VRIATIONSRECHNUNG

ABSTRACT. Diese Skizze ist basiert auf den Skripts von Prof. E. Kuwert und Prof. Arnold.

1. EINLEITUNG, BEISPIELE

Beispiel 1.1 (Isoperimetrisches Problem (*Problem der Dido*)).
Aufgabe. Finde die geschlossene Kurve einer vorgegebenen änge mit maximalem Inhalt.

Lösung. Kreis.

Beispiel 1.2. *Für die Kurve $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $u : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, ist die Länge definiert durch*

$$L(u) := \int_a^b |u'(x)|dx.$$

Sei $\mathcal{U} = \{u \in C^1([a, b], R^m) : c(a) = p, c(b) = q\}$ die Menge aller Kurven, welche p und q verbindet. Dies führt zum Problem der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten.

Aufgabe. Finde die Kurve in $\mathcal{U}$ mit kurzster Verbungung zwischen p und q.

Lösung. die Gerade.

Beispiel 1.3 (Geodätische). *Es sei M eine Untermanigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, $p, q \in M$. Sei $\mathcal{U} = \{u \in C^1([a, b], M) : c(a) = p, c(b) = q\}$ die Menge aller Kurven, die auf M liegt unf p und q verbindet.*

Aufgabe. Finde die Kurve in $\mathcal{U}$ mit kurzster Verbungung zwischen p und q.

Lösung. die Geodätische.

Beispiel 1.4 (Minimalflächen). *$(x, u(x)), x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei eine Fläche (Graph) im $\mathbb{R}^3$. Ihre Oberfläche*

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

Aufgabe. Finde Fläche minimalen Inhalts, die die Randbedingung $u = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt.

Beispiel 1.5 (Dirichletsches Prinzip). *Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$, ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen). Das Dirichletintegral (oder die Dirichletenergie) ist definiert durch*

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2(x)dx$$

Dirichletsches Prinzip: Konstruktion harmonischer Funktionen als Minimierer von E.

Beispiel 1.6 (Brachistochrone (Bernoulli, 1696))**.** *Aufgabe: Finde Kurve $u = u(x)$ zwischen den Punkten $A = (0, 0)$ und $B = (b_1, b_2)$ mit $b_1 > 0, b_2 > 0$, so dass ein Körper in dem konstanten Schwerefeld $F = (g, 0), g > 0$ reibungsfrei möglichst schnell von A nach B kommt bei Anfangsgeschwindigkeit 0.*

Lösung: Zykloidenbogen (Radkurve), obwohl längerer Weg als Verbindungsgerade.

Gegenstand der VL :Untersuchung von Extremalstellen von Variationsintegralen (oder Energie-Funktionalen):

$$u \mapsto \mathcal{F}(u) := \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))dx : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

auf Mengen $\mathcal{U} \subset \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N\}$.

$F(x, z, p)$ heißt *Lagrange Funktion.*

Idee: Verallgemeinerung von Extremwertmethoden fr skalare Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- notwendige Bedingungen (analog zu $f'(x_0) = 0$ für $f \in C^1$).
- hinreichende Bedingungen (analog zu $f''(x_0) > 0$ oder < 0 für $f \in C^2$).
- Existenz globaler Extremwerte (analog zur Annahme der Extremwerte stetiger Funktionen auf Kompakta)

Definition 1.7. *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Der Punkt $u \in \mathcal{U}$ heißt*

1. *(globale) Minimalstelle von F, falls $\mathcal{F}(u) \le F(v)$, $\forall v \in \mathcal{U}$;*
2. *strikte (globale) Minimalstelle von $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}(u) < F(v)$, $\forall v \in \mathcal{U}$;*
3. *(strikte) lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{U}$ topologischer Raum ist, und eine offene Umgebung $U \subset \mathcal{U}$ von u existiert, so dass u eine (strikte) Minimalstelle von $\mathcal{F}_{|U}$ ist.*

Beispiel 1.8. *Für festes $0 < \alpha < \frac{1}{2}$*

$$F(u) := \int_0^1 (1 + u'(x)^2)^\alpha dx \qquad \textit{auf } \mathcal{U} := \{u \in C^1[0, 1] | u(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

Das Infimum wird aber nicht angenommen.

Beispiel 1.9.

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 \qquad \textit{auf } \mathcal{U} = \{u \in C^1[0, 1] | u(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

Das Infimum wird aber nicht angenommen. Aber $\mathcal{F}$ nimmt das Infimum in $\mathcal{U}_{Lip} = \{u \in Lip[0, 1] | u(0) = 0, u(1) = 1\}$. Weiter besitzt $\mathcal{F}$ unendlich viele Lösungen.

2. Euler-Lagrange Gleichungen

Inhalt. Klassische Theorie, "indirekte Method", d.h. Zugang mittels Differentialgleichungen (ohne Funktionalanalysis)

Fragen: Zuerst machen wir die Annahme, dass das Variationsproblem eine Lösung (z.B. Minimum) hat).

- Welche Gleichung erfüllt die Lösung?
- Welche Eigenschaften (z.B. Symmetrien) erbt sie vom Variationsintegral?

2.1. **ertse Variation.** Betrachte Funktional $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{U} \subset X$, X linearer Raum über $\mathbb{R}$. Sei $u_0 \in \mathcal{U}, \xi \in X$, sodass $\{u_0 + \epsilon\xi; |\epsilon| < \epsilon_0\} \subset \mathcal{U}$ für ein $\epsilon_0 > 0$ gelte. Setze

$$\phi(\epsilon) := \mathcal{F}(u_0 + \epsilon\xi), \text{ für } \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0).$$

Definition 2.1 (erste Variation)**.** *Falls $\phi'(0)$ existiert, heißt*

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) := \phi'(0)$$

erste Variation *von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ.*

Beispiel 2.2. *$X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_0 \in U$, $\mathcal{F} = f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = Df(\xi), \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

D.h., die erste Variation of $\mathcal{F}$ ist die Richtungsableitung von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ.

Bemerkung 2.3. *Für einen (lokalen) Minimierer u_0 gilt*

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0, \qquad \text{wenn } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \text{ definiert ist} \tag{2.1}$$

(2.1) ist also eine *notwendige Bedingung* dafür, dass u_0 lokale Extremalstelle von $\mathcal{F}$ ist.

Definition 2.4. *Sei $\mathcal{F} : \mathcal{U} \subset X \to \mathbb{R}$. $u_0 \in \mathcal{U}$ heißt stationärer Punkt (bzw. kritischer Punkt) von $\mathcal{F}$, falls*

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0, \qquad \forall\xi \in X, \text{ für die } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \text{ existiert.}$$

Bemerkung 2.5. *Sei $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0, \qquad \forall\xi \in X$, Dann ist u_0 lokale Extremalstelle von $\mathcal{F}$ oder Sattelpunkt.*

Beispiel 2.6. *$\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen. $\mathcal{F}(u) = E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$ und $\mathcal{U} = C^1(\Omega, \mathbb{R})$ oder $W^{1,2}(\Omega)$.*

Definition 2.7 (m-te Variation)**.** *Sei $m \in mathbbN$. Falls $\phi^{(m)}(0)$ existiert, heißt*

$$\delta^m\mathcal{F}(u_0, \xi) := \phi^{(m)}(0)$$

m-te Variation von $\mathcal{F}$ an u_0 in Richtung ξ.

Beispiel 2.8. *Sei $\mathcal{F}C^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_0 \in \Omega$:*

$$\delta^2\mathcal{F}(u_0, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial u_i \partial u_j}(u_0)\xi_i\xi_j$$

quadratische Form in ξ.

Bemerkung 2.9. *Sei $\mathcal{U}$ topologischer Raum. Hat $\mathcal{F}$ lokales Minimum (Maximum) an u_0, dann gilt:*

$$\delta^2\mathcal{F}(u_0, \xi) \geq 0 \quad (\leq 0), \qquad \forall\xi \in X, \text{ für die } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \text{ existiert.}$$

Bemerkung 2.10. *"Variation" ist ein "schwacher" Ableitungsbegriff; er benötigt keine Topologie auf X.*