ELEMENTARE DIFFERENTIALGEOMETRIE

PROF. GUOFANG WANG

Contents

0. Vorab: Der Euklidische Raum 2
1. Kurven 4
1.1. Parametrisierungen 4
1.2. Länge 7
1.3. Ebene Kurven 9
1.4. Umlaufzahl und Totalkrümmung 15
1.5. Raumkurven 27
2. Klassische Flächentheorie 30
2.1. Reguläre Flächen 30
2.2. Die Tangentialebene 36
2.3. Die erste Fundamentalform (Metrik) 39
2.4. Normalenfelder und Orientierbarkeit 42
2.5. Die zweite Fundamentalform 44
2.6. Die Krümmung 46
2.7. Flčheninhalten und Integration auf Flächen 55
2.8. Einige Klassen von Flächen 60
2.9. Minimalflächen 64
3. Innere Geometrie von Flächen 74
3.1. Isometrien 74
3.2. Vektorfelder und kovariante Ableitung 77
3.3. Krümmungstensor und Theorema Egregium 84
3.4. Riemannsche Metriken 89
3.5. Geodätische 92
3.6. Exponentialabbildung 100
3.7. Parallelverschiebung 107
3.8. Jocobi-Felder 110
3.9. Der Divergenzsatz 113
3.10. Variation der Metrik 119

Dieses Skript basiert auf dem Buch von Christian Bär “Elementare Differentialgeometrie”.

0. Vorab: Der Euklidische Raum

In dieser Vorlesung geht es (hauptsächlich) um differenziebare Kurven und Flächen im $(\mathbb{R}^n, d)$, wobei zumeist $n = 3$ oder $n = 2$. Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den Vektoreraum aller Spaltenvektoren mit n reellen Einträgen,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, \cdots, x^n)^t \in \mathbb{R}^n.$$

Das euklidische Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ wird mit spitzen Klammern geschrieben,

$$x \cdot y = \langle (x^1, \cdots, x^n)^t, (y^1 \cdots, y^n)^t \rangle = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j.$$

Die euklidische Norm (bzw. der Abstand) ist gegeben durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

(bzw.

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Mit diesem Abstand ist $\mathbb{R}^n$ metrischer Raum. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heiß Isometrie, fass F injektiv und surjektiv ist und gilt:

$$d(F(x), F(x)) = d(x, y), \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Man kann zeigen, dass die Menge der Isometrien vom $\mathbb{R}^n$ eine Gruppe ist. Man nennt die Gruppe die Isometriegruppe.

Theorem 0.1 (Isometriegruppe von $\mathbb{R}^n$)**.** *Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ sind die Abbildungen der From*

$$F(x) = Sx + a \qquad \textit{mit } S \in \mathbb{O}(n) \textit{ und } a \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Abbildungen nennt man auch eukldische Bewegungen (rigid motion auf Englisch).

Proof. Es ist leicht zu sehen, dass jede solche Abbildung isometrisch und surjektiv ist. Sei umgekehrt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie, zunächst mit $F(0) = 0$. Dann folgt

$$|F(x)| = |x|.$$

Mit der Polarisationsformel schließ wir,

$$\begin{aligned} \langle F(x), F(y) \rangle &= -\frac{1}{2}(|F(x) - F(y)|^2 - |F(x)|^2 - |F(y)|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(|x - y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Ist $e_1, \cdots, e_n$ die Standardbasis, so folgt

$$\langle F(e_i), F(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \tag{1}$$

d.h., $F(e_1), \cdots, F(e_n)$ ist wieder eine Orthonormalbasis, und es folgt für $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \langle F(x), F(e_i) \rangle F(e_i) = \sum_{i=1}^n x^i F(e_i).$$

Somit ist F eine lineare Abbildung. Mit (1) ist $F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$.

Sei schließlich $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Isometrie mit $F(0) = a \in \mathbb{R}^n$. Mit $\tau_{-a}(x) = x - a$ folgt dann $\tau_{-a} \circ F(0) = 0$, also $\tau_{-a} \circ F(x) = Sx$ für ein $S \in \mathbb{O}(n)$, bzw, $F(x) = Sx + a$.

■

Remark 0.2. Für eine Isometrie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Darstellung $F(x) = Sx + a$ eindeutig bestimmt, denn es gilt $a = F(0)$ und $S = DF(0)$ (sogar $S = DF(x) = D_x F$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$).

Hierbei ist $DF(x) = D_x F$ die Jacobi-Matrix in $x \in \mathbb{R}^n$

$$D_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

für $f = (f^1, \cdots, f^m)^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Speziell füe eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{grad} f = Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)^t$$

der Gradient.

Für einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$V^\perp := \{ \, x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall \, y \in V \}$$

das orthogonale Komplement.

Das Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ -x^1 y^3 + x^3 y^1 \\ x^1 y^2 - x^2 y^1 \end{pmatrix}.$$

Eine Gleichung der Form $f(x) = g(x) + O(h(x))$ (bzw. $o(h(x))$) für $x \to 0$ bedeutet, dass

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \le C, \quad \text{für alle } x \neq 0 \text{ aus einer Umgebung von } 0,$$

(bzw.

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \to 0, \text{ mit } 0 \neq x \to 0.$$

)

1. Kurven

1.1. Parametrisierungen.

Definition 1.1 (parametrisierte Kurve)**.** Eine parametrisierte Kurve ist eine C^∞-Abbildung

$$c : I \to \mathbb{R}^n,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall ist und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Das intervall I aus der definition kann offen, abgeschlossen oder halbabgeschlossen sein; auch kann I beschränkt oder unbschränkt sein. Eine Abbildung $c(t)$ wird gegeben durch

$$c(t) = (c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t))^t,$$

wobei $c_i : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion für alle $1 \leq i \leq n$ ist. Die Abbildung c is genau dann C^∞, wenn für jedes $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ die Funktion c_i C^∞ ist. Die Ableitung c' von c ist $(c'_1(t), c'_2(t), \cdots, c'_n(t))^t$.

Definition 1.2 (reguläre parametrisierte Kurve)**.** Eine reguläre parametrisierte Kurve ist eine parametrisirte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^N$ mit

$$c'(t) \neq 0$$

für alle $t \in I$.

Beispiel 1.3. a. (Die Gerade) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} c_0 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \to & p + vt, \end{array}$$

wobei $p, v \in \mathbb{R}^n$, ist eine parametrisierte Kurve. Ferner gilt $c'(t) = v$ für alle $t \in \mathbb{R}$, somit ist c genau dann regulär parametrisiert, wenn $v \neq 0$.

b. (Die Kreislinie in der Ebene mit Radius $r > 0$) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} c_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (r\cos t, r\sin t)^t, \end{array}$$

ist eine reguläre parametrisierte Kurve.

b'. (Die Kreislinie in der Ebene mit Radius $r > 0$) Die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} c_2 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & (r\cos 2t, r\sin 2t)^t, \end{array}$$

ist eine reguläre parametrisierte Kurve.

c. (*Traktrix* oder *Schleppkurve*) Die Kurve

$$c(t) = (\sin t, \cos t + \ln\tan(t/2))^t$$

ist regulär auf $(0, \frac{\pi}{2})$, aber nicht regulär auf $(0, \pi)$, denn $\dot{c}(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)^t$.

Definition 1.4 (Umparametrisierung)**.** Seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $d : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre parametrisierte Kurven. Man sagt, dass d eine Umparametrisierung von c ist, g.d.w. ein Diffeomorphismus

$$\varphi : J \to I$$

existiert mit

$$d = c \circ \varphi.$$

φ heißt eine Parametertransformation.

Ein Abbildung $\varphi : J \to I$ heißt *Diffeomorphismus*, g.d.w. sie eine C^∞-Bijektion und ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : I \to J$ auch C^∞ ist. Nach der Kettenregel gilt $(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$. Damit eine Umparametrisierung einer regulär parametrisierten Kurve wiederum regulär ist, denn

$$d'(t) = c'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \neq 0.$$

Im Beispiel 1.3 b ist die reguläre parametrisierte c_2 eine Umparametrisierung von c_1, denn $c_2 = c_1 \circ \varphi$ mit $\varphi(t) = 2t$.

Definition 1.5. Auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven wird die Relation " $\sim$ " definiert durch

$$d \sim c \Leftrightarrow d \text{ ist eine Umparametrisierung von } c.$$

Proposition 1.6. *Die Relation " $\sim$ " ist eine Äquivalentrelation auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven.*

Beweis. Wir müssen die Flexivität, die Symmetrie, und die Transitivität nachprüfen:

Reflexivität. $(c \sim c)$: sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve. Wähle $J := I$ und ein triviale Diffeomorphismus $\varphi = \mathrm{Id}_I$, dann ist $c = c \circ \varphi$, d.h. $c \sim c$.

Symmetrie. $(d \sim c \Rightarrow c \sim d)$: seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $d : J \to \mathbb{R}^n$ reguläre Parametrisierte Kurven so dass $d \sim c$. Aus der Definition von $\sim$ existiert einer Diffoemorphismus $\varphi : J \to I$ mit $d = c \circ \varphi$. Ebenfalls ist seine Umkehrabbildung φ^{-1} ein Diffoemorphismus. Setze $\psi = \varphi^{-1}$. Dann gilt $c = d \circ \psi$, d.h., $c \sim d$.

Transitivität. $(d \sim c$ und $e \sim d \Rightarrow e \sim c)$: seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ $d : J \to \mathbb{R}^n$ und $e : K \to \mathbb{R}^n$ reguläre Parametrisierte Kurven mit $d \sim c$ und $e \sim d$. Aus der Definition von $\sim$ folgt die Existenz zweier Diffeomorphismen $\varphi : J \to I$ und $\psi : K \to J$ mit $d = c \circ \varphi$ und $e = d \circ \psi$. Dann gilt $e = c \circ (\varphi \circ \psi)$ und $\varphi \circ \psi$ ist auch ein Diffeomorphismus. Somit gilt $e \sim c$. ■

Definition 1.7 (Kurve)**.** Eine Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. " $\sim$ " von regulären parametrisirten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind. Wir bezeichnen mit $[c]$ die Äquivalenzklasse von c.

Definition 1.8 (Spur einer Kurve)**.** Die Spur einer Kurve ist die Menge $c(I) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve ist.

Die Spur von $[c]$ ist wohldefiniert, denn: ist $d : J \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von $c : I \to \mathbb{R}^n$, so existiert ein Diifeomorphismus $\varphi : J \to I$ mit $d = c \circ \varphi$, und somit gilt $d(J) = c(\varphi(I)) = c(I)$.

Im Beispiel 1.3, die Spur von $[c_0]$ ist eine Gerade und die Spur von $[c_1]$ ist der Kreis

$$\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Eine parametertransformation kann die Richtung, in der die Bildkurve durchlaufen wird, entweder umkehren oder erhalten. $\varphi(t) = t$ ändert nichts an der parametrisierten Kurve, $\varphi(t) = -t$ dagegen kehrt den Durchlaufsinn um.

Definition 1.9. Eine parametertransformation φ heißt orientierungserhaltend, falls $\varphi'(t) > 0$. Die parametertransformation φ heißt orientierungsumkehrend, falls $\varphi'(t) < 0$.

Eine Umparametrisierung $d = c \circ \varphi$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), falls φ orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend) ist.

Jede parametertransformation ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. (Beweis: Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $\varphi'(t_1) < 0$ und $\varphi'(t_2) > 0$. Nach den Zwischenwertsatz existiert $t_3 \in (t_1, t_2)$ mit $\varphi'(t_3) = 0$. Das ist unmöglich.)

Definition 1.10. Auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven wird die Relation "$\sim_+$" definiert durch

$d \sim_+ c \Leftrightarrow$ d ist eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von c,

Proposition 1.11. *Die Relation " $\sim_+$ " ist eine Äquivalentrelation auf der Mengen der regulären parametrisierten Kurven.*

Definition 1.12. Eine orientierte Kurve ist eine Äquivalenzklasse bzgl. " $\sim$ "$_+$ von regulären parametrisirten Kurven. Wir bezeichen mit $[c]_+$ die Äquivalenzklasse von c.

Jede Kurve hat genau zwei Orientierungen, d.h. es gibt genau zwei orientierte Kurven.

1.2. **Länge.**

Definition 1.13 (Länge einer Kurve)**.** Die Länge einer Kurve $[c]$ ist definiert durch

$$L[c] := \int_I \|c'(t)\| dt,$$

wobei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve ist.

Proposition 1.14. *Die Länge von $[c]$ ist wohldefiniert.*

Beweis. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve und $d = c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung von c. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_J \|d'(t)\| dt &= \int_J \|c'(\varphi)\varphi'(t)\| dt && \text{(Kettenregel)} \\ &= \int_J \|c'(\varphi)\| \cdot |\varphi'(t)| dt \\ &= \int_I \|c'(s)\| ds && (s = \varphi(t)). \end{aligned}$$

∎

Die Länge von c_0 im Intervall $[t_0, t_1]$ ist

$$L[c_0] = \int_{t_0}^{t_1} \|v\| dt = (t_1 - t_0) \cdot \|v\|.$$

Die Länge von c_1 im Intervall $[0, 2\pi]$ ist

$$L[c_1] = \int_0^{2\pi} \|c_1'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Definition 1.15 (nach Bogenlänge parametrisierte Kurve)**.** Eine reguläre Parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt nach Bogenlänge parametrisierte g.d.w. für alle $t \in I$ gilt

$$\|c'(t)\| = 1.$$

Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $t_0 \in I$ fest. Für alle $t \in I$ mit $t > t_0$ gilt

$$L[c_{[t_0,t]}] = \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| ds = t - t_0.$$

Tatsächlich, $c : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle $t_0, t \in I$ mit $t > t_0$ gilt

$$L[c_{[t_0,t]}] = t - t_0.$$

Proposition 1.16 (Existenz der Umparametrisierung nach Bogenlänge)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierte Kurve. Dann existiert er eine orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c.*

("Eindeutigkeit") Zwei Umparametrisierungen nach Bogenlänge von c unterscheiden sich durch eine affine Parametertransformation der Form

$$t \to \pm t + r_0,$$

für ein $r \in \mathbb{R}$.

Beweis. (Existenz) Sei $t_0 \in I$ und sezte

$$\psi(t) := \int_{t_0}^{t} \|c'(s)\| ds.$$

Die Funktion ψ ist C^∞ und $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0$ für alle $t \in I$. Sezte $J := \psi(I)$. Es ist klar, dass $\psi : I \to J$ eine Diffeomorphismus ist mit ihrer Umkehrabbildung $\varphi := \psi^{-1}$ und

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|c'(\varphi)\|}.$$

Setze $d = c \circ \varphi$. Dann ist d eine orentierungserhaltende Umparametrisierung von c und nach der Kettenregel gilt es für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} d'(t) &= c'(\varphi(t))\varphi'(t) \qquad\qquad (\varphi'(t) = \frac{1}{\|c'(\varphi)\|}) \\ &= \frac{c'(\varphi(t))}{\|c'(\varphi)\|}, \end{aligned}$$

so dass $\|d'(t)\| = 1$ für alle $t \in J$. Somit wird die Existenz bewiesen.

(Eindeutigkeit) Sei $e : K \to \mathbb{R}^n$ andere Umparametrisierung nach Bogenlaïge von c. Dann ist e auch eine Umparametrisierung von d (Sehe den Beweis der Transitivität der Relation $\sim$), d.h. ein Diffeomorphismus $\eta : K \to J$ so existiert, dass $e = d \circ \eta$. Aus

$$1 = \|e'(t)\| = \|d'(\eta(t))\| \cdot |\eta'(t)| = |\eta'(t)|,$$

haben wir

$$\eta(t) = \pm t + r_0,$$

für ein $r_0 \in \mathbb{R}$. ∎

Beispiel 1.17. a. Sei $c_0(t) = p + vt$ in Beispiele 1 gegeben. Im diesem Fall ist die im letzten Beweis angegebene Funktion ψ

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \|v\| ds = (t - t_0)\|v\|.$$

Ihre Umkehrabbildung ist $\varphi(t) = \psi^{-1} = t_0 + t\frac{1}{\|v\|}$. Die orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c_0 nun ist

$$\tilde{c}_0(t) = c \circ \varphi(t) = p + t_0 v + t\frac{v}{\|v\|}.$$

b. Sei $c_1(t) = (r\cos t, r\sin t) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$. Setze $t_0 = 0$. Dann haben wir

$$\psi(t) = \int_0^t r ds = rt$$

und ihre Umkehrabbildung

$$\varphi(t) = \psi^{-1}(t) = \frac{t}{r}$$

mit $J := \psi([0, 2\pi)) = [0, 2r\pi)$. Die Abbildung

$$\tilde{c}_1(t) = c_1 \circ \varphi(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r}) : [0, 2r\pi) \to \mathbb{R}^2$$

ist die orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c_1.

1.3. **Ebene Kurven.**

Definition 1.18 (ebene Kurve)**.** Eine ebene Kurve ist eine Kurve von $\mathbb{R}^2$ $c : I \to \mathbb{R}^2$.

Definition 1.19 (Normalenfeld)**.** Sei $c : R \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Das Normalenfeld zu $c = (c_1, c_2)^t$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} n: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & n(t) := Jc'(t) = \begin{pmatrix} -c_2'(t) \\ c_1'(t) \end{pmatrix}, \end{array}$$

wobei

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

(c', n) bilden eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$. Mit anderen Worten, wir drehen dem Geschwindigkeitsvector um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn. Insbesondere gelten $\|n(t)\|^2 = 1$, $n(t) \perp c'(t)$, und

$$\det\big(c'(t), n(t)\big) = 1.$$

(Beweis. $\det(c'(t), n(t)) = \det\begin{pmatrix} c_1' & -c_2' \\ c_2' & c_1' \end{pmatrix} = \|c'(t)\|^2 = 1$.)

Bemerkung. • Das Normalenfeld n is C^∞.

• Das Normalenfeld (bzw. der Geschwindigkeitsvektor) hängt vom Durchlaufsinn ab.

$$\begin{array}{rcl} \bar{c}(t) & = & c(-t) \\ \bar{c}'(t) & = & -c'(-t) \\ \bar{n}(t) & = & -n(-t). \end{array}$$

Beispiel 1.20. a). $c(t) = p + vt$, $v \neq 0$, $\|v\| = 1$.

$$c'(t) = v, \quad n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v.$$

b) $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})^t$.

$$\begin{aligned} c'(t) &= (-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r})^t \\ n(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\frac{t}{r} \\ \cos\frac{t}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{t}{r} \\ -\sin\frac{t}{r} \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}c(t). \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir messen, wie stark der geschwindigkeitsvektor mit der Zeit t variiert.

Proposition 1.21. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und n das Normalenfeld zu c. Dann steht für jedes $t \in I$ der $c''(t)$ proportional zu $n(t)$.*

Beweis. Wegen $\|c'(t)\|^2 = 1$ für alle $t \in I$ gilt beim Ableiten

$$\begin{aligned} 0 &= (\|c'\|^2)'(t) = \langle c', c'\rangle'(t) \\ &= \langle c'', c'\rangle(t) + \langle c', c''\rangle(t) \\ &= 2\langle c'', c'\rangle(t). \end{aligned}$$

Somit $c''(t) = \langle c'', c'\rangle c' + \langle c'', n\rangle n = \langle c'', n\rangle n$. ∎

Nun definieren wir den wichtige Begriff der Differentialgeometrie: die *Krümmung.*

Definition 1.22 (Krümmung einer nach Bögenlänge parametrisierten ebenen Kurve)**.** Die Krümmung einer nach Bögenlänge para-metrisierten ebenen Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ ist die Funktion $\kappa : I \to \mathbb{R}$ so dass $c''(t) = \kappa(t)n(t)$ für alle $t \in I$.

- $\kappa(t) = \langle c''(t), n(t)\rangle$ ist C^∞.

Beispiel 1.23. a). $c(t) = p + vt$, $v \neq 0$, $\|v\| = 1$. Wegen $c'(t) = v$ für alle t gilt dann $c''(t) = 0$ und somot $\kappa(t) = 0$.

b). $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, \sin\frac{t}{r})$. Wir wissen, dass $n(t) = -\frac{1}{r}c(t)$ und

$$c''(t) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{t}{r}) = -\frac{1}{r^2}c(t).$$

Damit gilt $c'' = \frac{1}{r}n$ und $\kappa = \frac{1}{r}$.

Definition 1.24 (Krümmung einer parametrisierten ebenen Kurve)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Die Krümmung κ von c wird definiert durch

$$\kappa := \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}, \quad \kappa(t) = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}(t),$$

wobei $c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^2$ eine orinetierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ist mit Krümmung (in Sinne der Def.) $\kappa_{c\circ\varphi}$.

Bemerkung. Die Krümmung von c ist wohldefiniert, d.h., κ hängt nicht von der Wahl der orientierungserhaltenden Umparametrisierung nach Bogenlänge von c ab. Denn: ist $c \circ \xi$ eine andere orientierungserhaltende Umparametrisierung nach Bogenlänge von c, so existiert aus Proposition 1.16 ein $r_0 \in \mathbb{R}$ so dass $\xi(t) = \varphi(t + r_0)$ für alle t. Nun gilt für die Krümmung von $t \to c \circ \varphi(t + r_0) = c \circ \xi(t)$: $\kappa_{c\circ\xi}(t) = \kappa_{c\circ\varphi}(t + r_0)$ für alle t, und somit

$$\begin{aligned}(\kappa_{c\circ\xi} \circ \xi^{-1}(t) &= \kappa_{c\circ\xi}(\xi^{-1}(t)) = \kappa_{c\circ\xi}(\varphi^{-1}(t) - r_0) \\ &= \kappa_{c\circ\varphi}(\varphi^{-1}(t) - r_0 + r_0) = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}(t),\end{aligned}$$

d.h. $\kappa = \kappa_{c\circ\xi} \circ \xi^{-1} = \kappa_{c\circ\varphi} \circ \varphi^{-1}$.

Lemma 1.25 (Krümmung einer parametrisierten ebenen Kurve)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Dann ist die Krümmung von c gegeben durch*

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

(Übung !)

Proposition 1.26 (Geometrische Interpretation der Krümmung)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld und κ die Krümmung von c. Sei $t_0 \in I$. Dann gilt für $t \in I$*

$$c(t) = c(t_0) + (t - t_0)c'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\kappa(t_0)n(t_0) + (t - t_0)^3 o(t - t_0),$$

wobei $o(t - t_0) \to 0$ als $t \to t_0$.

Beweis. Bei Taylorentwicklung. ∎

Satz 1.27 (Frenet-Gleichungen)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, n das Normalenfeld und κ die Krümmung von c. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \end{pmatrix},$$

d.h.,

$$\begin{cases} c'' &= \kappa \cdot n \\ n' &= -\kappa \cdot c' \end{cases}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist die Definition der Krümmung κ. Zur Zweite benutzen wir die folgende Formel

$$n'(t) = \langle n'(t), c'(t)\rangle c'(t) + \langle n'(t), n(t)\rangle n(t),$$

denn $\{c'(t), n(t)\}$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^2$. Beim Ableiten der Gleichheit $\langle c', n\rangle = 0$

$$0 = \langle c', n\rangle' = \langle c'', n\rangle + \langle c', n'\rangle$$

folgt

$$\langle c', n\rangle = -\langle c'', n\rangle = -\kappa$$

aus. Analog wegen $\|n\|^2 = 1$ gilt

$$0 = (\|n\|^2)' = 2\langle n', n\rangle,$$

d.h., $\langle n', n\rangle = 0$, somit wird die Zweite bewiesen. ■

Proposition 1.28 (Invarianz der Krümmung unter euklidischer Bewegung). *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei A eine oreintierungserhaltende euklidische Bewegung von $\mathbb{R}^2$. Setze $\tilde{c} := A \circ c : I \to \mathbb{R}^2$. Dann ist $\tilde{c}$ ebenfalls eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und es gilt für ihre Krümmung*

$$\tilde{\kappa} = \kappa.$$

Beweis. Die Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist euklidische Bewegung von $\mathbb{R}^2$ g.d.w. existieren $B \in O(2)$ (Gruppe der orthogonalen linearen Transformationen von $\mathbb{R}^2$) und $v \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$A(x) = Bx + v.$$

A ist orientierungserhaltend, g.d.w. $\det B = 1$. Wegen $\tilde{c}(t) = Bc(t) + v$ für alle $t \in I$, gilt beim Ableiten

$$\tilde{c}'(t) = Bc'(t).$$

Da B eine orientierungserhaltende Transformation ist, gilt es

$$\tilde{n}(t) = Bn(t).$$

$(\det(Bc', Bn) = \det(B)\det(c', n) = 1.)$ Dann

$$\tilde{k} = \langle \tilde{c}''(t), \tilde{n}(t)\rangle = \langle Bc''(t), Bn(t)\rangle = \langle c''(t), n(t)\rangle = \kappa.$$

■

Bemerkung. Ist A orientierungsumkehrende euklidische Bewegung, so gilt diesmal

$$\tilde{\kappa} = -\kappa.$$

Satz 1.29 (Hauptsatz der Theorie der ebenen Kurven). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung*

$$\kappa = f.$$

Seien c_1 und c_2 zwei nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit Krümmung $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Dann existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung A mit

$$c_2 = A \circ c_1.$$

Beweis. Zurnächst brauchen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz. Sei $A : I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ eine C^∞-Abbildung. Seien $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau eine C^∞-Abbildung $y : I \to \mathbb{R}^n$ so dass

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Ferner, falls $y_0 = 0$, dann gilt $y(t) = 0$ für alle $t \in I$.

(Existenz). Sei $t_0 \in I$ fest. Wir betrachten die folgende Gleichung

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}(t_0) &= \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$. Aus dem Hilfssatz existiert eine eindeutige C^∞ Lösung $(v_1, v_2) : I \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Wir zeigen nun, dass für alle t $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positiv ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden. Bei Ableiten haben wir

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1\rangle' &= 2\langle v_1', v_1\rangle = 2f\langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_2, v_2\rangle' &= 2\langle v_2', v_2\rangle = -2f\langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle' &= \langle v_1', v_2\rangle + \langle v_1, v_2'\rangle = f(\langle v_2, v_2\rangle - \langle v_1, v_1\rangle, \end{aligned}$$

insbesondere $(\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle)' = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 - \|e_2\|^2 \\ \langle e_1, e_2\rangle \end{pmatrix} = 0.$$

Durch die Anwendung des obigen Satzes, gilt

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_2, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle \end{pmatrix}(t) = 0,$$

für alle $t \in I$. Zusammen mit $(\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v_2\rangle)' = 0$ ergeben sich

$$\|v_1(t)\| = \|e_1\| = 1, \|v_2(t)\| = \|e_2\| = 1, \langle v_1(t), v_2(t)\rangle = 0$$

für alle $t \in I$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden. Die Funktion $t \to \det(v_1(t), v_2(t))$ ist stetig und sie hat Werte in $\{-1, 1\}$. Also $\det(v_1(t).v_2(t)) = 1$, d.h. $\{v_1(t), v_2(t)\}$ eine positive ONB von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Jetzt setze

$$c(t) := \int_{t_0}^{t} v_1(s)ds.$$

Die Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^2$ ist C^∞, und es gilt: $c(t_0) = 0$, $c' = v_1$ und $c'' = v_1' = fv_2$. Aber $v_2 = n$, das Normalenfeld von c, denn $\{v_1(t), v_2(t)\}$ ist eine positive ONB von $\mathbb{R}^2$. Folglich haben wir

$$c'' = fn,$$

d.h., die Krümmung von c ist gleich f.

(Eindeutigkeit) 1. Fall. Seien c_1 und c nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$ und $c_1(t_0) = c_2(t_0)$, $c_1'(t_0) = c_2'(t_0)$. Es is klar, dass $n_1(t_0) = n_2(t_0)$ gilt, wobei n_i das Normalenfeld von c_i ist. Aus den Frenet-Gleichungen gilt dann

$$\begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' - c_2' \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung des obigen Hilfssattzes erhalten wir $c_1' - c_2' = n_1 - n_2 = 0$ auf I, und daher

$$\begin{aligned} c_2(t) &= c_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_2'(s)ds \\ &= c_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_1'(s)ds = c_1(t), \end{aligned}$$

d.h. $c_1 = c_2$.

2. Fall. Im allgemeinen Fall seien c_1, c_2 nach Bogenlänge parametrisierten Kurven mit $\kappa_1 = \kappa_2 = f$. Sei $t_0 \in I$ fest. Finde eine oerentirungserhaltende Transformation $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x) := Bx + v$ mit $\det B = 1$, so dass

$$\begin{cases} A(c_1(t_0)) &= c_2(t_0), \\ Bc_1'(t_0) &= c_2'(t_0), \\ Bn_1(t_0) &= n_2(t_0). \end{cases}$$

Aus der Proposition 1.28 gilt dann

$$\kappa_{A \circ c_1} = \kappa_1 = f.$$

Wir wenden den 1. Fall auf $A \circ c_1$ und c_2 an und erhalten

$$A \circ c_1 = c_2.$$

■

1.4. **Umlaufzahl und Totalkrümmung.**

Definition 1.30 (geschlossene Kurve)**.** Eine parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt periodisch mit Periode $L > 0$, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t + L) = c(t)$, und es kein $0 < L' < L$ gilt, so dass ebenfalls $c(t + L') = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Eine Kurve heißt geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

Beispiel $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$ ist eine periodische parametrisierte Kurve mit Periode $L = 2\pi$. Somit ist die durch diese parametrisierung repräsentierte Kurve geschlossenen.

Nicht jede parametrisierung einer geschlossenen Kurve ist periodisch:

$$c(t) = (\cos t^3, \sin t^3).$$

Definition 1.31 (einfach geschlossene Kurve)**.** Eine geschlossene Kurve heißt einfach geschlossen, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung c mit Periode L hat, so dass

$$c_{|[0,L)} : [0, L) \to \mathbb{R}^2$$

injektiv ist.

Lemma 1.32 (Winkelfunktion)**.** *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Dann existiert es eine C^∞-Funktion $\theta : I \to \mathbb{R}$, so dass*

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $\theta_2; I \to \mathbb{R}$ eine andere C^∞-Funktion mit $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2(t) \\ \sin\theta_2(t) \end{pmatrix}$ für alle t, so existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\theta_2 = \theta + 2k\pi.$$

Beweis. (Eindeutigkeit). Angenommen. Es gilt zwei Funktionen θ und $\theta_2 : I \to \mathbb{R}$ mit

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2(t) \\ \sin\theta_2(t) \end{pmatrix},$$

für alle $t \in I$. Dann gilt es zu jedem $t \in I$ eine eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass $\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi$. Weil $\theta_2 - \theta$ auf I stetig ist, muss k konstant auf I sein, d.h. es existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\theta_2(t) = \theta(t) + 2k\pi,$$

für alle $t \in I$.

(Existenz). Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall. Die Menge $c'(I)$ ist in einem der folgenden Halbkreise enthalten:

$$S_R := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, x > 0\}, \qquad S_L := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, x < 0\}$$
$$S_O := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, y > 0\}, \qquad S_L := \{(x,y) \in \mathbb{S}^1, y < 0\}.$$

Sei die Menge $c'(I)$ z. B. in S_R, d.h. $c_1' > 0$. Für unsere Funktion θ muss also gelten

$$\frac{c_2'(t)}{c_1'(t)} = \frac{\sin\theta(t)}{\cos\theta(t)} = \tan\theta(t).$$

Also ist

$$\theta = \arctan\left(\frac{c_2'(t)}{c_1'(t)}\right) + 2k\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Wird der Anfangswert $\theta(a)$ vorgegeben, so ist k und damit θ eindeutig festgelegt.

2. Fall. Im Allgemeinen kann man nicht voraussetzten, dass $c'([0,T]) \subset S_R$, bzw. S_L, S_O, S_U. Es existiert aber eine Teiling $\{0 =: t_0 < t_1 < \cdots < t_n := T\}$ von $[0,T]$ so dass

$$c'([t_i, t_{i+1}]) \subset S_R \text{ oder } S_L, S_O, S_U$$

for alle $i = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Dies folgt aus der Gleichmäßigsteigkeit von c' auf dem kompaktem Intervall $[0,T]$. Wir wenden den 1. Fall auf $c'([t_0,t_1])$ an: Es existiert eine C^∞-Funktion $\theta_0 : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ so dass $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0(t) \\ \sin\theta_0(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in [t_0,t_1]$. Dann wenden wir wiederum den 1. Fall auf $c'([t_1,t_2])$ an mit der Bedingung $\theta_1(t_1) = \theta_0(t_1)$. Rekursiv wenden wir den 1. Fall auf $c'([t_i,t_{i+1}])$ an mit der Bedingung $\theta_i(t_i) = \theta_{i-1}(t_i)$, und bekommen wir am Ende eine stückerwise glatte Funktion $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$, die durch $\theta_{[t_i,t_{i+1}]} := \theta_i$ definiert. Sie erfüllt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Eine solche Funktion θ ist C^∞ bei der Eindeutigkeit. ■

Die Funktion θ misst den Winkel zwischen $c'(t)$ und der x-Achse.

Definition 1.33 (Umlaufzahl)**.** Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve, periodisch mit Periode L. Sie $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie Lemma 1.32. Dann heißt

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0))$$

Umlaufzahl von c.

Beispiel 1.34. Der Kreis vom Radius $r > 0$, $c(t) = (r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r})$ mit Periode $L = 2\pi r$.

Der Tangentialverktor ist

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{t}{r} \\ \cos\frac{t}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als Winkelfunktion

$$\theta(t) = \frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}.$$

und somit für die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi r) - \theta(0)) = 1.$$

Lemma 1.35. *a). n_c ist stets eine Ganze Zahl.*

b). Sein c_1, $c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zwei ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurven, periodisch mit Periode L. Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungserhaltende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_2} = n_{c_1}.$$

Entsteht c_2 aus c_1 durch eine orientierungsumkehrende Parametertransformation, so gilt

$$n_{c_2} = -n_{c_1}.$$

Beweis. *a*). Aus der Periodizität folgt $\cos(\theta(L)) = \cos(\theta(0))$, $\sin(\theta(L)) = \sin(\theta(0))$ und somit

$$\theta(L) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

b) Sie $c_1 = c_2 \circ \varphi$. Die Parametertransformation hat die folgende Form

$$\varphi(t) = \pm t + r_0,$$

für $r_0 \in \mathbb{R}$, wobei das Vorzeichen davon anhängt, ob die parametertransformation die Orientierung erhält oder umkehrt. Ist θ_2 eine Winkelfunktion für c_2 wie im Lemma 1.32. Im orientierungserhaltenden Fall, ist $\theta_1 := \theta_2 \circ \varphi$ eine Winkelfunktion für c_1, denn

$$c_1'(t) = c_2'(t + r_0) = (\cos(\theta_2(t + r_0)), \sin(\theta_2(t + r_0))).$$

Aber $\tilde{\theta}_1(t) = \theta(t + L)$ ist auch eine Winkelfunktion für c_1, dann gilt

$$\begin{aligned} 2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) &= (\theta_2(L) - \theta_2(0)) - (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\ &= \theta_1(L - r_0) - \theta_1(-r_0) - (\theta_1(L) - \theta_1(0)) \\ &= (\tilde{\theta}_1(-r_0) - \tilde{\theta}_1(0)) - (\theta_1(-r_0) - \theta_1(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im orientierungsumkehrenden Fall sieht man, dass für eine Winkelfunktion θ_2 für c_2. Die Funktion $\theta_1 := \theta_2(-t + r_0) + \pi$ eine Winkelfunktion für c_1 ist, denn dann ist $\varphi(t) = -t + r_0$ und somit

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -c_2'(-t + r_0) \\ &= -(\cos(\theta_2(-t + r_0), \sin(\theta_2(-t + r_0)) \\ &= (\cos(\theta_2(-t + r_0) + \pi), \sin(\theta_2(-t + r_0) + \pi)). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
2\pi(n_{c_1}+n_{c_2}) &= (\theta_2(L)-\theta_2(0))+(\theta_1(L)-\theta_1(0)) \\
&= \theta_1(-L+r_0)-\theta_1(r_0)+(\theta_1(L)-\theta_1(0)) \\
&= (\theta_1(-L+r_0)-\theta_1(0))-(\tilde{\theta}_1(-L+r_0)-\tilde{\theta}_1(0)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Satz 1.36 (Umlaufzahl durch die Krümmung). *Sei $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte periodische ebene Kurve mit Periode L. Sei $\kappa:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Krümmung von c. Dann gilt*

$$n_c=\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)dt.$$

Beweis. Sei θ eine Winkelfunktion für c, d.h. es gilt

$$c'(t)=(\cos\theta(t),\sin\theta(t)).$$

Beim Ableiten erhalten wir

$$c''(t)=(-\sin(\theta(t))\theta'(t),\cos(\theta(t))\theta'(t)).$$

Andererseits gilt aus der Definition der Krümmung $c''(t)=\kappa(t)\cdot n(t)=\kappa(t)\cdot(-\sin\theta(t),\cos\theta(t))$. Daraus folgt

$$\theta'(t)=\kappa(t).$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned}
n_c &= \frac{1}{2\pi}(\theta(L)-\theta(0))=\frac{1}{2\pi}\int_0^L\theta'(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^L\kappa(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Remark 1.37. Für eine parametrisierte periodische reguläre ebene Kurve mit Periode L gilt

$$n_c=\frac{1}{2\pi}\int_0^L\kappa(t)|c'(t)|dt.$$

Beweis. Übung. ■

Satz 1.38 (Umlaufsatz). *Eine einfach geschlossene orientierte ebene Kurve hat Umlaufzahl* 1 *oder* -1.

Lemma 1.39 (Lifting). *Sei $X\subset\mathbb{R}^n$ sternförmig bgzl x_0. Sei $e:X\to\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann existierte eine stetige Abbildung $\theta:X\to\mathbb{R}$ so dass*

$$e(x)=(\cos\theta(x),\sin\theta(x)).$$

(Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ *sternförmig* bzgl. $x_0 \in X$, falls für jeden Punkt $x \in X$ auch die Strecke zwischen x und x_0 ganz in X enthalten ist, d.h. für alle $t \in [0,1]$ gilt $tx + (1-t)x_0 \in X$.)

Bemerkung. Ist die Abbildung $e : X \to \mathbb{S}^1$ nicht surjektiv, so lässt sich die Abbildung $\theta : X \to \mathbb{R}$ viel leichter angeben. Sei etwa $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ nicht im Bild von e. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Psi_k : (\phi_0 + 2\pi(k-1), \phi_0 + 2\pi k) & \to & \mathbb{S}^1 - \{(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)\}, \\ \Psi_k(t) & = & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

eine Homöomorphismus. Dann ist $\theta := \Psi_k^{-1} \circ e : X \to (\phi_0 + 2\pi(k-1), \phi_0 + 2\pi k)$ und erfüllt

$$e(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x)).$$

Die Zahl k ist dann durch die Bedingung $\theta(x_0) = \theta_0$ eindeutig festgelegt. Insbesondere gilt

$$|\theta(x_1) - \theta(x_2)| < 2\pi, \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Beweis von Lemma 1.39. Sei $x \in X$ und

$$\begin{array}{rcl} e_x : [0,1] & \to & \mathbb{S}^1 \\ e_x(t) & = & e(tx + (1-t)x_0). \end{array}$$

Wörtlich wie im Beweis zur Existenz des Winkelfunktion erhdiralt man eine Winkelfunktion θ_x mit

$$e_x(t) = (\cos\theta_x(t), \sin\theta_x(t))^t.$$

θ_x ist stetig, weil man lokal nach θ_x auflösen kann, je nachdem in welches Halbebene des Kreises man sich befindet. θ_x ist außerdem eindeutig nach Vorgabe von θ_0. Für das gesuchte $\theta : X \to \mathbb{R}$ kann dann nur gelten:

$$\theta(x) = \theta_x(1)$$

und ist somit eindeutig.

Wegen der Stetigkeit von

$$\tilde{e} : (t,x) \mapsto e(tx + (1-t)x_0) = e_x(t)$$

ist wegen der lokalen Auflösbarkeit auch

$$(x,t) \mapsto \theta_x(t)$$

stetig und insbesondere

$$x \mapsto \theta_x(1) = \theta(x).$$

∎

Beweis des Umlaufsatzes. Durch einer Wahl der euklidischen Bewegung nehmen wir o.B.d.A. an, dass $c(t) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\}$, $c(0) = (0,0)$ und $c'(0) = (0,1)$. Setze $X := \{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L\}$. Wir betrachten die stetige Abbildung

$$e : X \to \mathbb{S}^1,$$

$$e(t_1,t_2) = \begin{cases} \dfrac{c(t_2)-c(t_1)}{\|c(t_2)-c(t_1)\|}, & t_2 > t_1 \text{ und } (t_1,t_2) \neq (0,L), \\ c'(t), & t_2 = t_1 = t, \\ -c'(0), & (t_1,t_2) = (0,L). \end{cases}$$

Die Abbildung e ist wohldefiniert und stetig, weil c als einfach geschlossen vorausgesetzt wurde. Wir wählen eine Funktion $\theta : X \to \mathbb{R}$ für e wie in Lemma 1.39. Wegen $e(t,t) = c'(t)$ ist $t \to \theta(t,t)$ eine Winkelfunktion wie in Lamma 1.32. Also die Umlaufzahl ist

$$\begin{aligned} 2\pi n_c &= \theta(L,L) - \theta(0,0) \\ &= \theta(L,L) - \theta(0,L) + \theta(0,L) - \theta(0,0) \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass $\theta(L,L) - \theta(0,L) = \pi$ und $\theta(0,L) - \theta(0,0) = \pi$.

Nun betrachten wir das Intervall $\{(0,t) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < t < L\}$. Für alle $0 < t < L$ $e(0,t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\}$. Also $e(0,t) \in \mathbb{S}^1 - \{(1,0)\}$ für alle $t \in (0,L)$. Wegen der Bemerkung nach Lemma 1.39 nimmt $t \to \theta(0,t)$ sein Bild in einem Intervall der Form $(2\pi k, 2\pi(k+1))$ an, $k \in \mathbb{Z}$. Wir haben

$$\begin{aligned} e(0,L) = -c'(0) = (0,-1) \quad &\Rightarrow \quad \theta(0,L) = \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ e(0,0) = c'(0) = (0,1) \quad &\Rightarrow \quad \theta(0,L) = \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{aligned}$$

somit gilt

$$\theta(0,L) - \theta(0,0) = \pi.$$

Analog ist $(-1,0)$ nicht im Bild der Abbildung $t \to e(t,L) = \frac{-c(t)}{\|c(t)\|} \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\}$ und wir erhalten

$$\theta(L,L) - \theta(0,L) = \pi.$$

Also,

$$2\pi n_c = \pi + \pi = 2\pi.$$

■

Definition 1.40 (Konvexität)**.** Eine ebene Kurve heißt konvex, falls für jeden ihres Punktes gilt: Die Kurve liegt ganz auf einer Seite ihrer Tangente durch diesen Punkt.

Die Konvexitätabedingung für den Punkt $c(t_0) \Leftrightarrow$ gilt es

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } t$$

oder

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } t.$$

Lemma 1.41. *Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Normalenfeld n. Dann ist c genau dann konvex, wenn für alle $t, t_0 \in I$ gilt*

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0$$

oder für alle $t, t_0 \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \leq 0.$$

Beweis. Angenommen falsch. Dann gibt es t_1 unf t_2 mit

$$\langle c(t) - c(t_1), n(t_1) \rangle \geq 0, \quad \text{und} \quad \langle c(t) - c(t_2), n(t_2) \rangle \geq 0, \quad \text{für alle } t$$

Wir können zeigen, dass ein t_3 zwischen t_1 und t_2 derart existiert, dass

$$\langle c(t) - c(t_3), n(t_3) \rangle = 0, \quad \text{für alle } t$$

Es folgt, dass c eine Gerade sein muss. ■

Satz 1.42. *Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge einer einfach geschlossenen ebenen Kurve. Sei $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Krümmung. Die Kurve ist genau dann konvex, wenn $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(t) \leq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. a) Gemäß Lemma 1.41 können wir annehmen, dass für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle \geq 0.$$

Die Taylorentwicklung gibt uns

$$c(t) = c(t_0) + c'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\kappa(t_0)n(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2).$$

Die Skalarmultiplikation mit $n(t_0)$ liefert uns wegen $\langle c'(t), n(t) \rangle = 0$

$$0 \leq \langle c(t) - c(t_0) \rangle = \frac{1}{2}\kappa(t_0)(t - t_0)^2 + o((t - t_0)^2),$$

somit $\kappa(t_0) \geq 0$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$.

b) Sei nun $\kappa(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass die Kurve konvex ist. Wäre die Kurve nicht konvex, so gäbe es ein t_0, derart dass die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \langle c(t) - c(t_0), n(t_0) \rangle,$$

sowohl negativ als auch positiv Werte annimmt. Sei t_2 der Maximum-Punkt von φ, d.h.,

$$\varphi(t_2) = \max \varphi > 0.$$

Sei t_1 der Minimum-Punkt von φ, d.h.,

$$\varphi(t_1) = \min \varphi < 0.$$

Also

$$\varphi(t_1) < 0 = \varphi(t_0) < \varphi(t_2)$$

und

$$\varphi'(t_1) = \varphi'(t_2) = 0.$$

Aus $\varphi'(t_1) = 0$ folgt $\langle c'(t_1), n(t_0)\rangle = 0$. Also ist

$$c'(t_1) = \pm c'(t_0).$$

Analog folgt

$$c'(t_2) = \pm c(t_0).$$

Von $\{c'(t_0), c'(t_1), c'(t_2)\}$ müssen also mindestens zwei übereinstimmen. Wir wählen $s_1, s_2 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass $c'(s_1) = c'(s_2)$, daraus gilt es

$$\theta(s_2) - \theta(s_1) = 2\pi k$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Aus $\theta' = \kappa \geq 0$ folgt, dass θ monoton ist und somit $\theta(s_2)-\theta(s_1) \geq 0$ und $k \geq 0$. Analog folgt $\theta(s_1 + L) - \theta(s_2) = 2\pi l \geq 0$. Die Umlaufzahl

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\theta(s_1 + L) - \theta(s_1)) = k + l = 1$$

nach dem Umlaufsatz. Also muss $k = 0$ oder $l = 0$ gelten. Sei z. B., $k = 0$. Es folgt $\kappa = \theta' = 0$ auf $[s_1, s_2]$ und somit ist c auf $[s_1, s_2]$ eine Gerade, d.h., für alle $s \in [s_1, s_2]$

$$c(s) = c(s_1) + (s - s_1)c'(s_1) = c(s_1) \pm (s - s_1)c'(t_0).$$

Dann erhalten wir für die Funktion φ

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= \langle c(s) - c(t_0), n(t_0)\rangle \\
&= \langle c(s_1) \pm (s - s_1)c'(t_0) - c(t_0), n(t_0)\rangle \\
&= \langle c(s_1) - c(t_0), n(t_0)\rangle,
\end{aligned}$$

für alle $s \in [s_1, s_2]$, d.h., φ ist konstant auf $[s_1, s_2]$. Also $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$. Das ist unmöglich. ■

Definition 1.43. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Man sagt, c hat einem Scheitel in $t_0 \in I$, falls

$$\kappa'(t_0) = 0.$$

Beispiel 1.44. Ellipse, die parametrisiert ist durch

$$\begin{aligned}
c : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\
c(t) &= (a \cos t, b \sin t)
\end{aligned}$$

mit $0 < a < b$. Die Krümmung von c ist

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3} \\
&= \frac{\det\begin{pmatrix} -a\sin t & -a\cos t \\ b\cos t & -b\sin t \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}\right\|^3} \\
&= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

und

$$\kappa'(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2)\sin t \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Also $\kappa'(t) = 0$ gilt genau dann, wenn

$$\sin t \cdot \cos t = 0,$$

d.h., $t = \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z}$. Damit hat die Ellipse genau vier Scheitel in $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Satz 1.45 (Vierscheitelsatz). *Ist $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine periodische nach Bogenlänge parametrisierte konvex ebene Kurve mit Periode L, dann hat c mindestens vier Scheitel in $[0, L)$.*

Lemma 1.46. *Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als zwei Punkten, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden und hat damit insbesondere unendlich viele Schnitt Punkte mit der Geraden.*

Lemma 1.47. *Schneidet eine einfach geschlossene ebene konvexe Kurve eine Gerade in mehr als einem Punkt tangential, so enthält die Kurve ein ganzes Segment dieser Geraden.*

Beweis des Vierscheitelsatzes. Die Krümmung κ von c nimmt wegen der periodizität Maximum und Minimum an, somit haben wir schon zwei Scheitel. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass das Minimum in $t = 0$ und das Maximum in $t = t_0 \in (0, L)$ angenommen wird. Sei G die Gerade durch die beiden Punkte $c(0)$ und $c(t_0)$.

Gemäß Lemma 1.46 und Lemma 1.47 nehmen wir an, dass G keinen weiteren Punkte mit der Kurve gemein hat, ansonst die Krümmung auf einem ganzen Segment konstant 0 ist, und wir erhalten unendlich viele Scheitel.

Nach Anwendung einer euklidischen Bewegung können wir annehmen, dass G die x-Achse ist. Angenommen, die Kurve hat keine weitere Scheitel. Dann verschwindet κ' nirgends auf den beiden Intervallen $(0, t_0)$ und (t_0, L). Wegen $\int_0^L \kappa'(t) = \kappa(L) - \kappa(0) = 0$, muss κ' auf einen der beiden Intervall positiv, auf anderen negativ sein. Also nehmen wir ohne Einschränkung $\kappa'(t) > 0$ für $t \in (0, t_0)$ und $\kappa'(t) < 0$ für $t \in (t_0, L)$, somit

$$\int_0^L \kappa(t)' c_2(t) > 0.$$

Aber wir haben aus die Frenet-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\int_0^L \kappa'(t) c(t) dt &= -\int_0^L \kappa(t) c'(t) dt \\
&= \int_0^L n'(t) dt = n(L) - n(0) = 0,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Somit muss es einen dritten Scheitel geben, etwa in $t_1 \in (t_0, L)$. Angenommen, es gäbe keinen vierten Scheitel. Dann nehmen wir ohne Einschränkung an, dass es $\{s_1, s_2\} \subset \{0, t_0, t_1\}$ mit $s_1 < s_2$, so dass κ'

auf (s_1, s_2) positiv und auf $\mathbb{S}^1 \backslash \{s_1, s_2\}$ negativ ist, existiert. Verwenden wir die obige Methode, erhalten wieder ein Widerspruch. ■

Beweis von Lemma 1.46. Sie $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine parametrisierung nach Bogenlänge mit Periode L. Durch eine Parametertransformation $t \to \pm t + r_0$ können wir erreichen, dass $c(0)$ einee dree Schnittpunkte mit der Geraden ist und $\kappa \geq 0$ erfüllt. Aus Lemma 1.32 gilt die Winkelfunktion θ, $\theta'(t) = \kappa(t) \geq 0$. Nach dem Umlaufsatz ist $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi n_c = 2\pi$. Also ist

$$\theta : [0, L] \to [\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$$

eine glatte monoton wachsende surjektive Funktion, wobei $\theta_0 = \theta(0)$ ist.

Die Kurve c schneide die Gerade G in den Punkten $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < L$. Sei G parametrisiert durch $p_0 + t \cdot v$ mit $\|v\| = 1$. Sei $n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v$ der Normalenvektor von G.

Sei I eines der drei Intervall $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ und $[t_2, L]$. In den Endpunkten I liegt c auf der Gerade G. Wenn $c(t)$ für alle $t \in I$ auf G liegt, so enthält c ein Segment von G und das Lemma ist bewiesen. Nehmen wir also an, dass es auch Punkte $t \in I$ gibt, so dass $c(t)$ nicht auf G liegt. Nun betrachten wir die zu G parallel Gerade G_s, die durch

$$t \to p_0 + t \cdot v + s \cdot n$$

parametrisiert werden. Falls $\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} \neq \emptyset$, definiert $s_1 := \sup\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\}$. Falls $\{s > 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} = \emptyset$, muss $\{s < 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\} \neq \emptyset$, dann $s_1 := \inf\{s < 0 \,|\, G \text{ schneidet } C_I\}$. In jeden Fall schneidet G_{s_1} das Kurvestück $c_{|I}$ in einem Punkt τ aus dem Inneren von T tangetial, d.h., $c'(\tau) = \pm v$. Das Argument gilt für jedes Intervall $I = [0, t_1]$,, $[t_1, t_2]$ oder $[t_2, t_3]$. Deshalb erhalten wir τ_1, τ_2, τ_3 mit $0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < t_3 < L$ und $c'(\tau_j) = \pm v$.

Nun wir bezeichnen θ_1 den eindeutigen Wert aus $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. for den $v = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)^t$ und $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi$ denjenigen mit $-v = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)^t$. OEdA, annehmen wir an, dass $\theta_2 = \theta_1 + \pi$, ansosten tauschen wir die Rollen von θ_1 unf θ_2.

1. Fall. $\theta_1 > \theta_0$. Dann muss θ an den drei Stellen τ_1, τ_2, τ_3 jeweils einen der beiden Werte θ_1 oder θ_2 annehmen. Insbesondere muss θ an wenigstens zwei der frei Stellen gleich sein, z. B. $\theta(\tau_1) = \theta(\tau_2)$. Da θ monoton ist ($\theta' = \kappa \geq 0$), muss θ auf $[\tau_1, \tau_2]$ konstant sein. Also $\kappa = \theta' = 0$ auf $[\tau_1, \tau_2]$. Dann ist $c_{|[\tau_1, \tau_2]}$ ein Stück von der Gerade.

2. Fall. $\theta_1 = \theta_0$. Dann gibt es noch die Möglichkeit: $\theta(\tau_1) = \theta_1 = \theta_0$, $\theta(\tau_2) = \theta_2$ und $\theta(\tau_2) = \theta_0 + 2\pi$. Wieder wegen der Monotonie muss θ auf dem Intervall $[0, \tau_1]$ konstant sein. Dann ist $c_{|[0, \tau_1]}$ ein Stück von der Gerade. ■

Beweis von Lemma 1.47. ■

Theorem 1.48 (Isoperimetrische Ungleichung). *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, berandet von der einfach geschlossenen ebenen Kurve c. Sei $A[G]$ der Flächeninhalt des Gebietes. Dann gilt*

$$4\pi A[G] \le L[c]^2.$$

Gleichheit hilt genau dann, wenn c ein Kreis ist.

Wir brauchen ein Hilfssatz.

Lemma 1.49. *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, berandet von der einfach geschlossenen ebenen Kurve c. Sei $c(t) = (x(y), y(t))^t$ eine periodische Parametrisierung von c mit Periode L, die das Gebiet im mathematisch positiven Sinn umläuft, d.h., mit Umlaufzahl $+1$. Dann gilt:*

$$A(G) = -\int_0^L x'(t)y(t)dt = \int_0^L x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt.$$

Beweis. Es folgt aus dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_G \operatorname{div} X \, dxdy = -\int_0^L \langle X, n(t)\rangle dt$$

mit außerem Normalfeld $-n$. Wähle $X = (x, y)^t$ in obiger Formel. Dann haben wir

$$\int_G \operatorname{div} X \, dxdy = \int_G 2 \, dxdy = 2A[G]$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^L \langle X, n(t)\rangle dt &= \int_0^L \langle \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \rangle dt \\ &= \int_0^L (-x(t)y'(t) + x'(t)y(t))dt\end{aligned}$$

Aslo,

$$2A[G] = \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt.$$

Die beiden anderen Formeln folden durch partielle Integration. ∎

Beweis von Satz 1.48. Sei $c(t)(x(t), y(t))^t$ Parametrisierung von c nach Bogenlänge mit Periode L. Es ist klar, dass $L = L[c]$. Wir nehmen an, dass c das Gebiete im mathematisch positiven Sinn umldirauft, ansonst betrachten wir $\bar{c}(t) = c(-t)$. Wir betracten die komplexwertige Funktion

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad z(t) = x(\frac{L}{2\pi}t) + iy(\frac{L}{2\pi}t).$$

z ist eine periodische Funktion mit Periode 2π. Wir entwicheln z in eine Fourier-Reihe

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit den Fourier-Koeffiziten $c_k \in \mathbb{C}$. Wir könenn die Länge von c, $L[c] = L$ durch die Fourier-Koeffiziten c_k ausdrüchen

$$L^2 = L[c]^2 = (2\pi)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |c_k|^2. \tag{1}$$

Für den Flächeninhalt von G, $A[G]$, können wir mit hilfe des Lemma 1.49 durch die Fourier-Koeffiziten c_k ausdrüchen

$$A[G] = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 \tag{2}$$

Von (1) und (2) erhalten wir

$$\frac{A[G]}{\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2},$$

und damit

$$4\pi A[G] \leq L[c]^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|c_k|^2 = \frac{L[c]^2}{(2\pi)^2},$$

d.h., genau dann, wenn all $c_k = 0$ für $k \neq 0, 1$. Die heißt gerade

$$z(t) = c_0 + c_e^{it},$$

d.h., c beschreibt einen Krei. ∎

Beweis von (1). Einerseits gilt

$$\int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} (\frac{L}{2\pi})^2 \|c' \frac{Lt}{2\pi})\|^2 = \frac{L^2}{2\pi}.$$

Andererseits gilt

$$z'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ike^{ikt}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} z'(t)\bar{z}'(t) dt &= \int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_l kle^{i(k-l)t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} |c_k|^2 k^2 dt. \end{aligned}$$

∎

Beweis von (2). Gemäß Lemma 1.49 gilt

$$\begin{aligned} 2A[G] &= \int_0^L (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt \\ &= \int_0^L \Re(z(\frac{2\pi t}{L})\frac{2\pi t}{L} i\bar{z}'(\frac{2\pi t}{L}))dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Re(z(s)i\bar{z}'(s))ds \\ &= \int_0^{2\pi} \Re(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iks} i \sum_{l=-\infty}^{\infty} \bar{c}_l(-i)le^{ils})ds \\ &= \Re\int_0^{2\pi} \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} lc_k\bar{c}_k e^{i(k-l)}ds \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 2\pi. \end{aligned}$$

■

1.5. **Raumkurven.**

Definition 1.50. Eine parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ ist parametrisierte Raumkurve. Analog sind reguläre parametrisierte Raumkuren, Raumkurven und orientierte Raumkurven definiert.

Jetzt haben wir ein Problem, den Normalenvektor zu definieren.

Definition 1.51 (Krümmung einer Raumkurve)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Die Funktion $\kappa : I \to \mathbb{R}, \kappa(t) := \|c''(t)\|$ heiß Krümmung von c.

Bemerkung. a) Die Krümmung von c ist somit eine numerisch Funktion auf I, die nichtnegativ ist. Ferner, verschwindet c'' nirgends auf I, so ist $\kappa \in C^\infty$.

b) Jetzt die Orientierung hat "kein Sinn". Sei $\bar{c} : -I \to \mathbb{R}^3$ die durch $\bar{c}(t) := c(-t)$ definierte Abbildung, dann ist $\bar{c}$ nach Bonglänge parametrisiert und ihre Krümmung $\bar{\kappa}$ ist gegeben durch

$$\bar{\kappa}(t) = \kappa(-t)$$

für alle $t \in -I$.

c) Da die Ebene im 3-dimensioanlen Raum enthalten ist, etwa als $x - y$-Ebene, können wir ebene Kurven auch als Raumkurven ansehen. Somit wir jetzt für ebene Kurven zwei verschieden Definitionen der Krümmung. Ist $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve mit Krümmung $\tilde{\kappa} : I \to \mathbb{R}$, und ist $c = (\tilde{c}, 0) : I \to \mathbb{R}^3$ dieselbe parametrisierte Kurve, aufgefasst als Raumkurve mit Krümmung $\kappa : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\kappa(t) = \|c''(t)\| = \|(\tilde{c}''(t), 0)\| = \|\tilde{c}''(t)\| = |\tilde{\kappa}(t)|.$$

Definition 1.52 (Normalvektor)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \to I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt

$$n(t_0) := \frac{c''(t_0)}{\kappa(t_0)} = \frac{c''(t_0)}{\|c''(t_0)\|}$$

der Normalenvektor von c in t_0.

Definition 1.53 (Binormalvektor)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ und $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt

$$b(t_0) := c'(t_0) \times n(t_0)$$

der Binormalenvetor von c in t_0.

Definition 1.54. Die Orthonormalbasis $\{c'(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ heißt *begleitendes Dreibein* von c in t_0.

Definition 1.55 (Windung)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Sei $t_0 \in I$ mit $\kappa(t_0) \neq 0$. Sei $\{c'(t_0), n(t_0), b(t_0)\}$ das begleitendes Dreibein von c in t_0. Dann heißt

$$\tau(t_0) := \langle n'(t_0), b(t_0)\rangle$$

die *Windung* (oder auch die *Torsion*) von c in t_0.

Beispiel. (Schraubenlinie). Sei $c(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$ für $I = \mathbb{R}$. Aus $c'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, t)$ folgt $\|c'(t)\| = 1$ für alle t, d.h., c ist nach Bogenlänge parametrisiert. Aus $c''(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 0)$ folgt für die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Spur von $[c]$ heißt die Schraubenlinie. Ihre Normalenvektor und bzw. Binormalenvektor sind

$$n(t) = \frac{1}{\kappa(t)} c''(t) = -(\cos t, \sin t, 0),$$

bzw,

$$b(t) = c'(t) \times n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1).$$

Aus $n'(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$ gilt

$$\tau(t) = \langle n', b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin^2 t + \cos^2 t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proposition 1.56 (Frenet-Gleichungen der Raumkurve)**.** $c : I \to \mathbb{R}^3$ *eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung,* $\kappa(t) > 0$ *für alle* $t \in I$. *Sei* (c', n, b) *das begleitende Dreibein von* c. *Sei* τ *die Windung. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c' \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Gleichung $(c')' = \kappa \cdot n$ ise gerade die Definition des Normalenvektors. Die zweite Spalte ergibt sich aus $\langle n', c'\rangle = \langle n, c'\rangle' - \langle n, c''\rangle = -\kappa$, aus $\langle n', n\rangle = \frac{1}{2}\langle n, n\rangle' = 0$ und aus der Definition von τ, d.h., $\langle n', b\rangle = \tau$.

Wegen $\langle b', n\rangle = \langle b, c'\rangle' - \langle b, c''\rangle = 0 - \kappa\langle b, n\rangle = 0$, $\langle b', n\rangle = \langle b, n\rangle' - \langle b, n'\rangle = -\tau$ und $\langle b', b\rangle = 0$, folgt die dritte Spalte. ■

Definition 1.57 (Die Schmiegebene)**.** $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung, $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in I$. Die von $c'(t)$ und $n(t)$ aufgespannte Ebene heißt *Schmiegebene* von c in t.

Proposition 1.58 (Invarianz der Krümmung und Torsion der euklidischen Bewegung)**.** *$c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit positiver Krümmung und A eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung. Dann ist $A \circ c : I \to \mathbb{R}^3$ nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve und es gilt für die Krümmung bzw. die Windung von $A \circ c$:*

$$\kappa_{A\circ c} = \kappa, \quad \tau_{A\circ c} = \tau.$$

Satz 1.59 (Hauptsatz der Raumkurventheorie)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ C^∞ Funktionen, mit $f > 0$. Dann existiert eine nach bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit*

$$\kappa = f, \quad \tau = g.$$

Diese Kurve ist bis auf Dahinterschaltung von orientierungserhaltende euklidische Bewegung, d.h., sind c_1 und c_2 zwei Lösungen, so existiert eine eindeutige orientierungserhaltende euklidische Bewegung A von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$c_2 = A \circ c_1.$$

2. Klassische Flächentheorie

2.1. Reguläre Flächen.

Definition 2.1 (Reguläre Fläche)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. S heißt eine *reguläre Fläche*, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung V von p im $\mathbb{R}^3$ gibt, falls es ferner eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^3$ gibt, so dass gilt

(i) $F(U) = S \cap V$ und $F : U \to S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.
(ii) Die Jacobimatrix $D_u F$ hat für jeden Punkt $u \in U$ Rang 2.

Bemerkung. a). Eine reguläre Fläche kann sich nicht selbstschneiden.
b). $D_u F(e_1)$ and $D_u F(e_2)$ sind unabhängig.

Definition 2.2 (Parametrisierung)**.** Die Abbildung $F : U \to S \cap V$ aus Definition 2.1 oder auch als das Tripel (U, F, V) heißt *lokale Parametrisierung* von S um p. Die Menge $S \cap V$ heißt Koordinatenumgebung von p. Die Komponenten u^1 und u^2 von $u = (u^1, u^2)$ heißen dann auch Koordinaten des Punktes $F(u) \in S$ (bzgl. der Parametrisierung F).

Beispiel 2.3. 1). Affine Ebene.
Die affine Ebene durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^3$, aufgespannt durch die linear unabhängigen Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ ist die Menge

$$S = \{p + u^1 \cdot X + u^2 \cdot Y \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Wir kommen mit einer einzigen Parametrisierung aus. Setzt $V := \mathbb{R}^3$, $U := \mathbb{R}^2$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$

$$F(u^1, u^2) := p + u^1 \cdot x + u^2 \cdot Y.$$

2). Funktionsgraphen.
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Der Funktionsgraph von f ist definiert durch

$$S = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Setzte $V := \mathbb{R}^3$, $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Dann gilt $F(U) = S = S \cap V$. F is glatt und ihre Umkehrabbildung $G : S \to U$, $G(x, y, z) = (x, y)$ ist ebenfalls stetig. Also (i) ist erfüllt. Für (ii) hat die Funktion

$$D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Rang 2.

3). Die Sphäre

$$S = \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Setzte $V := V_3^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$. Dann ist $\mathbb{S}^2 \cap V_3^+$ der graph der Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)} \quad \text{für } x^2+y^2 < 1.$$

Wie Beispiel 2) definiert

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1\}$$

und

$$F_3^+(x,y) = (x,y,\sqrt{1-(x^2+y^2)}).$$

$F_3^+; U \to \mathbb{S}^2 \cap V_3^+$ ist eine lokale Parametrisierung . Analog erhalten wir die Punkte aus $\mathbb{S}^2 \cap V_3^-$, $V_3^- := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z < 0\}$ durch die Parametrisierung

$$\begin{array}{rcl} F_3^- : U & \to & \mathbb{R}^3 \\ F_3^-(x,y) & = & (x,y,-\sqrt{1-(x^2+y^2)}). \end{array}$$

Und auch

$$\begin{array}{rcl} V_1^\pm : & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \pm x > 0\} \\ V_2^\pm : & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \pm y > 0\} \\ . & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} F_1^\pm : U \to \mathbb{R}^3 & F_1^\pm(y,z) = (\pm\sqrt{(1-(y^2+z^2)}, y, z) \\ F_2^\pm : U \to \mathbb{R}^3 & F_1^\pm(x,z) = (x, \pm\sqrt{1-(x^2+z^2)}, z). \end{array}$$

Jeder Punkt $p \in \mathbb{S}^2$ kommt in wenigstens einer der Mengen $V_i^\pm$ vor, also ist $\mathbb{S}^2$ eine reguläre Fläche.

Proposition 2.4 (als Niveaumenge)**.** *Sei $V_0 \in \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : V_0 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir setzen*

$$S := \{(x,y,z) \in V_0 \,|\, f(x,y,z) = 0\}.$$

Falls für alle $p \in S$ gilt

$$\mathrm{grad} f(p) \neq 0,$$

dann ist S eine reguläre Fläche.

Beweis. Sei $p := (x_0,y_0,z_0)^t \in S$. Wgene der Voraussetzung

$$\mathrm{grad} f(p) = (\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p))^t \neq (0,0,0)^t,$$

können wir oBdA annehmen, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizierte Funktionen existiert es eine offene Umgebung $V \subset V_0$ von p, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$S \cap V = \{(x,y,g(x,y))^t \mid (x,y)^t \in U\}.$$

Setzen wir $F : U \to V$ mit

$$F(x,y) := (x,y,g(x,y))^t,$$

so erhalten wir eine lokale Parametrisierung von S.

$\blacksquare$

Beispiel. 4) Ellipsoid: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Setze $V_0 = \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Also

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y,z) = 0\}.$$

Wir können überprüfen, dass

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}) \neq 0 \text{ für } (x,y,z) \in S.$$

Proposition 2.5. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$. Dann gibt es eine Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$, so dass $S \cap V$ der Funktionsgraph einer glatten Funktion ist, die eine der folgenden drei Formen hat: $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$, $x = h(y,z)$.*

Beispiel. Der Doppelkegel.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2\}$$

ist keine reguläre Fläche. Aber $S \backslash \{0\}$ ist eine reguläre Fläche.
Beweis. Fläche S ist Nullstellengebilde der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ f(x,y,z) &= x^2 + y^2 - z^2, \end{aligned}$$

definiert. Der Gradient

$$\mathrm{grad}\ f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)^t$$

verschwindet nur in $(0,0,0)^t$. Also man kann mit Proposition 2.4 zeigen, dass $S \backslash \{0\}$ eine reguläre Fläche ist. Proposition 2.4 sagt darüber nicht aus, dass die Funktion f könnte für den Punkt $(0,0,0)^t$ ungeschickt gewählt sein.

Angemonnen, dass S wäre eine reguläre Fläche. Dann gäbe es eine lokale Parametrisierung (F, U, V) um $p = (0,0,0)^t$. Setze $u_0 = F^{-1}((0,0,0)^t)$. OBdA können wir annemhen, dass U eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt u_0 ist. Da $V \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von $p = (0,0,0)^t$, sind alle Vektoren $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ mit hinrechend kleiner Länge in V enthalten. Insbesondere liegen in $S \cap V$ Punkte $p_i = (x_i, y_i, z_i)^t$ $(i = 1,2)$ mit $z_1 > 0$ und $z_2 < 0$.

Seien $u_i := F^{-1}(p_i)$ $(i = 1,2)$. In U verbinden wir u_1 durch einen stetigen Weg c mit u_2 ohne durch u_0 zu laufen. Der Bildweg $F \circ c$, der p_1 und p_2 verbindet, muss aber, wegen des Zwischenwertsatzes, durch $p = (0,0,0)^t = F(u_0)$ laufen. Ein Widerspruch $\blacksquare$

Proposition 2.6. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S. Sei $W \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, und $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $\varphi(W) \subset S \cap V$. Dann ist φ als Abbildung von W nach $\mathbb{R}^3$ glatt genau dann, wenn $F^{-1} \circ \varphi : W \to U \subset \mathbb{R}^2$ glatt ist.*

Beweis.
" $\Leftarrow$ " $\Psi = F^{-1} \circ \varphi$ ist glatt, so ist $\varphi = F \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen ebenfalls glatt.

" $\Rightarrow$ " Sei also $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ glatt. Setze $g := \varphi(p) \in S \cap V$ und $u_0 := F^{-1}(g) \in U$. Schreiben $F(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2))$. Weil das Differential $D_{u_0}F$ maximalen Rang hat, kïnen wir o.E.d.A. annehmen, dass die 2×2- Matrix $(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1,u^2)}, u_0)$ invertierbar ist. Definieren die Abbildung:

$$\begin{aligned} G : U \quad &\times \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ G(u^1, u^2, t) \quad &= \quad (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) + t) \end{aligned}$$

Ihr Differential an der Stelle $(u^1, u^2, t) = (u_0^1, u_0^2, 0)$ ist:

$$D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial x}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial y}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial z}{\partial u^2}(u_0) & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist:

$$\det D_{(u_0^1, u_0^2, 0)}G = \det(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u^1, u^2)}(u_0)) \neq 0$$

Nach dem Umkehrsatz haben wir eine offene Umgebung $U_1 \subset U \times \mathbb{R}$ von $(u_0^1, u_0^2, 0)$ und eine offene Umgebung $V_1 \subset V$ von g, so dass $G_{|U_1} : U_1 \to V_1$ ein Diffeomorphismus ist. Setze $W_1 := \varphi^{-1}(V_1)$. Dann ist W_1 eine offene Umgebung von p. Für alle $p' \in W_1$ gilt:

$$G^{-1} \circ \varphi(p') = (F^{-1} \circ \varphi(p'), 0)$$

denn $G(F^{-1} \circ \varphi(p'), 0) = F \circ F^{-1} \circ \varphi(p') = \varphi(p')$. Weil $G^{-1} \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt ist, ist $F^{-1} \circ \varphi$ als die Erste der Zweite Koordinatenfunktionen auch glatt auf W_1. Nun ist W_1 eine offene Umgebung des beliebigen vorgegebenen Punktes p und die Aussage ist bewiesen. ■

Korollar 2.7. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, seien (U_1, F_1, V_1), (U_2, F_2, V_2) lokale Parametrisierungen von S. Dann ist $F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ glatt.*

Beweis. Anwendung von Prop.2.6. auf $W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$, $\varphi = F_1$ und $(U, F, V) = (V_2, F_2, V_2)$ ■

Proposition 2.8. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$, und $f : S \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

1). Es gibt eine offene Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$ und eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von $f_{S \cap V}$ auf V, die um p glatt ist.

2). Es gibt eine lokale Parametrisierung (U, F, V) mit $p \in V$, so dass $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.

3). Für alle lokalen Parametrisierungen (U, F, V) mit $p \in V$, so dass $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.

Beweis.
a. "1. impliziert 3." Da F und $\tilde{f}$ glatt um p sind, also ist auch

$$f \circ F = \tilde{f} \circ F$$

als Verkettung eine glatte Abbildung auf einer Umgebung von $F^{-1}(p)$

b. "3. impliziert 2." trivialerweise

c. "2. impliziert 1." Aus dem Beweis von Prop.2.6. wissen wir, dass

$$G(u^1, u^2, t) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) + t)$$

ein lokaler Diffeomorphismus ist. Wir setzen:

$$g(u^1, u^2, t) := f \circ F(u^1, u^2) = f \circ G(u^1, u^2, 0)$$

g ist glatt nahe $(F^{-1}(p), 0)$. Setzen $\tilde{f} := g \circ G^{-1}$. $\tilde{f}$ ist glatt um p und ist eine Fortsetzung von f, denn:

$$\tilde{f}_{|S \cap V} = f_{|S \cap V}$$

■

Definition 2.9. Gelten die äquivalenten Bedingungen 1). bis 3). aus Propostion 2.8, so nennen wir f glatt nahe p.

Definition 2.10. Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Sei $p \in S_1$ und $f : S_1 \to S_2$ eine Abbildung. We nennen f glatt nahe p, falls es eine lokale Parametrisierung (U_1, F_1, V_1) von S_1 um p gibt und eine lokale Parametrisierung (U_2, F_2, V_2) von S_2 um $f(p)$ derart, dass

$$F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \to V_2$$

nahe p glatt ist.

Bemerkung. Sind neben (U_1, F_i, V_i) auch $(\widetilde{U}_1, \widetilde{F}_i, \widetilde{V}_i)$ lokale Parametrisierung von S_i, so ist mit $F_2^{-1} \circ f \circ F_1$ auch

$$\widetilde{F}_2^{-1} \circ f \circ \widetilde{F}_1 = (\widetilde{F}_2^{-1} \circ F_2) \circ (F_2^{-1} \circ f \circ F_1) \circ (F_1^{-1} \circ \widetilde{F}_1)$$

glatt ist.

Definition 2.11. Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Eine Abbildung $f : S_1 \to S_2$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f auch f^{-1} glatt sind. Existiert ein solcher Diffeomorphismus $f : S_1 \to S_2$, dann heißen die Flächen S_1 und S_2 diffeomorph.

Beispiele a). Sei $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, $a,b,c > 0$ ein Ellipsoid. Sei $S_2 = S^2$ die Sphäre. Dann sind S_1 und S_2 diffeomorph. Als Diffeomorphismus nehmen wir z.B.

$$\begin{aligned} f : S_1 &\to S_2 \\ f(x,y,z) &= (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}) \end{aligned}$$

b). Sei $S_1 := \{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y) \in U\}$ der Graph einer C^∞-Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$. Sei $S_2 = U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ das Ebenenstück U, aufgefasst als Fläche in $\mathbb{R}^3$. Dann sind S_1 und S_2 diffeomorph vermöge des Diffeomorphismus:

$$\begin{aligned} f : S_1 &\to S_2 \quad f(x,y,z) = (x,y,0) \\ f^{-1} : S_2 &\to S_1 \quad f(x,y,0) = (x,y,\varphi(x,y)) \end{aligned}$$