(x)))\right\}dx \\
&= \int_U \left\{\partial_{z_i}F(\eta^i - \partial_\alpha u^i\xi^\alpha) + \partial_{p_{\alpha i}}F\partial_\alpha(\eta^i - \partial_\beta u^i\xi^\beta)\right\}dx \\
&\quad + \int_U \operatorname{div}(\xi F(x,u,Du(x)))dx \\
&= \int_U L_F(u)_i(\eta^i - \partial_\alpha u^i\xi^\alpha) + \int_{\partial U}\partial_{p_{\alpha i}}F(\eta^i - \partial_\beta u^i\xi^\beta)\nu_\alpha \\
&\quad + \int_U \operatorname{div}(\xi F(x,u,Du(x)))dx \\
&= \int_U L_F(u)_i(\eta^i - \partial_\alpha u^i\xi^\alpha) + \int_U \partial_a(D_{p_{\alpha i}}F\eta^i) - \partial_\alpha(\partial_{p_{\alpha i}}F\partial_\beta u^i\xi^\beta) \\
&\quad + \int_U \operatorname{div}(\xi F(x,u,Du(x)))dx \\
&= \int_U L_F(u)_i(\eta^i - \partial_\alpha u^i\xi^\alpha) + \operatorname{div}(H_F\xi + D_pF\eta),
\end{aligned}
$$

wobei wir dem Gaußen Integralsatz wzei mal benutzen, und auch die Formeln

$$
\frac{d}{dt}_{|t=0} u_t\cdot\Phi^{-1} = \eta - \partial_\alpha u\xi^\alpha, \quad \frac{d}{dt}_{|t=0}\Phi^{-1} = -\xi.
$$

□

Betrachte nun eine Einparameterschar von Diffeomorphismen des (x,z)-Raums:

$$
(x,z) \mapsto (f_t(x,z), g_t(x,z)) \in \Omega\times\mathbb{R}^N
$$

$$
f_0(x,z) = x, \qquad g_0(x,z) = z.
$$

Hierdurch wird für jedes $u\in C^2(U,\mathbb{R}^N), U\subset\Omega$, eine Schar von transformierten Abbildungen erzeugt: Erste definiere die zugehörigen Vektorfelder

$$
X(x,z) := \frac{\partial f}{\partial t}(0,x,z), \quad Z(x,z) := \frac{\partial g}{\partial t}(0,x,z).
$$

Dann definiere

$$
\Phi(t,x) = f(t,x,u(x)), \quad \xi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x) = X(x,u(x)) \tag{8.1}
$$

und

$$u(t,x) = g(t,x,u(x)), \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = Z(x,u(x)). \tag{8.2}$$

Definition 8.4. *Das Variationsintegral $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(\cdot, u, Du)$ heißt infinitesimal invariant bezüglich (f_t, g_t), falls gilt:*

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{F}(u_t \circ \Phi_t^{-1}, \Phi_t(U)) = 0$$

für alle $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, und alle $U \subset\subset \Omega$.

Theorem 8.5 (Noether)**.** *Das Variationsintegral $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))dx$ sei ininitesimal invariant bezüglich (f_t, g_t). Dann gilt für jede Lösung $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ der Euler-Lagrange-Gleichungen (d.h., $L_F u = 0$) der Erhaltungssetz*

$$\operatorname{div}(H_F \xi + D_p F \eta) = 0.$$

Dabei ist H_F der Hamiltontensor und sind ξ, η durch (8.1), (8.2) *definiert.*

Beispiel 8.6. *Sei $F = F(p, z)$. Dann ist $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(u, Du)$ (infinitesimal) invariant under der Translation des Raums $\mathbb{R}^n$:*

$$f_t(x,z) = x + te_\gamma, \qquad \gamma = 1, 2, \cdots, n.$$

Mit $g_t(x,z) = z$ haben wir

$$\Phi(t,x) = f(t,x,u) = x + te_\gamma, \quad \xi = \partial_t \Phi(0,x) = e_\gamma$$

und

$$u(t,x) = g(t,x,u(x)) = u(x), \quad \eta = 0.$$

$\mathcal{F}$ ist invariant

$$\mathcal{F}(u_t \circ \Phi_t^{-1}, \Phi(U)) = \int_{\Phi(U)} F(u, Du)(\Phi^{-1}(y))dy = \int_U F(u, Du)dx = \mathcal{F}(u, U).$$

Falls u eine Lösung der EL-Gleichung, dann gilt nach Satz von Noether

$$\partial_\alpha \left\{ F(u(x), Du(x)\xi) e_\gamma^\alpha - \partial_{p_{i\alpha}} F(u(x), Du(x)) \partial_\gamma u^i \right\} = 0.$$

Also

$$\partial_\gamma (F(u(x), Du(x)) - \partial_\alpha (\partial_{p_{i\alpha}} F(u(x), Du(x)) \partial_\gamma u^i) = 0.$$

Falls $n = N = 1$, dann haben wir

$$\{F(u(t), u'(t)) - \partial_p F(u(t), u'(t))\}' = 0,$$

also

$$F(u(t), u'(t)) - \partial_p F(u(t), u'(t)) = const.$$

Sehen Sie Aufgabe 4 in Serie 2.

Beispiel 8.7. *Was ist die Invarianz des Funktionals*

$$\mathcal{F}(u) = \int \{\frac{1}{2}|Du|^2 - |u|^p\}$$

$$f_t(x) = e^t x, \quad \Phi_t(x) = e^t x, \quad \xi(x) = x$$
$$g_t(z) = e^{\lambda t} z, \quad u(t,x) = e^{\lambda t} u(x), \quad \eta(x) = \lambda u(x).$$

Man kann leicht nachprüfen: Setze

$$\Omega_\lambda := f_t(\Omega) = e^t \Omega, \quad \mathcal{F}_1 = \int_\Omega |Du|^2, \quad \mathcal{F}_2 = \int_\Omega |u|^p.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(u_t \circ \Phi_t^{-1}, \Phi_t(\Omega)) &= \int_{\Omega_\lambda} |D(u_t \circ \Phi_t^{-1})(y)|^2 dy \\ &= e^{2\lambda t - 2t} \int_{\Omega_\lambda} |Du(e^{-t}y)dy \\ &= e^{(2\lambda - 2 + n)t} \int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(u_t \circ \Phi_t^{-1}, \Phi_t(\Omega)) &= \int_{\Omega_\lambda} |u_t \circ \Phi_t^{-1})(y)|^p dy \\ &= e^{(p\lambda + n)t} \int_{\Omega_\lambda} |u(x)|^p dx.\end{aligned}$$

Es folgt dass $\mathcal{F}_1$ invariant ist falls

$$\lambda = -(n-2)/2$$

und $\mathcal{F}_2$ invariant ist falls

$$\lambda = -n/p.$$

Jetzt betrachten wir den Fall $p = 2n/(n-2) = 2^*$. In diesem Fall, $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ sind invariant wenn wir $-\lambda = -(n-2)/2$ wählen. Falls u ein kritischer Punkt ist, dann Nach Noether gilt

$$\partial_\alpha \left\{ (\frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{p}|u|^p) x^\alpha - \partial_\alpha u \partial_\beta u x^\beta - \frac{n-2}{2} u \partial_\alpha u \right\} = 0,$$

da

$$H_{F\alpha\beta} = (\frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{p}|u|^p)\delta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha u \partial_\beta u, \quad D_p F \eta_\alpha = -\frac{n-2}{2} u \partial_\alpha u.$$

Äquivalent gilt

$$\operatorname{div} \left\{ (\frac{1}{2}|Du|^2 - \frac{1}{p}|u|^p) x - Du(Du \cdot x) - \frac{n-2}{2} u Du \right\} = 0,$$

Beispiel 8.8. *Wir untersuchen das Funktional*

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega |Du|^p dx$$

under der Transformationen

$$f_t(x) = e^t x, \quad g_t(x,z) = e^{-\frac{n-p}{p}t} z.$$

Berechne

$$\Phi(t,x) = e^t x, \quad \xi = x$$

und

$$u(t,x) = e^{-\frac{n-p}{p}t} u(x), \quad \eta = -\frac{n-p}{p} u(x),$$

$$(H_F)_{\alpha\beta} = |Du|^p \delta_{\alpha\beta} - p|Du|^{p-2} \partial_\alpha u \partial_\beta u, \quad (D_p F \eta)_\alpha = -(n-p)|Du|^{p-2} u \partial_\alpha u.$$

Wir haben die Erhaltungesetz

$$\operatorname{div} \left\{ (Du \cdot x + \frac{n-p}{p} u) p |Du|^{p-2} Du - |Du|^p x \right\} = 0$$

für eine Lösung u von p-harmonischer Gleichung

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = 0.$$

Es folgt nach Gauß

$$\int_{\partial B(0,r)} u|Du|^{p-2}u_r = \int_{B(0,r)} |Du|^p,$$

wobei $u_r := Du \cdot \frac{x}{|x|}$. *Aus der Erhaltungesetz gilt*

$$(n-p)\int_{\partial B(0,r)} |Du|^{p-2}uu_r dx = r\int_{\partial B(0,r)} |Du|^p - p|Du|^{p-2}u_r dS,$$

Es folgt

$$(n-p)\int_{B(0,r)} |Du|^p dx = r\int_{\partial B(0,r)} |Du|^p - p|Du|^{p-2}u_r dS.$$

Daraus folgt die Monotonie-Formel

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n-p}}\int_{B(0,r)} |Du|^p dx\right) = \frac{p}{n-p}\int_{\partial B(0,r)} |Du|^{p-2}u_r^2. \tag{8.3}$$

Beispiel 8.9 (Erhaltungsgesetz für der Wellengleichungen)**.**

Die nichtlineare Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0$ ist EL-Gleichung von

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}u_t^2 - (\frac{1}{2}|Du|^2 + F(u))dxdt.$$

Wir untersuchen die folgende Transformationen

$$(x,t) \mapsto (x, t+\tau).$$

Nach Noether erhalten wir die Energieerhaltungsgesetz

$$e_t - \operatorname{div}(u_t Du) = 0,$$

wobei

$$e := \frac{1}{2}(u_t^2 + |Du|^2) + F(u).$$

$\xi = (0,1)$, $\eta = 0$

$$(H_F)_{\alpha\beta} = (\frac{1}{2}(u_t^2 - |Du|^2) - F(u))\delta_{\alpha\beta} + \partial_\alpha u \partial_\beta u,$$

$$(H_F)_{00} = \frac{1}{2}(u_t^2 - |Du|^2) - F(u) - u_t u_t.$$

$$(H_F)_{\alpha 0} = u_t \partial_\alpha u$$

$$(H_F)_{0\alpha} = -u_t \partial_\alpha u$$

9. Minimalflächen

Wir wollen als geometrischen Anwendungen die Existenz der (parametrisierten) minimalflächen und die H-Flächen untersuchen.

Sei Γ eine Jordan-Kurve im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ und

$$B = \{w = (u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 < 1\}$$

eine Kreisscheibe. Wir untersuchen die Existenz der (parametrisierten) Flächen $X : B \to \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften

$$\Delta X = 0 \qquad \text{in } B, \tag{9.1}$$

$$|x_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v \qquad \text{in } B, \tag{9.2}$$

$$X_{|\partial B} : \partial B \to \Gamma \text{ ist eine orientierte Parametrisierung von } \Gamma. \tag{9.3}$$

Definition 9.1. *Für $X \in H^1(B, \mathbb{R}^n)$ ist*

$$A(X) = \int_B \sqrt{|X_u|^2 |X_v|^2 - |X_u \cdot X_v|^2} dw$$

die Flächeninhalt der "Fläche" X.

Setze

$$\mathcal{C} := \{X \in H^1(B, \mathbb{R}^n) \,|\, X_{|\partial B} \in C^0(\partial B, \mathbb{R}^n)$$
$$\text{ist eine schwach monoton wachsende Parametrisierung von } \Gamma.\}$$

Die Flächeninhalt ist unabhängig von der Umparametrisierungen, d.h.,

$$A(X \circ g) = A(X)$$

für alle Diffeomorphismen $g : \overline{B} \to \overline{B}$. Da die Gruppe der Diffeomorphismen nicht kompakt ist, ist das Funktional A ist nicht kompakt. Statt A untersuchen wir die "Energie"

$$D(X) = \frac{1}{2} \int |DX|^2 dw.$$

Lemma 9.2. *Die Dirichletenergie D ist invariant under der Konformtransformationen, d.h.,*

$$D(X \circ g) = D(X)$$

für alle Diffeomorphismen $g : \overline{B} \to \overline{B}$ mit

$$|g_u|^2 - |g_v|^2 = 0 = g_u \cdot g_v \qquad \text{in } \overline{B}. \tag{9.4}$$

Proof. Hausaufgabe. □

Lemma 9.3. *Es gilt*

$$A(X) \leq D(X),$$

und Gleichheit genau dann gilt, wann X konform ist, d.h., (9.2) *erfüllt.*

Theorem 9.4 (Morrey)**.** *Sei $X \in H^1(B, \mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$. Dann esixiert eine Diffeomorphismus $g : B \to B$ mit*

$$D(X \circ g) \leq (1 + \epsilon) A(X \circ g) = (1 + \epsilon) A(X).$$

Es folgt

$$\inf_{X \in \mathcal{C}} A(X) = \inf_{X \in \mathcal{C}} D(X).$$

Lemma 9.5. *$X \in \mathcal{C}$ eine Lösung vom dem Plateau-Problem* (9.1)–(9.3) *genau dann ist, wann X ein kritischer Punkt von D in $\mathcal{C}$ im folgenden Sinne ist,*

(1) $\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X + t\phi) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(B, \mathbb{R}^n)$

(2) $\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(B)) = 0,$ *für alle glatte Schar der Diffeomorphismen* $g_t : \overline{B} \to g(\overline{B})$ *mit* $g_0 = id.$

Proof. Berechne die erste Variationsformel

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X + t\phi) = \int_B \nabla X \nabla \phi dz$$

Nach dem Fundamentallemma der VR gilt

$$\Delta X = 0 \quad \text{ in } B$$

Nach Regularitätssatz ist X glatt in B, also (9.1).

Wir werden zeigen: (2) ist äquivalent zu der Konformität (9.2). Sehen Sie Lemma 9.8 unten. □

Lemma 9.6 (Dirichelprinzip)**.** *Ist* $\gamma : \partial B \to \mathbb{R}^n$ *eine* C^1*-Abbildung, d.h.,* $\gamma \in C^1(\partial B, \mathbb{R}^n)$*, und ist* $h \in C^1(B, \mathbb{R}^n) \cap C^2(B, \mathbb{R}^n)$ *harmonisch auf* B *mit Randwerten* γ*, also* $\Delta h = 0$ *in* B *und und* $h_{\partial B} = \gamma$*, so ist*

$$D(h) \leq D(X) \tag{9.5}$$

für alle $X \in C^1(\partial B, \mathbb{R}^n)$ *mit* $X_{\partial B} = \gamma$*.*

Lemma 9.7. *Sei* G *ein Gebiet in* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ *und* $X \in H^1(G, \mathbb{R}^n)$ *harmonisch, d.h.,* $\Delta X = 0$*. Dann ist die Funktion*

$$\Phi(z) = |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2iX_u \cdot X_v$$

holomorph in G*.*

Proof. Wir wissen, dass $X \in C^2(B)$. Setze

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad \partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Es ist leicht nachzuprüfen

$$\Delta X = \frac{1}{4}\partial_{\bar z}\partial_z.$$

Damit gilt

$$0 = 4\Delta X = \partial_{\bar z}\partial_z X.$$

Man kann auch nachprüfen

$$\Phi(z) = 4(X_z)^2.$$

Es folgt

$$\frac{1}{4}\Phi_z = 2X_{z\bar z} \cdot X_z = 0.$$

□

Lemma 9.8. *Sei* G *ein Gebiet in* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ *und* $X \in H^1(G, \mathbb{R}^n)$*. Weiter, gelte*

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(G)) = 0,$$

für alle glatte Schar der Diffeomorphismen $g_t : \overline{G} \to g_t(\overline{G})$ *mit* $g_0 = id$*. Dann ist* X *konform.*

Proof. Sei $\phi \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$ und betrachte

$$g_t = id + t\phi : G \to G_t(G).$$

Für hinreichend klein t ist g_t ein Diffeomorphimus. Nach Lemma 8.1 haben wir mit $\xi = \phi$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(G)) &= \int_G \frac{1}{2}\frac{d}{dt}_{|t=0} |D(X \circ g_t^{-1})|^2 + \operatorname{div}(\xi \frac{1}{2}|DX|^2) \\
&= \int_G \{-\partial_\alpha X \partial_\alpha(\partial_\beta X \phi^\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\phi |DX|^2)\} \\
&= \int_G \{-\partial_\alpha X \partial_\beta X \partial_a \phi^\beta + \frac{1}{2}\partial_\alpha \phi^\alpha |DX|^2\} \\
&= -\frac{1}{2}\int_G \{(|X_u|^2 - |X_v|^2)(\phi_u^1 - \phi_v^2) + 2X_u X_v(\phi_u^2 + \phi_v^1)\}.
\end{aligned}$$

Setze $z = u + vi$ und $\phi = \phi^1 + i\phi^2$. Wir haben

$$(|X_u|^2 - |X_v|^2)(\phi_u^1 - \phi_v^2) + 2X_u X_v(\phi_u^2 + \phi_v^1) = 2\Re(\Phi \cdot \bar{\partial}\phi).$$

Also

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(G)) = -\int_G \Re(\Phi \cdot \bar{\partial}\phi) du dv. \tag{9.6}$$

Mit der Produktregel gilt

$$(\Phi\phi)_{\bar{z}} = \Phi_{\bar{z}}\phi + \Phi\phi_{\bar{z}}.$$

Der Realteil der linken Seite, $\Re(\Phi\phi)_{\bar{z}}$, ist ein Divergenz. Denn es gilt für $f = a + bi$

$$2\Re f_{\bar{z}} = \Re(f_u + i f_v) = a_u - b_v = \operatorname{div} \bar{f},$$

wobei $\bar{f} = a + ib = (a, -b)$ als Vektorfeld. Nach Gauß gilt

$$0 = \int_G \Re(\Phi \cdot \bar{\partial}\phi) du dv = -\int_G \Re(\Phi_{\bar{z}} \cdot \partial\phi) du dv$$

für alle $\phi \in C_0^1(G, \mathbb{R}^n)$. Daraus gilt $\Phi_{\bar{z}} = 0$, d.h., Φ holomorph ist.

Jetzt benutzen wir $\phi \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass $G = B$. Nach Gauß gilt

$$\int_B \operatorname{div} \bar{f} = \int_{\partial B} \bar{f} \cdot \nu = \int_{\partial B} \bar{f} \cdot z ds = \int_{\partial B} \Re(f(z)z) ds.$$

Da Φ holomorph ist, gilt

$$0 = -\int_B \Re(\Phi_{\bar{z}} \cdot \partial\phi) du dv + \int_{\partial B} \Re(\Phi\phi z) ds$$

für alle $\phi \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$. Wir wählen $\phi = i\lambda(z)z$ und erhalten

$$\int_{\partial B} \Im(\Phi z^2)\lambda(z) ds = 0,$$

für alle $\lambda(z) : \partial B \to \mathbb{R}$. Daher haben wir

$$\Im(\Phi z^2) = 0, \quad \forall z \in \partial B.$$

Aus dem Maximumprinzip gilt

$$\Phi(z)z = 0 \quad \text{ in } B.$$

Es folgt dass $\Phi \equiv 0$, d.h., X konform ist. $\square$

Wir bemerken, dass in den Beweis haben wir $X \in C^2(\overline{B})$ angenommen. Den Beweis ohne der Voraussetzung sehen Sie das Buch von Eschenburg-Jost, s. 147.

Falls X ein kritischer Punkt von X ist. Dann kann man mit dem Satz von Noether zeigen: Sei $\phi \in C^1(\overline{G}, \mathbb{R}^2)$ und betrachte

$$g_t = id + t\phi : G \to G_t(G).$$

Für hinreichend klein t ist g_t ein Diffeomorphimus. Wir verwenden dem Satz von Noether mit

$$f(x,z) = g_t(x), \quad g(x,z) = z.$$

Definiere $\Phi(t,x) = g_t(x)$ und $X_{(\cdot)} = X(\cdot)$ Also

$$\xi = \phi, \quad \eta = 0$$

Nach Noether gilt

$$\operatorname{div}\,(\frac{1}{2}|DX|^2\phi - DX \cdot DX\phi) = 0,$$

oder äquivalent

$$\partial_\alpha(\frac{1}{2}|DX|^2\phi^\alpha - D_\beta X \cdot D_\alpha X\phi^\beta) = 0.$$

Remark 9.9. *Falls X harmonisch in B ist, nach Lemma 9.7 und* (9.6)

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(G)) = -\frac{1}{2}\int_{\partial G} \Re(\Phi \cdot z\phi) ds.$$

Es folgt, dass die Konformität ist die natürliche Randbedingung ist.

Die konforme Gruppe von B ist

$$\mathfrak{G} = \{g(w) = e^{i\phi_0}\frac{a+w}{1+\bar{a}w} \,|\, a \in \mathbb{C}, |a| < 1, \phi_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Lemma 9.10. *Für $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ definiere $X \circ \mathfrak{G} = \{X \circ g \,|\, g \in \mathfrak{G}\}$ konformen Orbit von X. Für jede $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ erhält der schwache Abschluss von $X \circ \mathfrak{G}$ eine konstante Abbildung.*

Proof. i) Sei $\phi \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$ und $g_m(z) = \frac{a_m+z}{1+\bar{a}_m z}$, wobei $a_m \in \mathbb{C}$, $|a_m| < 1$ und $a_m \to 1$. Es ist klar, dass $g_m(z) \to 1$, für alle $z \in \overline{B}\backslash\{-1\}$ und gleichmäßig in $\Omega \subset\subset \overline{B}\backslash\{-1\}$. Also

$$\phi_m = \phi \circ g_m \to \phi(1)$$

f. ü. in B. Da D konform invariant ist, gilt

$$D(\phi_m) = D(\phi) < \infty.$$

Da $\|\phi_m\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{L^\infty} < \infty$, besitzt $\{\phi_m\}$ eine schwache konvergente Teilfolge mit Limes $\phi(1)$.

ii) Nun betrachten wir $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Setze

$$X_m = X \circ g_m^{-1}.$$

Wie in (i) kann man zeigen, dass $\{X_m\}$ eine schwache konvergente Teilfolge mit Limes X_0 besitzt. Wir zeigen dass $X_0 \equiv const$. Dafür zeigen wir

$$\int_B \nabla X_0 \nabla\phi \, dz = 0, \quad \forall \phi \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^n).$$

Setze $\phi_m = \phi \circ g_m$. Wir haben

$$\begin{aligned}\int_B \nabla X_0 \nabla \phi dz &= \lim_{m\to\infty} \int_B \nabla X_m \nabla \phi dz \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_B \nabla X \nabla \phi_m dz = 0,\end{aligned}$$

bei i). Es folgt dass $\Delta X_0 = 0$ in B und $\frac{\partial X_0}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial \mathfrak{B}$. Also X_0 ist eine Konstante. □

Lemma 9.10 impliziert, dass die Menge $\mathcal{C}(\Gamma)$ in $H^{1,2}(B, \mathbb{R}^n)$ nicht schwach abgeschlossen ist.

Lemma 9.11. *Für Tripel (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3), (ψ_1, ψ_2, ψ_3) mit $0 < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < 2\pi$ und $0 < \psi_1 < \psi_2 < \psi_3 < 2\pi$ existiert genau eine $g \in \mathfrak{G}$ mit*

$$g(e^{i\phi_j}) = e^{i\psi_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Sei $P_i = e^{i\frac{2\pi j}{3}}$, $j = 1, 2, 3$ und Q_j 3 verschiedene Punkte in Γ. Setze

$$\mathcal{C}^*(\Gamma) = \{X \in \mathcal{C}(\Gamma) \,|\, X(P_j) = Q_j, j = 1, 2, 3\}$$

Lemma 9.12. *Die Einbettung $\mathcal{C}^*(\Gamma) \to C^0(\partial B, \mathbb{R}^n)$ ist kompakt, d.h., jede D-beschränkte Teilemenge von $\mathcal{C}^*(\Gamma)$ ist gleichgradig stetig.*

Der Beweis von Lemma 9.12 folgt aus

Lemma 9.13 (Courant-Lebesgue)**.** *Für jede $X \in H^1(B, \mathbb{R}^n)$, jede $w \in \overline{B}$ und jede $\delta \in (0, 1)$ existiert ein $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ so dass $X_s \in L^2(C_\rho)$ und*

$$\int_{C_\rho} |X_s|^2 \le 16D(X)/\rho |\log \rho|.$$

Hierbei ist s Bogenlänge-Parameter von $C_\rho = \partial B_\rho(w) \cap B$ und X_s die Ableitung von X.

Proof. Nach Fubini gilt $X_s \in L^2(C_\rho)$ für fast alle $\rho < 1$ und

$$\begin{aligned}2D(X) \ge \int_{(B_{\sqrt{\delta}}(w)\setminus B_\delta(w))\cap B} |\nabla X|^2 &\ge \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \int_{C_\rho} |X_s|^2 ds d\rho \\ &\ge \operatorname{essinf}_{\rho\in(\delta,\sqrt{\delta})}(\rho \int_{C_\rho} |X_s|^2 ds) \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{d\rho}{\rho} \\ &\ge \operatorname{essinf}_{\rho\in(\delta,\sqrt{\delta})}(\rho \int_{C_\rho} |X_s|^2 ds) \cdot \frac{1}{2} |\log \rho|,\end{aligned}$$

da

$$\int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2} |\log \delta| \ge \frac{1}{2} |\log \rho|, \quad \forall \rho \in [\delta, \sqrt{\delta}].$$

□

Es folgt

$$\left\{ \int_{C_\rho} |X_s| \right\}^2 \le L(C_\rho) \int_{C_\rho} |X_s|^2 \le \pi\rho \int_{C_\rho} |X_s|^2 \le 8D(X)/|\log \rho|.$$

Beweis von Lemma 9.12. Sei $X \in \mathcal{C}^*(\Gamma)$, $\epsilon > 0$ und $w_0 \in \partial B$. We zeigen, dass ein $\delta > 0$, die nur von ϵ $D(X)$, Γ und Q_j $(j = 1, 2, 3)$ abhängig ist, existiert mit

$$|X(w) - X(w_0)| < 2\epsilon, \quad \text{für alle } w \in \partial B \text{ mit } |w - w_0| < \delta. \tag{9.7}$$

Wähle δ_0 hinreichend klein, so dass alle Kugeln mit Radius $\sqrt{\delta}$ höchstens ein von $P_j := e^{\frac{2\pi j}{3}}$ enthielt. Wähle $\epsilon_0 > 0$ hinreichend klein, so dass alle Kugeln in $\mathbb{R}^n$ mit Radius ϵ_0 höchstens ein von Q_j enthielt. Wir nehmen an $\epsilon < \epsilon_0$. Wähle $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$, so dass für alle zwei Punkte X, Y auf Γ mit $|X - Y| < \epsilon_1$ existiert einer Teilbogen $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ mit Endpunkte X und Y, der ganz in einer Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius ϵ liegt. (Wir nehmen an,z.B., dass Γ C^1 ist.) Es folgt, dass für alle X , Y mit $|X - Y| < \epsilon_1$ der Teilbogen $\widetilde{\Gamma}$ höchstens ein von Q_j $(j = 1, 2, 3)$ enthielt.

Wir nehmen ein $\delta < \delta_0$ mit

$$|\log \delta| \geq \frac{16\pi D(X)}{\epsilon_1^2}.$$

Seien $\rho \in [\delta, \sqrt{\delta}]$ und C_ρ in Lemma 9.13 gewählt, mit

$$\int_{C_\rho} |X_s|^2 ds \leq \frac{8\pi D(X)}{\rho |\log \rho|}.$$

Seien $w_j = e^{2\pi\theta_j}$ $j = 1, 2$, die Punkte der Schnittmenge von C_ρ und ∂B, $\widetilde{C}_\rho = \partial B \cap B_\rho(w_0)$, der Teilbogen von ∂B mit Endpunkte w_1 und w_2 mit der Eigenschaft dass Der Teilbogen höchstens einer von P_j $(j = 1, 2, 3)$ enthielt. Seien $X_j = X(w_j) \in \Gamma$ und $\widetilde{\Gamma}$ der Teilbogen, der höchstens ein von Q_j $(j = 1, 2, 3)$ enthielt. Bei der Monotonie gilt $X(\widetilde{C}_\rho) = \widetilde{\Gamma}$. Aus der Hölder-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} |X_1 - X_2|^2 &\leq (\int_{C_\rho} |X_s| dx)^2 \leq \pi\rho \int_{C_\rho} |X_s|^2 ds \\ &\leq 8\pi D(X)/|\log \rho| \leq 16\pi D(X)/|\log \delta| \leq \epsilon_1^2. \end{aligned}$$

Es foltt, dass $\widetilde{\Gamma}$ in einer Kugel mit Radius ϵ enthalten ist. Also, für alle w_0 und $w \in \partial B \cap B_\delta(w_0) \subset \widetilde{C}_\rho$ gilt

$$|X(w) - X(w_0)| \leq 2\epsilon.$$

. □

Lemma 9.14. *Die Menge $\mathcal{C}^*(\Gamma)$ ist abgeschlossen in $H^1(B, \mathbb{R}^n)$ bzgl. der schwache Konvergenz.*

Proof. Betrachte eine Folge $\{X_m\} \subset \mathcal{C}^*(\Gamma)$ mit $X_m \rightharpoonup X$ schwach in $H^{1,2}(B, \mathbb{R}^n)$. Da X_m schwach konvergent ist, ist DX_m beschränkt, d.h. $D(X_m) < C$, $\forall m$. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli und Lemma 9.12 konvergiert $\{X_m\}$ (Nach Wahl der Teilfolge) gleichmäßig aud ∂B. Also $C \in \mathcal{C}^*(\Gamma)$. Es folgt, dass $\mathcal{C}^*(\Gamma)$ abgeschloßen unter der schwachen Konvergenz. □

Lemma 9.15. *Das Funktional D ist koerziv in $\mathcal{C}(\Gamma)$.*

Proof. Nach Sobolev für alle $X \in H^{1,2}(B, \mathbb{R}^n)$ mit $X_{\partial B} \in L^\infty(\partial B, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|X\|_{L^2(B)} \leq C(\|\nabla X\|_{L^2(B)} + \|X\|_{L^2(\partial B)}) \leq C(D(X) + \|X\|_{L^\infty}^2)$$

Es folgt dass für $\mathcal{C}(\Gamma)$ gilt

$$\|X\|_{H^{1,2}} \leq CD(X) + c(\Gamma).$$

□

Theorem 9.16. *Sie Γ eine Jordan-Kurve in $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{C}(\Gamma) \neq \emptyset$. Dann existiert eine Lösung des Plateau-Problems* (9.1)-(9.3).

Proof. Sei $\mathcal{C}^*(\Gamma)$ wir vorher definiert durch 3 gewählten Punkte Q_1, Q_2, Q_3. Verwenden wir die direkte Methode der VR für D in $\mathcal{C}^*(\Gamma)$ und erhalten wir $X_0 \in \mathcal{C}^*(\Gamma)$ mit

$$D(X_0) = \inf_{X \in \mathcal{C}^*(\Gamma)} D(X).$$

Für jede $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ existiert eine eindeutige konforme Transformation g von B, so dass $X' = X \circ \mathcal{C}^*(\Gamma)$ mit $D(X') = D(X)$. Es folgt

$$\inf_{X \in \mathcal{C}(\Gamma)} D(X) = \inf_{X \in \mathcal{C}^*(\Gamma)} D(X).$$

D.h., X_0 ist eine Minimalstelle von D in $\mathcal{C}(\Gamma)$ und eine Lösung von (9.1)-(9.3). □

Proposition 9.17. *Sie Γ eine rektifizierbare, Jordan-Kurve in $\mathbb{R}^n$. Für beliebige Konstante C ist die Menge*

$$\{X \in \mathcal{C}^*(\Gamma) \mid D(X) \leq C\}$$

kompakt in $H^1(B, \mathbb{R}^n)$ bzgl. der schwachen (Topologie) Konvergenz und bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz auf ∂B.

Lemma 9.18. *Für jede rektifizierbare Jordan-Kurve Γ in $\mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{C}(\Gamma)$ nicht leer.*

Theorem 9.19 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Für jede rektifizierbare Jordan-Kurve Γ in $\mathbb{R}^n$ mit Länge $L(\Gamma) < \infty$. Dann gilt für alle Lösung des Plateau-Problems*

$$4\pi D(X) \leq (L(\Gamma))^2.$$

Theorem 9.20. *Für jede rektifizierbare Jordan-Kurve Γ in $\mathbb{R}^n$ existiert eine Lösung $\underline{X}$ von* (9.1)–(9.3) *mit*

$$D(\underline{X}) = \inf_{X \in \mathcal{C}(\Gamma)} D(X) < \infty.$$

Definition 9.21 (Verzweigungspunkt)**.** *Ein Punkt $z \in \overline{B}$ heißt Verzweigungspunkt, falls*

$$\nabla X(z) = 0.$$

Ein Verzweigungspunkt von X ist kein regulärer Punkt.

Lemma 9.22. *Eine nicht konstante schwach konforme harmonische Abbildung $X : U \to \mathbb{R}^n$ auf einem offenen Gebiet $U \subset \mathfrak{C}$ ist eine konforme minimale Immersion außerhalb einer diskreten Teilmenge von U.*

Proof. Da $X_{z\bar{z}} = 0$, ist X_z holomorph. Es ist leicht zu sehen, dass z ein Verzweigungspunkt genau dann ist, wann $X_z(z) = 0$. Aber die Nullstlle von einer holomorphen Funktion ist isoliert.

□

Lemma 9.23. *Eine durch Theorem 9.16 gefundende Lösung X erfüllt die Eigenschaft: $X_{|\partial B} : \partial B \to \Gamma$ ist ein Homeomorphimus*

Proof. Es reicht zu zeigen, dass $X_{\partial B}$ injektiv ist. Falls nicht, gilt $X(z_1) = X(z_2)$ für $z_1 \neq z_2$. Da $X_{|\partial B} : \partial B \to \Gamma$ schwach monoton ist, folgt es dass $X(z) = X(z_1$ für $z \in C$, wobei C der Teilbogen, der z_1, z_2 verbindet. Angenommen, $X(z_1) = 0$. Man kann durch der Kelvin-Transformation X fortzusetzen:

$$\widetilde{X}(z) = \begin{cases} X(z), & z \in B \\ -X(\frac{z}{|z|^2}), & z \notin B \end{cases}$$

□

$\widetilde{X}$ ist harmonisch in einer Umgebung von C, also $\widetilde{X}_z$ holomorph ist. Auf C ist $\widetilde{X}_z$ Null. Es folgt $X = \widetilde{X} = 0$ in B, ein Widerspruch.

10. Flächen mit konstanten Mittleren Krümmung

Sei Γ eine Jordan-Kurve im $\mathbb{R}^3$ und

$$B = \{w = (u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 < 1\}$$

eine Kreisscheibe. Wir untersuchen die Existenz der (parametrisierten) Flächen $X : B \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften

$$\Delta X = 2HX_u \wedge X_v, \qquad \text{in } B, \tag{10.1}$$

$$|x_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v \qquad \text{in } B, \tag{10.2}$$

$$X_{|\partial B} : \partial B \to \Gamma \text{ ist eine orientierte Parametrisierung von } \Gamma. \tag{10.3}$$

Hierbei $a \wedge b = (a^2b^3 - b^2a^3, a^3b^1 - b^3a^1, a^1b^2 - b^1a^2)$ das Kreuzprodukt von $a = (a^1, a^2, a^3), b = (b^1, b^2, b^3) \in \mathbb{R}^3$

Für eine gegebene Konstante $H \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Funktional

$$D_H(X) = D(H) + 2HV(X),$$

wobei

$$V(X) = \frac{1}{3}\int_B X_u \wedge X_v \cdot X dw$$

das (algebraische) "Volumen" von X ist. Eigentlich ist $V(X)$ ein algebraisches Volumen des Kegels, der alle Gerade von $X(w)$ nach 0 erhält

Beispiel 10.1. *Sei $X = X_+$ und $Y = X_-$*

$$X_\pm = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, \pm(1 - u^2 - v^2))$$

die stereographische Projektion von oberer (bzw unterer) Hemisphäre. $X_\pm$ erfüllt (10.1), (10.2) *und auch* (10.3) *mit $\Gamma = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.*

Seien B eine Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ und $X \in H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$. Weiter sei $V : H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ ein Funktional

$$V(X) := \frac{1}{3}\int_B X \cdot (X_u \wedge X_v) dw, \quad w = (u, v) \in B.$$

a) V ist wohl-definiert und analytisch.

b) Für alle $X, \varphi, \psi \in H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ gilt:

$$V(X + \varphi) = V(X) + \langle \delta V(X), \varphi \rangle + \frac{1}{2}\delta^2 V(X)(\varphi, \varphi) + V(\varphi), \tag{10.4}$$

wobei

$$\langle \delta V(X), \varphi \rangle = \frac{1}{3}\int_B \{(\varphi_u \wedge X_v + X_u \wedge \varphi_v) \cdot X + X_x \wedge X_v \cdot \varphi\} dw$$

$$\begin{aligned} \delta^2 V(X)(\varphi, \psi) &= \frac{1}{3}\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v) \cdot X dw \\ &\quad + \frac{1}{3}\int_B (\varphi_u \wedge X_v + X_u \wedge \varphi_v) \cdot \psi + (\psi_u \wedge X_v + X_u \wedge \psi_v) \cdot \varphi dw. \end{aligned}$$

c) Falls $\rho, \varphi, \psi \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$, und falls eine der Funktionen ρ, φ, oder ψ auf ∂B verschwindet, dann gilt

$$\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v) \cdot \rho dw = \int_B (\varphi_u \wedge \rho_v + \rho_u \wedge \varphi_v) \cdot \psi dw. \tag{10.5}$$

Insbesondere gelten für $X \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3)$

$$\langle \delta V(X), \phi \rangle = \int_B X_u \wedge X_v \cdot \phi \, dw, \tag{10.6}$$

$$\delta^2 V(X)(\phi, \psi) = \int_B (\phi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \phi_v) \cdot X dw \tag{10.7}$$

Beweis von c). Der Beweis basiert auf der partielle Integration und der Schiefsymmetrie $a \wedge b = -b \wedge a$.

$$\begin{aligned} \int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v) \cdot \rho dw &= -\int_B \varphi \wedge \psi_v \cdot \rho_u + \psi_u \wedge \varphi \cdot \rho_v dw \\ &\quad \int_{\partial B} (\varphi \wedge u\psi_v + v\psi_u \wedge \varphi) \cdot \rho ds \\ &= \int_B (\rho_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \rho_v) \cdot \varphi dw + \int_{\partial B} \varphi \wedge \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \cdot \rho ds \\ &= \int_B (\rho_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \rho_v) \cdot \varphi dw. \end{aligned} \tag{10.8}$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \psi = u\psi_u - v\psi_u.$$

Analog kann man zeigen

$$\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v) \cdot \rho dw = \int_B (\varphi_u \wedge \rho_v + \rho_u \wedge \varphi_v) \cdot \psi dw.$$

(10.6) und (10.7) folgen daraus.

d) V ist invariant unter der Orientirungserhaltende Umparametrisierungen. (Hausaufgabe)

e) Sei $X \in \mathcal{C}(\Gamma) \cap C^2(B, \mathbb{R}^3)$ ein kritischer Punkt von D_H im folgenden Sinne

(1) $\frac{d}{dt}_{|t=0} D_H(X + t\phi) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(B, \mathbb{R}^n)$

(2) $\frac{d}{dt}_{|t=0} D_H(X \circ g_t^{-1}, g_t(B)) = 0$, für alle glatte Schar der Diffeomorphismen $g_t : \overline{B} \to g(\overline{B})$ mit $g_0 = id$.

Dann ist X eine Lösung von (10.1)–(10.3).

Beweis von e). Da V invariant unter aller Diffeomorphismen ist, gilt $\frac{d}{dt}_{|t=0} V(X \circ g_t^{-1}, g_t(B)) = 0$. Also

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=0} D_H(X \circ g_t^{-1}, g_t(B)) = \frac{d}{dt}_{|t=0} D(X \circ g_t^{-1}, g_t(B)).$$

Dann folgt die Aussage e) aus Lemma 9.8.

Theorem 10.2 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Seien $X, Y \in H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ mit $X - Y \in H_0(B, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt*

$$36\pi |V(X) - V(Y)|^2 \leq |D(X) + D(Y)|^3,$$

und die Konstante 36π ist optimal.

Beispiel 10.3. *Die Konstante 36π wird von $X = X_+$, $Y = X_-$ erreicht, wobei*

$$X_\pm = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, \pm(1 - u^2 - v^2))$$

die stereografische Projektion von obener (bzw unterer) Hemisphäre ist.

Nach Morrey (Satz 9.4) kann man leicht eigen:

$$36\pi |V(X) - V(Y)|^2 \leq |A(X) + A(Y)|^3.$$

Mit Theorem 10.1 können wir zeigen

Theorem 10.4. *i) Für jede $X \in H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ kann das Volumen-Funktional auf $X + H_0^1(B, \mathbb{R}^3)$ analytisch fortsetzen. Weiter hat V eine Entwicklung (10.4) in der Richtung $\phi \in H_0^1(B, \mathbb{R}^3)$.*

ii) Die durch

$$\langle \delta V(X), \phi \rangle = \int_B X_u \wedge X_v \cdot \phi \, dw, \qquad \text{für } \phi \in H_0^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3) \tag{10.9}$$

gegebenden ersten Variation δV setzt auf eine Abbildung $\delta V : H^1(B, \mathbb{R}^3) \to (H_0^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3))^*$ fort, mit

$$|\langle \delta V(X), \phi \rangle| \leq c D(X) D(\phi)^{\frac{1}{2}}, \tag{10.10}$$

und ist schwach stetig in dem folgenden Sinne

$$X_m \rightharpoonup X \text{ in } H^1(B, \mathbb{R}^3) \Rightarrow \langle \delta V(X_m), \phi \rangle \to \langle \delta V(X), \phi \rangle, \forall \phi \in H_0^1(B, \mathbb{R}^3) \tag{10.11}$$

iii) Die zweite Variation d^2V kann auch so fortsetzen.

$$\delta^2 V(X)(\phi, \psi) = \int_B (\phi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \phi_v) \cdot X dw, \quad \forall \phi, \psi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^n) \tag{10.12}$$

kann man stetig fortsetzen als eine Abbildung $\delta^2 V : H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3) \to (H_0^{1,2} \times H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3))^*$, die die Abschätzung

$$\delta^2 V(X)(\phi, \psi)| \leq C(D(X)D(\phi)D(\psi))^{\frac{1}{2}} \tag{10.13}$$

erfüllt und stetig ist, im Sinne

$$X_m \rightharpoonup X \text{ in } H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3) \Longrightarrow \delta^2 V(X_m)(\phi, \psi) \to \delta^2 V(X)(\phi, \psi), \quad \forall \phi, \psi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3).$$

Weiter ist $\delta^2 V(X)$ für festes $X \in H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ eine stetige Bilinearform in $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$, d.h,

$$\phi_m \rightharpoonup \phi, \psi_m \rightharpoonup \psi \text{ in } H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3) \Longrightarrow \delta^2 V(X)(\phi_m, \psi_m) \to \delta^2 V(X)(\phi, \psi).$$

iv) Falls $X_m, X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ mit $X_m \rightharpoonup X$ in $H^{1,2}$ und $X_m \to X$ gleichmäßig in $\overline{B}$, und falls $\phi_m \rightharpoonup \phi, \psi_m \rightharpoonup \psi$ in $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$, dann gilt

$$\begin{aligned} V(X_m) &\to X(V) \\ \langle \delta V(X_m), \phi_m \rangle &\to \langle \delta V(X), \phi \rangle \\ \delta^2 V(X_m)(\phi_m, \psi_m) &\to \delta^2 V(X)(\phi, \psi) \end{aligned}$$

als $m \to \infty$.

Proof. Idee. Schritte:

(1) Gelten alle für $X \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ und $\varphi, \psi \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3)$.
(2) $\delta V : H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3) \to (H_0^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3))^*$ für $X \in H^{1,2}(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ und $\varphi \in H^{1,2} \cap L^\infty(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$. Und ähnlich auch für $\delta^2 V$.
(3) $\delta V : H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3) \to (H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3))^*$ für $X \in H^{1,2}(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$. Und ähnlich auch für $\delta^2 V$.

(1) ist klar. (2) folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $\int_B X_u \wedge X_v \cdot \varphi$. Mit (10.10) und (10.16) kann man zeigen, dass (3) aus (2) folgt.

Wir zeigen also (10.10) und (10.16) mit Helfe der isoperimetrischen Ungleichung, Theorem 10.2.

1. *Beweis von* (10.10).

Für $X = (X_1, X_2, X_3) \in H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ und $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H_0^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ setze

$$Y = (\frac{X^1}{D(X)^{1/2}}, \frac{X^2}{D(X)^{1/2}}, 0), \quad Z = (\frac{X^1}{D(X)^{1/2}}, \frac{X^2}{D(X)^{1/2}}, \frac{\varphi^3}{D(X)^{1/2}}).$$

Da $V(Y) = 0$, $D(Y) \leq 1$, $D(Z) \leq 2$, gilt aus der isoperimetrischen Ungleichung, Theorem 10.2,

$$|V(Z)| \leq \frac{3}{4\pi}.$$

Da V trilinear in die Komponenten in $Z = (Z^1, Z^2, Z^3)$ ist gilt

$$|\delta V(X)(0,0,\varphi^3)| = |V(X^1, X^2, \varphi^3) \leq \frac{3}{4\pi} D(X)^2 D(\phi).$$

Man kann $|\delta V(X)(\varphi^1, 0, 0)|$ und $|\delta V(X)(0, \varphi^2, 0)|$ auch so schätzen. Zusammen liefert (10.10).

2. *Beweis von* (10.16).

Seien X und φ wie oben. Sei $\psi = (\psi_1, \psi_2 \psi_3) \in H_0^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$. Setze

$$Y = (\frac{X^1}{D(X)^{1/2}}, 0, 0), \quad Z = (\frac{X^1}{D(X)^{1/2}}, \frac{\varphi^2}{D(\varphi)^{1/2}}, \frac{\psi^3}{D(\psi)^{1/2}}).$$

Gleiche Argumente liefert

$$|\delta^2 V(X)((0,\varphi^2,0),(0,0,\psi^2))| = |V(Z)|^2 D(X) D(\varphi) D(\psi) \tag{10.14}$$

$$\leq \frac{16}{9\pi} D(X) D(\varphi) D(\psi). \tag{10.15}$$

(10.16) folgt. Schließlich ist V wohl-definiert in $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ und auch in $X + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ durch

$$|V(\varphi)| = |V(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)| \leq \frac{1}{36\pi} |D(\varphi)|^2.$$

3. *Beweis von* (10.11).

Aus (10.8) haben wir für $\varphi \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \langle \delta V(X_m), \varphi \rangle &= \int_B X_{m_u} \wedge X_{m_v} \cdot \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_B (\varphi_u \wedge X_{m_v} + X_{m_u} \wedge \varphi_v) \cdot X_m. \end{aligned}$$

Nach Einbettungssatz von $H^{1,2} \hookrightarrow L^2$ gilt $X_m \to X$ in L^2 starke. Da $\varphi_u \wedge X_{m_v}$ und $\varphi_v \wedge X_{m_u}$ gleichmäßig beschränkt in L^2 sind haben wir

$$\langle \delta V(X_m), \varphi \rangle = \frac{1}{2} \int_B (\varphi_u \wedge X_{m_v} + X_{m_u} \wedge \varphi_v) \cdot X + o(1).$$

Nach der schwachen Konvergenz von $X_m \rightharpoonup X$ in $H^{1,2}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \delta V(X_m), \varphi \rangle &= \frac{1}{2} \int_B (\varphi_u \wedge X_v + X_u \wedge \varphi_v) \cdot X + o(1) \\ &= \langle \delta V(X), \varphi \rangle + 0(1). \end{aligned}$$

Für $\varphi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ approximieren wir φ mit $\varphi_k \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ in $H^{1,2}$. (10.10) impliziert

$$\begin{aligned} |\delta V(X_m)(\varphi_k) - \delta V(X_m)(\varphi)| &= |\delta V(X_m)(\varphi_k - \varphi))| \\ &\leq CD(X_m)D(\varphi_k - \varphi)^{1/2} \leq C_1(\varphi_k - \varphi)^{1/2} \to 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \delta V(X_m)(\varphi) &= dV(X_m)(\varphi_k) + o_k(1) \\ &= \delta V(X)(\varphi_k) + o_{k,m}(1) \\ &= \delta V(X)(\varphi) + o_m(1) \end{aligned}$$

Zwei Aussagen für $\delta^2 V$ kann man ähnlich zeige.

4. *Beweis von iv).*

Der Beweis für iv) ist ein Bisschen schwierig. Seien $X_m, X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ mit $X_m \rightharpoonup X$ in $H^{1,2}$ und $X_m \to X$ gleichmäßig in $\overline{B}$. Nach Gauß haben wir

$$\begin{aligned} 6(V(X_m) - V(X)) &= 2 \int_B X_{m_u} \wedge X_{m_v} \cdot X_m - X_u \wedge X_v \cdot X \\ &= \int_B \{(X_m - X)_u \wedge X_{m_v} + X_{m_u} \wedge (X_m - X)_v\} \cdot X_m \\ &\quad + \int_B \{(X_m - X)_u \wedge X_v + X_u \wedge (X_m - X)_v\} \cdot X_m + 2 \int_B X_u \wedge X_v \cdot (X_m - X) \\ &= \int_B \{X_{m_u} \wedge (X_m + X)_v + (X_m + X)_u \wedge X_{m_v} + 2X_u \wedge X_v\} \cdot (X_m - X) \\ &+ \int_{\partial B} (X_m - X) \wedge [(uX_{m_v} - vX_{m_u}) + (uX_v - vX_u)] \cdot X_m \\ &\leq C(D(X_m) + D(X)) \|X_m - X\|_{L^\infty(B)} + C\|X_m - X\|_{L^\infty(\partial B)} (\int_{\partial B} |\frac{\partial}{\partial \theta} X_m| + |\frac{\partial}{\partial \theta} X|) \\ &\to 0, \end{aligned}$$

da $\|X_m\|_{L^\infty(\partial B)} \leq C(\Gamma), \int_{\partial B} |\frac{\partial}{\partial \theta} X_m| = \int_{\partial B} |\frac{\partial}{\partial \theta} X| = L(\Gamma) < \infty$.

Für $\langle \delta V(X_m), \phi_m\rangle \to \langle \delta V(X), \phi\rangle$ kann man auch so zeigen. Für $\varphi \rightharpoonup \varphi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}
2\langle \delta V(X_m), \varphi_m\rangle &= 2\int_B (X_{m_u} \wedge X_{m_v} \cdot \varphi_m - X_u \wedge X_v \cdot \varphi) \\
&= \int_B ((X_m - X)_u \wedge (X_m + X)_v + (X_m + X)_u \wedge (X_m - X)_v) \cdot \varphi_m \\
&\quad + \int 2X_u \wedge X_v \cdot (\varphi_m - \varphi) \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

wobei wir (10.8) benutzt haben.

Man kann ähnlich $\delta^2 V(X_m)(\phi_m, \psi_m) \to \delta^2 V(X)(\phi, \psi)$ zeigen.

□

Als Folgerung haben wir

Remark 10.5. *i) D_H ist ein analytisches Funktional in $(H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)) + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ mit*

$$\begin{aligned}
D_H(X + \phi) &= D_H(X) + \langle D_H(X), \phi\rangle + \frac{1}{2}\delta^2 D_H(X)(\phi, \phi) + 2HV(\phi) \\
&= D_H(X) + D_H(\phi) + \langle \delta D_H(X), \phi\rangle + H\delta^2 V(X)(\phi, \phi),
\end{aligned}$$

für alle $X, \phi \in (H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)) + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$.

ii) X ist konform und löst das Problem (10.1)-(10.3) genau dann, wenn

(1) $\frac{d}{dt}_{|t=0} DH(X + t\phi) = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(B, \mathbb{R}^n)$

(2) $\frac{d}{dt}_{|t=0} D_H(X \circ g_t^{-1}, g_t(B)) = 0$, für alle glatte Schar der Diffeomorphismen $g_t : \overline{B} \to g(\overline{B})$ mit $g_0 = id$.

Der Beweis ist ähnlich wie der für Lemma 9.5.

10.1. **Die kleine Lösung.** Im diesem Abschnitt zeigen wir eine (relative) Minimalstelle von D_H in $\mathcal{C}(\Gamma)$ existiert, falls

$$|H|R \leq 1 \tag{10.16}$$

wobei $\Gamma \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Theorem 10.6. *Sei $\Gamma \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ eine Jordan Kurve und sei $H \in \mathbb{R}$ mit* (10.16)*. Dann existiert eine Lösung $\underline{X} \in \mathcal{C}(\Gamma)$ des Problems* (10.1)-(10.3)*, die ist charakterisiert durch die folgende Bedingungen*

$$\|\underline{X}\|_{L^\infty} \leq R, \tag{10.17}$$

$$D_X(\underline{X}) = \min\{D_H(X) \,|\, X \in \mathcal{C}(\Gamma), \|X\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|H|} \leq \infty\}. \tag{10.18}$$

Falls $|H|R < 1$, ist $\underline{X}$ ein relativer Minimierer von D_H in $\mathcal{C}(\Gamma)$ bzgl. der Topologie von $H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$.

Wir bemerken dass die Bedingung (10.16) notwendig ist. Sehen Sie den Satz von Heinz unten.

Setze

$$\mathcal{C}_H = \{X \in \mathcal{C}(\Gamma) \,|\, \|X\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|H|} \leq \infty\}.$$

Lemma 10.7. *D_H ist koerziv in $\mathcal{C}_H$ under der Topologe von $H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$.*

Proof. Für $X \in \mathcal{C}_H$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{2H}{3} X_u \wedge X_v \cdot X\right| &\leq \frac{2}{3}|H| \|X\|_{L^\infty} |X_u||X_v| \\ &\leq \frac{1}{3}|\nabla X|^2, \quad \text{f.ü. in } B \end{aligned} \tag{10.19}$$

Es folgt

$$\frac{1}{3}D(X) \leq D_H(X) \leq \frac{5}{3}D(X), \quad \forall X \in \mathcal{C}_H$$

und die Koerzivität von D_H mit Hilfe von Lemma 9.15. ◻

Remark 10.8. *Aus* (10.19) *gilt*

$$\frac{1}{2}|\nabla X|^2 + \frac{H}{3} X_u \wedge X_v \cdot X \geq 0, \qquad \textit{f.ü. in } B \tag{10.20}$$

für $X \in \mathcal{C}_H$.

Lemma 10.9. *D_H ist unterhalbstetig in $\mathcal{C}_H$ bzgl. der schwachen Konvergenz von $H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$.*

Proof. Sei $X_m \rightharpoonup X$ schwach in $H^{1,2}$. Nach Rellich-Kondrakov $X_m \to X$ starke in $L^2(B, \mathbb{R}^3)$ und *f.ü.* in B. Nach Egorov für jede $\delta > 0$ existiert eine Teilmenge $B_\delta \subset B$ mit Maß $|B_\delta| < \delta$ derart so, dass $X_m \to X$ gleichmäßig in $B \backslash B_\delta$.

Aus (10.19) haben wir

$$\begin{aligned} D_H(X_m) &= \int_B \{\frac{1}{2}|\nabla X_m|^2 + \frac{2H}{3} X_{m_u} \wedge X_{m_v} \cdot X_m\} \\ &\geq \int_{B\setminus B_\delta} \{\frac{1}{2}|\nabla X_m|^2 + \frac{2H}{3} X_{m_u} \wedge X_{m_v} \cdot X_m\} \qquad (10.20) \\ &\geq \int_{B\setminus B_\delta} \{\frac{1}{2}|\nabla X|^2 + \frac{2H}{3} X_u \wedge X_v \cdot X\} - o(1), \end{aligned}$$

da D unterhalbstetig ist und V stetig ist, falls $X_m \to X$ gleichmäßig in $B\setminus B_\delta$. Jetzt ist es leicht to sehen, dass

$$D_H(X_m) \geq D_H(X) - 0(1).$$

□

Beweis von Theorem 10.6. Wir betrachten auch

$$\mathcal{C}_H^* := \mathcal{C}_H \cap \mathcal{C}^*.$$

Nach der konformen Invarianz des Funktionals D_H gilt

$$\beta_H := \inf_{X\in\mathcal{C}_H^*} D_H(X) = \inf_{X\in\mathcal{C}_H} D_H(X).$$

Mit der direkten Methode existiert $\underline{X} \in \mathcal{C}_H^*$ mit

$$D_H(\underline{X}) = \beta_H.$$

1. Für $|H|R < 1$ werden wir (10.17) zeigen. Es folgt $\|\underline{X}\|_{L^\infty} \leq R < \frac{1}{|H|}$. Also $\underline{X}$ liegt im Innere von $\mathcal{C}_H$ und löst das Plateau-Problem.

Sei $\varphi \in H_0^{1,2} \cap L^\infty(B,\mathbb{R}^3)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$. Dann für $\epsilon \in (0,1)$ setze

$$X_\epsilon := \underline{X} - \epsilon\varphi\underline{X} \in \mathcal{C}_H.$$

Da $D_H(\underline{X}) = \beta_H$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{d\epsilon}_{|\epsilon=0} D_H(X_e) = -\int_B \nabla\underline{X}\nabla(\varphi X) + 2H\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v \cdot \varphi X \\ &= -\int_B \frac{1}{2}\nabla(|\underline{X}|^2)\nabla\varphi + \{|\nabla\underline{X}|^2 + 2H\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v \cdot \underline{X}\}\varphi \\ &\leq -\int_B \frac{1}{2}\nabla(|\underline{X}|^2)\nabla\varphi. \qquad (10.20) \end{aligned}$$

Das heißt, dass $|\underline{X}|^2 \in H^{1,2} \cap L^\infty(B,\mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung von

$$-\Delta|\underline{X}|^2 \leq 0$$

ist. Wähle $\varphi = (|\underline{X}|^2 - R^2)_+ \in H_0^{1,2} \cap L^\infty$ und erhalte

$$\int_B |\nabla((|\underline{X}|^2 - R^2)_+)|^2 = 0.$$

Es folgt dass $|\underline{X}| \leq R$ f.ü in B, also (10.17).

2. $|H|R = 1$. Wähle eine Forlge $\{H_m\} \subset \mathbb{R}$ mit $H_m \to H$, $|H_m|R < 1$. Seien $\underline{X}_m \in \mathcal{C}_H^*$ die Lösung für H_m. Es ist leicht to sehen dass $D(X_m)$ beschränkt ist. Also können wir annehmen dass

$$\underline{X}_m \rightharpoonup X \in \mathcal{C}_H^* \text{ schwach in } H^{1,2}.$$

Sei $\underline{X} \in \mathcal{C}_H \subset \mathcal{C}_{H_m}$ ist die Minimierer für H. Es gilt

$$\begin{aligned}\beta_H &\leq D_H(X) = \liminf_{m\to\infty} D_H(\underline{X}_m) = \liminf_{m\to\infty} D_{H_m}(\underline{X}_m) \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} D_{H_m}(\underline{X}) = D_H(\underline{X}) = \beta_H.\end{aligned}$$

Es folgt, dass X ein Minimierer von D_H in $\mathcal{C}_H$ ist. Insbesondere, gilt

$$\frac{d}{d\epsilon}_{|\epsilon=0} D_H(X \circ (id + \epsilon\tau)^{-1}) = 0, \quad \forall \tau \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^3),$$

also X ist konform. Schließlich gilt für alle $\varphi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}0 &= \langle \delta D_{H_m}(\underline{X}_m), \varphi\rangle = \langle \delta D(\underline{X}_m), \varphi\rangle + 2H_m \langle \delta V(\underline{X}_m), \varphi\rangle \\ &\to \langle \delta D(\underline{X}), \varphi\rangle + 2H\langle \delta V(\underline{X}), \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Also X löst das Problem. □

10.2. **Heinz' Satz über die nicht-Existenz und Lemma von Wente.** Die Optimalität der Bedingung (10.16) folgt aus dem folgenden Satz von Heinz.

Theorem 10.10. *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Jordan-Kurve mit Länge $L(\Gamma)$. Es gebe $X^= \in \mathcal{C}(\Gamma)$ und ein Einheitsvektor $n^0 \in \mathbb{R}^3$ mit*

$$c_0 := \int_B X_u^0 \wedge X_v^0 \cdot n^0 dw > 0.$$

Dann existiert keine Lösung von (10.1)-(10.3) *mit* $|H| > L(\Gamma)/2c_0$.

Proof. Wir nehmen an, dass $\Gamma \in C^{1,\alpha}$. Dann ist jede Lösung $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ C^1. Aus (10.1)-(10.3) haben wir

$$\begin{aligned} 2H \int_B X_u \wedge X_v \cdot n^0 &= \int_B \Delta X \cdot n^0 = \int_{\partial B} \partial_n X \cdot n^0 \\ &\leq \int_{\partial B} |\partial_n X| ds = \int_{\partial B} |\frac{\partial}{\partial \theta} X| ds \qquad \text{(Konformität (10.2))} \\ &= L(\Gamma). \end{aligned}$$

Da das Integral

$$c_0 = n^0 \cdot \int_B X_u^0 \wedge X_v^0 dw$$

unter Diffeomophismus invariant ist, können wir annehmen, dass $X - X^0 \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ gilt. (10.8) liefert

$$\begin{aligned} & 2\int_B (X_u \wedge X_v - X_u^0 \wedge X_v^0) \cdot n^0 \\ = & \int_B \{(X - X^0)_u \wedge (X + X^0)_v - (X + X^0)_u \wedge (X - X^0)_v)\} \cdot n^0 = 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$2c_0 |H| \leq L(\Gamma).$$

□

Remark 10.11. *Falls $\Gamma = \partial B \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, wählen wir $X^0(w) = (w, 0)$ und $n^0 = (0, 0, 1)$. Dann haben wir $L(\Gamma) = 2\pi$ und $c_0 = \pi$. Nach Theorem 10.10 existiert keine Lösung mit*

$$|H| > 1.$$

Also Bedingung (10.16) *ist optimal.*

Theorem 10.12. *Seien $\varphi, \psi \mathbb{H}^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$. Ist $Z \in H_0^{1,2}(\mathfrak{B}, \mathbb{R}^3)$ eine schwach Lösung von*

$$\Delta Z = \varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v \qquad \text{in } B, \tag{10.21}$$

dann ist Z stetig in B mit

Corollary 10.13. *Jede schwache Lösung $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ von* (10.1)-(10.3) *ist stetig in $\overline{B}$.*

Proof. Zerlege X durch $X = X^0 + Z$, wobei $X_0 \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$, d.h., $\Delta X^0 = 0$ und $Z \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$. X^0 ist stetig, und $Z \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ erfüllt

$$\Delta Z = \varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v \quad \text{ in } B,$$

und ist auch stetig. □

Lemma 10.14 (Wente)**.** *Unter der Voraussetzungen in Theorem gilt* $Z \in L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ *mit folgender Abschätzung*

$$\|Z\|_{L^\infty} \leq 2(D(\varphi)D(\psi))^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. Wir bemerken, dass (10.21) konform invariant ist: Ist $g : B \to g(B)$ ein konformer Diffeomorphismus. Setzen

$$\widetilde{Z} = Z \circ g, \quad \widetilde{\varphi} = \varphi \circ g, \quad \widetilde{\psi} = \psi \circ g.$$

Dann ist $\widetilde{Z}$ schwach Lösung von

$$\Delta \widetilde{Z} = \widetilde{\varphi}_u \wedge \widetilde{\psi}_v + \widetilde{\psi}_u \wedge \widetilde{\varphi}_v.$$

Da für jede $w \in B$ einer konforme Diffeomorphismus g von B so existiert, dass $g(w) = 0$, reicht es zu zeigen, dass

$$|Z(0)| \leq 2(D(\varphi)D(\psi))^{\frac{1}{2}}$$

gilt für ein Lebesgue-Punkt 0, d.h.,

$$\lim_{r \to 0} r^{-2} \int_{B_r(0)} |Z(w) - Z(0)| dw = 0. \tag{10.22}$$

In der Polarkoordinaten (r, θ) ist Gleichung (10.21)

$$\Delta Z = r^{-1}(\varphi_r \wedge \psi_\theta + \psi_r \wedge \varphi_\theta).$$

Für $\epsilon > 0$ und ein Einheitsvektor $a \in \mathbb{R}^3$ setze

$$\xi = \xi_\epsilon(r) := a \cdot \inf\{\log(1/r), \log(1/\epsilon)\} \in H^{1,2} \cap C_0(\overline{B}, \mathbb{R}^3).$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
1/\epsilon \int_{\partial B_\epsilon(0)} Z \cdot a d\theta &= \int_B \nabla Z \nabla \xi \, dw \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\varphi_r \wedge \psi_\theta + \psi_r \wedge \varphi_\theta) \cdot \xi \, dr d\theta \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\xi_r \wedge \psi_\theta + \psi_r \wedge \xi_\theta) \cdot \varphi \, dr d\theta \\
&= \int_\epsilon^1 \int_0^{2\pi} (1/r) a \wedge \psi_\theta \cdot \varphi \, dr d\theta.
\end{aligned}$$

Für $r \in [\epsilon, 1]$ setze

$$\bar{\varphi}(r) = 1/(2\pi r) \int_{\partial B_r(0)} \varphi d\theta.$$

Für f.ü. $r \in [\epsilon, 1]$ liefern die Hölder- und die Poincare-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} a \wedge \psi_\theta \cdot \varphi d\theta &= \int_0^{2\pi} a \wedge \psi_\theta \cdot (\varphi - \bar{\varphi}) d\theta \\
&\le \left(\int_0^{2\pi} |\psi_\theta|^2 d\theta \int_0^{2\pi} |\varphi - \bar{\varphi}|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\int_0^{2\pi} |\psi_\theta|^2 d\theta \int_0^{2\pi} |\varphi_\theta|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le r \left(\int_0^{2\pi} |\nabla \psi|^2 r d\theta \int_0^{2\pi} |\nabla \varphi|^2 r d\theta \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

wobei wir die Poincare-Ungleichung (die Wirtinger-Ungleichung)) $\int_0^{2\pi} |\varphi - \bar{\varphi}|^2 d\theta \le \int_0^{2\pi} |\varphi_\theta|^2 d\theta$ benutzt haben. Es folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$1/\epsilon \int_{\partial B_\epsilon(0)} Z \cdot a d\theta \le \left(\int_\epsilon^1 \int_0^{2\pi} |\nabla \phi|^2 r dr d\theta \int_\epsilon^1 \int_0^{2\pi} |\nabla \varphi|^2 r dr d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \le 2(D(\psi) D(\varphi))^{\frac{1}{2}}.$$

Nach (10.22) gilt

$$|2\pi Z(0) - \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial B_\epsilon(0)} Z \, d\theta| \le \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial B_\epsilon(0)} |Z - Z(0)| \, d\theta \to 0$$

Das Lemma folgt. □

Theorem 10.15. *Sei* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ *eine* $C^{m,\alpha}$*-Jordan-Kurve. Ist* $X \in \mathcal{C}(\Gamma)$ *eine schwache Lösung von* (10.1)-(10.3)*, dann gilt* $X \in C^{m,\alpha}(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$*.*

10.3. **Strikte Lösungen des Dirichelt-Problems von H-System.** Wir zeigen die Existenz einer “größere” Lösung, und zwar für das Dirichlet-Problem des H-Systems

$$\Delta X = 2HX_u \wedge X_v, \qquad \text{in } B, \tag{10.23}$$
$$X = X_0, \qquad \text{auf } \partial B. \tag{10.24}$$

Gegeben sind $X_0 \in H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ und $H \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung $X \in H^{1,2} \cap C^2(B, \mathbb{R}^3)$ von (10.23)-(10.24), oder $X \in X_0 \in H_0^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\delta D_H(X) = 0 \in (H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3))^*.$$

Falls $H = 0$, die Lösung $\underline{X}$ von (10.23)-(10.24) ist die harmonische Fortsetzung von X_0, die charakterisiert von

$$\underline{X} \in X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3), \tag{10.25}$$
$$D(\underline{X}) = \inf\{D(X) \mid X \in X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)\} \tag{10.26}$$

ist. Weiter ist $\underline{X}$ von X_0 in $H^{1,2} \cap L^\infty$ differenzierbar abhängig. Diese Aussage folgt aus der Linearität der Poisson-Gleichung $\Delta X = 0$, der variationale Charakterisierung (10.28) und dem Maximumprinzip.

Falls $H \neq 0$, wegen der nicht-Linearität des H-System (10.23) braucht man eine Kleinheit von H.

Theorem 10.16. *Seien $X_0 \in H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ und $H \in \mathbb{R}$ mit $|H|R \leq 1$ für $R := \|X_0\|_{L^\infty}$. Dann existiert eine Lösung X_H von* (10.23)-(10.24)*, die charakterisiert von*

$$\|X_H\|_{L^\infty} \leq R, \tag{10.27}$$
$$D_H(X_H) = \inf\{D_H(X) \mid X \in X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3), \|X\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{|H|}\} \tag{10.28}$$

ist.

Proof. Wie vorher gezeigt ist D_H koersiv und SUHS bzgl. $H^{1,2}$ in $\mathcal{S}_H := \{X \in X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3) \mid \|X\|_{L^\infty} \leq 1/|H|\}$. Also D_H nimmt eine Minimalstelle in $\mathcal{S}_H$.

Falls $|H|R < 1$, kann man wie den Beweis von Theorem 10.6 zeigen, dass $\|X_H\| \leq R$. Also X_H ist eine relative Minimalstelle $X_H$in $X_0 + H_0^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$. Insbesondere gilt

$$\delta D_H(X_h) = 0 \in (C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3))^*.$$

Da $C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ dicht in $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ ist, gilt

$$\delta D_H(X_h) = 0 \in (H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3))^*.$$

Also X_H löst (10.23)-(10.24). □

Lemma 10.17. *Ist $X \in X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ eine relative Minimalstelle von D_H bzgl. $X_0 + H_0^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$. Dann X is eine strikte relative Minimalstelle von D_H bzgl. $X_0 + H_0^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$, und zwar gilt*

$$\delta^2 D_H(X)(\varphi, \varphi) \geq \delta_0 D(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$$

für eine Konstante $\delta_0 > 0$.

Proof. Da $C_0^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ (L^∞) dicht in $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ ist, gilt

$$\delta^2 D_H(X)(\varphi, \varphi) \geq 0, \qquad \varphi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3). \tag{10.29}$$

Setzte

$$\delta_0 := \inf\{\delta^2 D_H(X)(\varphi, \varphi) \mid \varphi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3),\ D(\varphi) = 1\} \geq 0.$$

Wir zeigen das Lemma, d.h., $\delta_0 > 0$, durch eine Widerspruch-Argument. Angenommen, es geb eine Folge $\varphi_m \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ so dass $D(\varphi_m) = 1$ und

$$\delta^2 D_H(X)(\varphi_m, \varphi_m) \to 0, \quad \text{als } m \to \infty.$$

OEdA nehmen wir an, dass $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ schwach in $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$. Nach Satz 10.4 haben wir

$$\begin{aligned} 0 \le \delta^2 D_H(X)(\varphi, \varphi) &= 2D(\varphi) + 2H\delta^2 V(X)(\varphi, \varphi) \\ &\le \liminf_{m\to\infty} (2D(\varphi_m) + 2H\delta^2 V(X)(\varphi_m, \varphi_m)) \\ &= \liminf_{m\to\infty} \delta^2 D_H(X)(\varphi_m, \varphi_m) = 0. \end{aligned}$$

Da nach Satz 10.4 gilt

$$\delta^2 V(X)(\varphi_m, \varphi_m)) \to \delta^2 V(X)(\varphi, \varphi))$$

als $m \to \infty$, erhalten wir

$$D(\varphi_m) \to D(\varphi),$$

also $\varphi_m \to \varphi$ starke in $H_0^{1,2}$. Es folgt $D(\varphi) = 1$ und

$$\delta^2 D_H(X)(\varphi, \varphi) = 0. \tag{10.30}$$

(10.29)-(10.30) implizieren dass φ eine Minimalstelle des Funktionals $E(\psi) := \delta^2 D_H(X)(\psi, \psi)$ in $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$. Also haben wir

$$\Delta\varphi = 2H(X_u \wedge \varphi_v + \varphi_u \wedge X_v) \quad \text{in } B.$$

Nach Lemma 10.14 ist $\varphi \in L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$. Da X relative Minimalstelle von D_H in $X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ ist, gilt nach Remark 10.5

$$D_H(X) \le D_H(X + t\varphi) = D_H(X) + 2Ht^3 V(\varphi),$$

für $|t| << 1$. Es folgt

$$V(\varphi) = 0, \quad D_H(X + t\varphi) = D_H(X).$$

Also sind alle $X + t\varphi$ ($|t| << 1$) relative Minimalstelle von D_H in $X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$. Es folgt

$$\Delta(X + t\varphi) = 2H(X + t\varphi)_u \wedge (X + t\varphi)_v. \quad \text{in } B$$

Daraus folgt

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = 0 \quad \text{in } B,$$

bzw.

$$\delta^2 D_H(X)(\varphi, \varphi) = 2D(\varphi) = 2,$$

ein Widerspruch. □

Corollary 10.18. *Sind $X_1, X_2 \in X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ relative Minimalstellen von D_H in $X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$, bgzl Variations in $H_0^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt $X_1 = X_2$.*

Proof. Setze $\varphi = X_1 - X_2$. Von der Entwicklungen

$$\begin{aligned} D_H(X_1) &= D_H(X_2 + \varphi) = D_H(X_2) + \frac{1}{2}\delta^2 D_H(X_2)(\varphi, \varphi) + 2HV(\varphi) \\ D_H(X_2) &= D_H(X_1 - \varphi) = D_H(X_1) + \frac{1}{2}\delta^2 D_H(X_1)(\varphi, \varphi) - 2HV(\varphi) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$0 = \delta^2 D_H(X_1)(\varphi, \varphi) + \delta^2 D_H(X_2)(\varphi, \varphi) \ge \delta_0 D(\varphi).$$

Also $\varphi = 0$, $X_1 = X_2$. □

Corollary 10.19. *Seien $H, R \in \mathbb{R}$ mit $|H|R < 1$. Es gibt eine eindeutige differenzierbar und beschränkte Abbildung η_H von $\{X_0 \in H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3) \,|\, \|X_0\|_{L^\infty} \leq R\}$ nach Denselben, ordnet X_0 zu der eindeutigen Lösung X_H von* (10.23)-(10.24).

10.4. **Die zweite Lösung.** Wir werden zeigen die Existenz der zweiten Lösung.

Theorem 10.20. *Seien $X_0 \in H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$, $0 \not\equiv H \in \mathbb{R}$ und $X_0 \not\equiv const$. Weiter erhält D_h eine relative Minimalstelle X_H in $X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$. Dann existiert auch eine nicht-stabile Lösung X^H von (10.23)-(10.24) in $X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$.*

Nach Satz 10.16 impliziert Satz 10.20:

Corollary 10.21. *Seien $X_0 \in H^{1,2} \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$, $0 \not\equiv H \in \mathbb{R}$ und $X_0 \not\equiv const$. Falls $|H|R < 1$ für $R := \|X_0\|_{L^\infty}$, dann existieren eine "kleine" X_H und eine "größe" Lösung X^H von (10.23)-(10.24).*

Remark 10.22. *Die Resultat ist optimal im Sinne, dass falls $X_0 \equiv 0$ oder $H = 0$, die Lösung von (10.23)-(10.24) eindeutig ist.*

Die ist eine Resultat von Wente

Theorem 10.23. *Ist $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ eine Lösung $X \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ von (10.23)-(10.24) für $X_0 = 0$, dann gilt $X \equiv 0$.*

Proof. X ist glatt in $\overline{B}$. Wir setzen X auf $\mathbb{R}^2$ fort

$$\overline{X}(w) := \begin{cases} X(w), & |w| \leq 1 \\ -X(\frac{w}{|w|^2}), & |x| > 1. \end{cases}$$

$\overline{B}$ ist stetig (eigentlich C^1) und $X \in H^{1,2}$ mit

$$D(\overline{X}, \mathbb{R}^2) = 2D(X) < \infty.$$

Das H-System ist äquivalent zu

$$4X_{z\bar{z}} = \Delta X = 2HX_u \wedge X_v = -4HiX_z \wedge X_{\bar{z}}.$$

Setze $f(w) = \overline{X}_z = (\overline{X}_u - \overline{X}_v)/2$ und $F(w) = f \cdot f = \overline{X}_z \cdot \overline{X}_z$ Dann ist F holomorph, da

$$F_{\bar{z}} = \overline{X}_{z\bar{z}} \cdot \overline{X}_z + \overline{X}_z \overline{X}_{z\bar{z}} = 0.$$

Da

$$F = |\overline{X}_u|^2 - |\overline{X}_v|^2 - 2i\overline{X}_u \cdot \overline{X}_v \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

gilt nach der Mittelwerteigenschaft $F \equiv 0$. Also ist $\overline{X}$ konform. Aber alle Punkte aus $|w| = 1$ sind die Verzweigungspunkte von X. Daraus folgt $X = 0$.

□

Wir benutzen das Mountain-Pass-Lemma um eine zweite Lösung zu finden. Setze

$$P =: \{p \in C^0([0,1], X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3) \,|\, p(0) = X_H,\, p(1) = X_1\},$$

und

$$\beta := \inf_{p \in P} \sup_{X \in p([0,1])} D_H(X),$$

wobei X_1 in Lemma 10.24 gefunden wird.

Lemma 10.24 (Wente, Brezis-Coron)**.** *Für $H \not\equiv 0$ existiert $X_1 \in X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$ mit $D_H(X_1) < D_H(X^H)$. Ist $X_0 \not\equiv 0$, dann haben wir*

$$\beta < D_H(X_H) + \frac{4\pi}{3H^2}.$$

We bemerken, dass $\frac{4\pi}{3H^2}$ die Funktional D_H von einer Sphäre mit Radius $1/|H|$ ist.

Beweis von Lemma 10.24. Da $X_0 \not\equiv 0$, gilt $X_H \not\equiv 0$. Also gibt es einen Punkt $w_0 \in B$ mit $\nabla X_H(w_0) \neq 0$. Nach Translation und Rotation können wir annehmen, dass $w_0 = 0$ und

$$\frac{\partial}{\partial u} X_H(0) = (a^1, a^2, a^3), \quad \frac{\partial}{\partial v} X_H(0) = (b^1, b^2, b^3)$$

und

$$H(a^1 + b^2) < 0. \tag{10.31}$$

Für $\epsilon > 0$ setze

$$\varphi^\epsilon(u, v) = \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + u^2 + v^2}(u, v, \epsilon),$$

eine konforme Darstellung von einer Sphäre mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0, 1)$, die durch der stereographischen Projektion bzgl dem Nordpol definiert ist. Sei $\xi \in C_0^\infty(B)$ eine Abschneide-Funktion mit $\xi(w) = \xi(-w)$ und $\xi \equiv 1$ um 0.

Betrachte die Familie

$$X_t^\epsilon := X_H + t\xi\varphi^\epsilon \in X_0 + H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3).$$

Mit Remark 10.5 berechnen wir

$$\begin{aligned} D_H(X_t^\epsilon) &= D_H(X_H) + D_H(t\xi\varphi^\epsilon) + t^2 H \delta^2 V(X_H)(\xi\varphi^\epsilon, \xi\varphi^\epsilon) \\ &= D_H(X_H) + t^2 D(\xi\varphi^\epsilon) + 2t^3 H V(\xi\varphi^\epsilon) + 2t^2 H \int_B X_H \cdot (\xi\varphi^\epsilon)_u \wedge (\xi\varphi^\epsilon)_v \, dw. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\xi\varphi^\epsilon) &= D(\varphi^\epsilon) + \frac{1}{2} \int_B (\xi^2 - 1)|\nabla\varphi^\epsilon|^2 + 2\xi\nabla\xi\varphi^\epsilon\nabla\varphi^\epsilon + |\varphi^\epsilon|^2|\nabla\xi|^2 \, dw \\ &\leq D(\varphi^\epsilon, \mathbb{R}^2) + O(\epsilon^2) = 4\pi + O(\epsilon^2), \\ V(\xi\varphi^\epsilon) &= V(\varphi^\epsilon) + O(\epsilon^3) \\ &= V(\varphi^\epsilon, \mathbb{R}^2) - \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B} \varphi_u^\epsilon \wedge \varphi_v^\epsilon \cdot \varphi^\epsilon \, dw + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{4\pi}{3} + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Die Entwicklung $X_H(u, v) = X_H(0) + au + bv + O(r^2)$ $(r^2 = u^2 + v^2)$ liefert

$$\begin{aligned} 2H \int_B X_H \cdot (\xi\varphi^\epsilon)_u \wedge (\xi\varphi^\epsilon)_v \, dw &= 2H \int_B (X_H(0) + au + bv) \cdot (\xi\varphi^\epsilon)_u \wedge (\xi\varphi^\epsilon)_v \, dw \\ &\quad + 2H \int_B O(r^2) \cdot (\xi\varphi^\epsilon)_u \wedge (\xi\varphi^\epsilon)_v \, dw =: I + II. \end{aligned}$$

Nach (10.8) und der Schief-Symmetrie gilt

$$
\begin{aligned}
I &= H\int_B (a\wedge(\xi\varphi^\epsilon)_v + (\xi\varphi^\epsilon)_u\wedge b)\cdot\xi\varphi^\epsilon\,dw\\
&= H\int (a\wedge(0,1,0)+(1,0,0)\wedge b)\xi^2\frac{4\xi^2}{(e^2+r^2)}(u,v,\epsilon)\,dw\\
&= H(a^1+b^2)\int_B\frac{4\epsilon^3}{(e^2+r^2)}\xi^2 - H\int_B(a^3u+b^3v)\frac{4\epsilon^2}{(e^2+r^2)}\xi^2\\
&= H(a^1+b^2)\int_B\frac{4\epsilon^3}{(e^2+r^2)}\xi^2
\end{aligned}
$$

Für hinreichend klein $\epsilon > 0$ gilt

$$\int_B\frac{\epsilon^3}{(e^2+r^2)}\xi^2 \geq \int_{B_\epsilon(0)}\frac{\epsilon^3}{(e^2+r^2)}\xi^2 \geq c_1\epsilon > 0,$$

für eine Konstante $c_1 > 0$. Da $|\nabla\varphi^\epsilon| \leq c\frac{\epsilon}{\epsilon^2+r^2}$, gilt

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq |\int_B O(r^2)\cdot|\nabla\varphi^\epsilon| + O(\epsilon^2)\\
&\leq c\int_B\frac{\epsilon^2 r^2}{(\epsilon^2+r^2)^2}\,dw + O(\epsilon^2)\\
&\leq c\int_{B_\epsilon(0)}dw + c\int_{B\setminus B_\epsilon(0)}\frac{\epsilon^2}{r^2}\,dw + O(\epsilon^2)\\
&\leq c_2\cdot\epsilon^2|\log\epsilon| + O(\epsilon^2).
\end{aligned}
$$

Zusammen haben wir

$$D_H(X) \leq D_H(X) + (4\pi + 4H(a^1+b^2)c_1\epsilon + c_2\epsilon^2|\log\epsilon| + O(\epsilon^2))t^2 + 2H(\frac{4\pi}{3} + O(\epsilon^3))t^3.$$

Es ist offensichtlich, dass $D_H(X_t^\epsilon) \to -\infty$ als $Ht \to -\infty$. Also, falls $H \not\equiv 0$, ist $X_1 = X_{t_1}^\epsilon$ die gesuchte Abbildung.

Falls $H < 0$. Von (10.31) kann man zeigen, dass die Funktion $D_H(X_t^\epsilon) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, als eine Funktion von t, nimmt das Maximum am $t_0 < 1/H - c_3\epsilon$. Also

$$\sup_{t\geq 0} D_H(X_t^\epsilon) < D_H(X_H) + \frac{4\pi}{3H^3}.$$

Der Beweis für $H > 0$ ist gleich. □

Nun zeigen wir die PS-Bedingung an β.

Lemma 10.25. *Sei $H \not\equiv 0$ und sei X_H eine relative Minimalstelle von D_H in $X_0 + H_0^{1,2}(B,\mathbb{R}^3)$. Dann jede PS Folge, $\{X_m\} \in X_0 + H_0^{1,2}(B,\mathbb{R}^3)$ mit*

$$
\begin{aligned}
D_H(X_m) &\to \beta < D_H(X_H) + \frac{4\pi}{3H^2},\\
\delta D_H(X_m) &\to 0 \in (H_0^{1,2}(B,\mathbb{R}^3))^*
\end{aligned}
$$

ist relativ kompakt.

Proof. 1. $\{X_m\}$ ist beschränkt in $H^{1,2}$.

Nach Lemma 10.17 existiert $\delta_0 > 0$ mit

$$\delta^2 D_H(X_H)(\varphi, \varphi) \geq \delta_0 D(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3).$$

Wir setzen $\varphi_m = X_m - X_H$ und entwickeln

$$\begin{aligned} D_H(X_m) &= D_H(X_H + \varphi_m) = D_H(X_H) + \frac{1}{2}\delta^2 D_H(X_H)(\varphi_m, \varphi_m) + 2HV(\varphi_m) \\ \delta D_H(X_m)(\varphi_m) &= \delta^2 D_H(X_H)(\varphi_m, \varphi_m) + 6HV(\varphi_m) = o(1)D(\varphi_m)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Es gibt sich

$$3(D_H(X_m) - D_H(X_H)) - o(1)D(\varphi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\delta^2 D_H(X_H)(\varphi_m, \varphi_m) \geq \frac{1}{2}\delta_0 D(\varphi_m).$$

Es folgt $D(\varphi_m) \leq C$, und die Beschränktheit von $D(X_m)$.

2. Nun können wir annehmen, dass $X_m \rightharpoonup X$ schwach in $H^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$. Nach die schwacher Konvergenz von δD und δV, gilt $\delta D_H(X) = 0$. Es folgt

$$D_H(X) \geq D_H(X_H). \tag{10.32}$$

Setze $\psi_m = X_m - X \rightharpoonup 0$ schwach in $H_0^{1,2}(B, \mathbb{R}^3)$. Entwickeln und erhalten wir

$$\begin{aligned} D_H(X_m) &= D_H(X + \varphi_m) = D_H(X) + D_H(\psi) + H\delta^2 D_H(X_H)(\psi_m, \psi_m) \\ &= D_H(X) + D_H(\psi_m) + o(1), \qquad (10.33) \\ 0(1) &= \delta D_H(X_m)(\psi_m) = \delta D_H(\psi_m)(\psi_m) + 2H\delta^2 V(X)(\psi_m, \psi_m) \\ &= 2D(\psi_m) + 6HV(\psi_m) + o(1). \qquad (10.34) \end{aligned}$$

Nach (10.33) und (10.32) haben wir

$$D_H(\psi_m) = D_H(X_m) - D_H(X) - o(1) \leq D_H(X_m) - D_H(X_H) - o(1) \leq c < \frac{4\pi}{3H^2}.$$

Nach (10.34) gilt

$$3D_H(\psi_m) = 3D(\psi_m) + 6HV(\psi_m) = D(\psi_m) + o(1).$$

Also haben wir

$$D(\psi_m) \leq c < \frac{4\pi}{H^2}. \tag{10.35}$$

Nun die isoperimetrische Ungleichung und (10.34) liefern

$$2D(\psi_m)\left\{1 - \sqrt{\frac{H^2 D(\psi_m)}{4\pi}}\right\} \leq 2D(\psi_m) + 6HV(\psi_m) = o(1).$$

Es folgt mit (10.35) $D(\psi_m) \to 0$. □

Beweis von Theorem 10.20. Der Satz folgt aus Lemma 10.24, Lemma 10.25 und dem MP Lemma. □