1. Topologische Grundbegriffe

Definition 1.1 (Topologie)**.** Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Kollektion $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, so dass

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$,
(ii) $O_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$, impliziert $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$,
(iii) O_1, $O_2 \in \mathcal{O}$ impliziert $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

Die Mengen $O \in \mathcal{O}$ heißen *offene* Mengen. $B \subset X$ heißt it abgeschlossen, wenn $X \setminus B$ offen ist.

Eine Topologie $\mathcal{O}_1$ heißt *feiner* als eine Topologie $\mathcal{O}_2$ (und $\mathcal{O}_2$ heißt gröber als $\mathcal{O}_1$) falls $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ gilt.

Sei $Y \subset X$ und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X. Dann heißt $\mathcal{O}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{O}\}$ von $\mathcal{O}$ auf Y *induzierte Topologie* oder *relative Topologie* .

Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt *Basis* der Topologie $\mathcal{O}$, falls jedes $O \subset \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

Eine Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt *Subbasis* einer Topologie $\mathcal{O}$, wenn die Kollektion aller endlichen Schnitte von Mengen in $\mathcal{S}$ eine *Basis* der Topologie bildet.

Eine topologische Raum X heißt *Hausdorff*, falls für je zwei Punkte p_1, $p_2 \in X$ offene Mengen O_1, $O_2 \in \mathcal{O}$ so existieren, dass $p_1 \in O_1$, $p_2 \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ gilt.

Beispiel 1.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die Kugeln $B_\varepsilon(x)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, Basis der metrischen Topologie. Die metrische Topologie des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine abzählbare Basis.

Definition 1.3 (Umgebung, Stetigkeit)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $x \in X$, $U \subset X$ mit $x \in U$. Dann heißt U *Umgebung* von x, wenn es $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in V \subset U$ gibt. Die Menge aller Umgebungen von x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$.

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt in $x \in X$ stetig, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}_Y(f(x))$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V$ gibt. f heißt stetig, wenn f in allen Punkten $x \in X$ stetig ist. f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und f und f^{-1} stetig sind.

Definition 1.4 (Initialtopologie, Produkttopologie)**.** Sei X eine Menge und seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X \to X_i$ Abbildungen. Dann existiert eine **gröbste** Topologie auf X, die *Initialtopologie*, so dass alle Abbildungen $f_i : X \to X_i$ stetig werden. $\mathcal{S} := \{f_i^{-1}(O_i) : O_i \in \mathcal{O}_i, i \in I\}$ ist eine Subbasis dieser Topologie.

Spezialfall relativer Topologie: Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge von X. Dann ist $\mathcal{O}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{O}_X\}$ eine Toplogie, die *relative Topologie.* Diese ist die initiale Topologie von $i : Y \subset X$.

Spezialfall Produkttopologie: Ist $X := X_1 \times X_2 \times \ldots$ und f_i die Projektion auf den Faktor i, so ist $\mathcal{S} := \{X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \ldots : O_i \subset X_i \text{ offen}, i \in I\}$. Ist $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, so ist $\{O_1 \times \ldots \times O_n : O_i \in \mathcal{O}_i\}$ eine Basis.

Definition 1.5 (Finale Topologie, Quotiententopologie)**.** Sei Y eine Menge und seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Seien $f_i : X_i \to Y$ Abbildungen. Dann existiert eine **feinste** Topologie auf Y, die finale Topologie, so dass alle f_i stetig werden, nämlich $\mathcal{O} := \{O \subset Y : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I\}$.

Spezialfall Quotientenraum: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $\bar{x}$ die Äquivalenzklasse von x und $\bar{X} := \{\bar{x} : x \in X\}$. Definiere die Projektion $p : X \to \bar{X}$ durch $x \mapsto \bar{x}$. Die zugehörige finale Topologie heißt Quotiententopologie. $U \subset \bar{X}$ ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Beispiele 1.6.

(i) $X = \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, $\bar{X} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Vermöge $h \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ mit $h(\bar{x}) = e^{2\pi i x}$ sehen wir, dass $\bar{X}$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ ist.
(ii) $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, $x \sim y \iff x = \pm y$. $\mathbb{P}^n := \mathbb{S}^n/\sim$ ist der n-dimensionale reelle projektive Raum.

Definition 1.7 (Kompaktheit)**.** Eine Überdeckung $M \subset \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ heißt *lokale endlich*, falls für jedes $p \in M$ eine Umgebung U gibt mit endlicher Menge $\{\alpha \mid A_\alpha \cap U \neq \emptyset\}$.

Eine Überdeckung $M \subset \cup_{\alpha\in J} B_\alpha$ heißt *Verfeinerung* der Überdeckung $M \subset \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$, wenn es zu jedem $\beta \in J$ ein $\alpha \in I$ gibt mit $B_\beta \subset A_\alpha$.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ ist *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche offene Verfeinerung besitzt.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *überdeckungskompakt*, wenn jede Überdeckung durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Ein überdeckungskompakter Raum heißt *kompakt*, falls er ein Hausdorffraum (=T_2-Raum) ist, d. h. falls je zwei Punkte $x \neq y \in X$ disjunkte Umgebungen besitzen.

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so sind Kompaktheit, Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent.

Definition 1.8 (Überlagerung)**.** Seien X, Y topologische Räume. Dann heißt $p : X \to Y$ *Überlagerung*, wenn

(i) p stetig und surjektiv ist,
(ii) jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, so dass $p^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$ mit paarweise disjunkten offenen $U_i \subset X$ ist und $p|_{U_i} : U_i \to V$ für alle $i \in I$ Homöomorphismen sind.

Beispiel 1.9.
(i) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{it}$,
(ii) $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $p(x) = [x]$. „2-blättrige Überlagerung“.

2. Mannigfaltigkeiten

Definition 2.1 (Mannigfaltigkeit)**.**

(i) Ein topologischer Raum M heißt *lokal euklidisch* von der Dimension m, falls M mit offenen Mengen überdeckt werden kann, von denen jede zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ homöomorph ist.
(ii) Ein Paar (U, φ), wobei $U \subset M$ offen ist und $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus (wie oben) ist, heißt *Karte* von M. Eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Karten heißt *Atlas* (oder $C^0 - Atlas$) von M, falls $M = \bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U$ gilt.
(iii) M heißt *topologischer Manigfaltkeit*, wenn M ist einer (parakompakte) Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis ist und einen n-dimensionalen Atlas hat.
(iv) Zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) heißen *C^k-verträglich*, $k \geq 1$, wenn die Kartenwechsel
$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$
ein C^k-Diffeomorphismus ist. Ein Atlas heißt von der *Klasse C^k*, falls je zwei seiner Karten C^k-verträglich sind.
(v) Ist $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas, so gibt es genau einen maximalen C^k-Atlas $\mathcal{A}_0$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$; er besteht aus allen Karten, welche mit den Karten von $\mathcal{A}$ auch C^k-verträglich sind.
(vi) Eine *differenzierbare (C^k-)Struktur* auf M ist ein maximaler C^k-Atlas auf M.
(vii) Ein lokal-euklidischer Hausdorff-Raum mit einer differenzierbaren Struktur heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Beispiel 2.2.
(i) $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, id)$
(ii) die Sphäre. Die Einheitssphŕe $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 + \cdots x_m^2 = 1\}$ mit Radius 1 bilden die stereographischen Projektionen p_N vom Nordpol $N = (1, 0, \cdots, 0)$ und p_S vom Südpol $S = (-1, 0, \cdots, 0)$ aus ein Atlas. Die jeweiligen Kartengebiete sind $U_N = \mathbb{S}^m \backslash N$ bzw. $U_S = \mathbb{S}^m \backslash S$. In Formeln sind p_N und p_S gegeben durch
$$p_N(x) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \cdots, x_m); \quad p_S(x) = \frac{1}{1 + x_0}(x_1, \cdots, x_m).$$

Der Atlas $\{(p_N, U_N), (p_S, U_S)\}$ ist C^∞.

(iii) Die projektiven Räume $\mathbb{K}P^n$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Nach Definition ist $\mathbb{K}P^n$ die Menge der eindimensionalen $\mathbb{K}$-linearen Unterräume des $\mathbb{K}^{n+1}$. Ein Punkt L in $\mathbb{K}P^n$ ist somit festgelegt durch seine homogenen Koordinaten $L = [x_0, \cdots, x_n]$, wobei $(x_0, \cdots, x_n)$ ein Vektor in $L \backslash \{0\}$ ist. Auf den Mengen

$$U_i = \{[x_0, \cdots, x_n] \in \mathbb{K}P^n \mid x_i \neq 0\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

definieren wir Bijektionen

$$b_i : U_i \to \mathbb{K}^n, \quad b_i([x]) = (x_0 \cdots, \hat{x}_i, \cdots x_n) \frac{1}{x_i}.$$

Man sieht nun leicht, da es genau eine Topologie auf $\mathbb{K}P^n$ gibt, so da die U_i offen und die b_i Homöomorphismen sind für $0 \leq i \leq n$. Die Kartenwechsel $b_i \circ b_j^{-1}$ sind glatt. Also ist $\mathbb{K}P^n$ zusammen mit $\mathcal{A} = \{(b_i, U_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension rn mit $r := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$.

(iv) Sei M Mannigfaltigkeit und $W \subset M$ offen. Dann ist W mit der Relativtopologie eine topologische Mannigfaltigkeit. Die Menge aller Karten $x : U \to U_0$ von M (in der C^∞-Struktur von M) mit $U \subset W$ ist eine C^∞-Struktur für W, also ist W in kanonischer Weise eine Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.3 (Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{m+n}$)**.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ mit

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$$

gibt. Ein solches M besitzt einen C^k-Atlas, nämlich

$$\mathcal{A} := \{(U \cap M, \varphi|_{U \cap M}) \colon \text{wobei } (U, \varphi) \text{ wie oben}\}.$$

M ist lokal euklidisch von der Dimension m. Es gilt

$$(\psi|_{V \cap M}) \circ (\varphi|_{U \cap M})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}|_{(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \varphi(U \cap V)} \in C^k.$$

Bemerkung 2.4. Der Einbettungssatz von Whitney besagt, dass jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit (bis auf einen Diffeomorphismus) eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$ ist, falls $n \gg 1$ genügend groß ist.

In der folgenden Definition verlangen wir nicht, dass f stetig ist. Stattdessen fordern wir die Existenz gewisser Umgebungen.

Die Forderung, dass $f(U)$ offen ist, ist nötig, da wir sonst die Dimension im Zielraum erhöhen könnten.

Definition 2.5 (Differenzierbare Abbildungen)**.**
Seien M, N C^k-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt von der Klasse C^k, falls es zu jedem $x \in M$ Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N mit $x \in U$, $f(U) \subset V$ gibt und $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ ist.

Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls von der Klasse C^k, $k \geq 1$, so heißt f Diffeomorphismus von der Klasse C^k.

Gibt es für jedes $x \in M$ eine Umgebung U, so dass $f(U)$ offen und $f|_U : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist, so heißt f ein lokaler Diffeomorphismus.

Bemerkung 2.6.

(i) Ist f von der Klasse C^k, so ist f stetig: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ist stetig, also auch $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$.

(ii) Ist f von der Klasse C^k, so ist $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^k$ für alle Karten (U, φ), (V, ψ) der betreffenden differenzierbaren Strukturen. (Falls U klein genug ist, so dass die Komposition wohldefiniert ist.)

Beweis. Sei $x \in U$, $f(x) \in V$ und $z := \varphi(x)$. Nach Definition existieren Karten (U_0, φ_0) und (V_0, ψ_0) mit $x \in U_0$, $f(U_0) \subset V_0$, so dass $\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1} \in C^k$ ist. Wir wählen eine offene Umgebung

W von z mit $\varphi^{-1}(W) \subset U_0 \cap U$ und $f(\varphi^{-1}(W)) \subset V \cap V_0$. In W gilt dann

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \underbrace{(\psi \circ \psi_0^{-1})}_{\in C^k} \circ \underbrace{(\psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1})}_{\in C^k} \circ \underbrace{(\varphi_0 \circ \varphi^{-1})}_{\in C^k} \in C^k.$$

Dies beendet den Beweis, da $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ genau dann in C^k ist, wenn dies lokal um jeden Punkt herum gilt. Dies haben wir aber gerade nachgewiesen. $\square$

(iii) Eine Karte ist eine differenzierbare Abbildung, da $\mathrm{id} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ dies ist.

Beispiel 2.7 (Kartesisches Produkt)**.** Seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ zwei C^k-Mannigfaltigkeiten. Dann ist ein C^k-Atlas auf $M \times N$ durch

$$\{(U \times V, \varphi \times \psi) \colon (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

mit $(\varphi \times \psi)((x, y)) = (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gegeben.

Definition 2.8 (Zurückziehen einer differenzierbaren Struktur)**.** Sei M ein topologischer Raum, N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$ und $h : M \to N$ ein Homöomorphismus. Definiere

$$h^*\mathcal{A} := \big\{ \big(h^{-1}(U), \varphi \circ h\big) : (U, \varphi) \in \mathcal{A} \big\}$$

Bemerkung 2.9. Eine zurückgezogene Struktur $h^*\mathcal{A}$ ist ein C^k-Atlas auf M und $h : (M, h^*\mathcal{A}) \to (N, \mathcal{A})$ ist ein Diffeomorphismus.

Sei $M = N = \mathbb{R}$ und $h(x) = x^3$. Sei $\mathcal{A}$ die Standardstruktur auf $\mathbb{R}$ mit der Identität als Karte. Dann ist $(\mathbb{R}, h^*\mathcal{A}) \neq (\mathbb{R}, \mathcal{A})$, da h kein Diffeomorphismus von $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ist.

Beweis. Für die Kartenwechselabbildungen gilt

$$(\psi \circ h) \circ (\varphi \circ h)^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} \in C^k.$$

Somit ist $h^*\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas.

Wähle die Karten φ und $\varphi \circ h$. Dann gelten

$$\varphi \circ h \circ (\varphi \circ h)^{-1} = \mathrm{id} \in C^k$$

und analog $(\varphi \circ h) \circ h^{-1} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id} \in C^k$ und somit ist h ein Diffeomorphismus. $\square$

Ein Atlas legt im folgenden Sinne bereits die Topologie fest:

Lemma 2.10 (Konstruktion einer Manigfaltigkeit durch Karten)**.** *Gegeben seien Bijektionene $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ ($\alpha \in A$), wobei U_α Mengen und $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ offen sind. Es gelte:*

(i) $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist offen im $\mathbb{R}^n$ für alle $\alpha, \beta \in A$.
(ii) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ stetig für alle $\alpha, \beta \in A$. Dann gibt es auf $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ genau eine Topologie so dass die U_α offen sind und φ_α homeomorph.

Beweis. Wir definieren

$$\mathcal{O} := \{U \subset M \mid \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \text{ offen im } \mathbb{R}^n \text{ für alle } \alpha \in A\}.$$

Wir werden zeigen, dass $\mathcal{O}$ ist die gesuchte Topologie.

Schritt 1. $\mathcal{O}$ ist Topologie.

(i) $\varphi_a(\emptyset \cap U_\alpha) = \emptyset$ ist offen. Daraus folgt $\emptyset \in \mathcal{O}$.
(ii) $\varphi_\alpha(M \cap U_\alpha) = V_\alpha$ ist offen nach Voraussetzung. Also $M \in \mathcal{O}$.
(iii) Für $W_i \in \mathcal{O}$, $i \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha((\cup_{i \in I} W_i) \cap U_\alpha) &= \varphi_\alpha(\cup_{i \in I}(W_i \cap U_\alpha)) = \cup_{i \in I} \varphi_\alpha(W_i \cap U_\alpha) \\ \varphi_\alpha((\cap_{i \in I} W_i) \cap U_\alpha) &= \varphi_\alpha(\cap_{i \in I}(W_i \cap U_\alpha)) = \cap_{i \in I} \varphi_\alpha(W_i \cap U_\alpha) \end{aligned}$$

Schritt 2. $U_\alpha \in \mathcal{O}$ für alle $\alpha \in A$.
$\varphi(U_\alpha \cap U_\beta)$ offen nach Voraussetzung (i) für alle $\beta \in A$. Also $U_\alpha \in \mathcal{O}$.

Schritt 3. $\varphi_\beta : U_\beta \to V_\beta$ is homomorph für alle $\beta \in A$.
Sei $V \subset V_\beta$ relative offen, also V offen im $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\varphi_\beta^{-1}(V) \cap U_\alpha) &= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(V \cap \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha)) \\ &= \text{relative offen in } \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \\ &= \text{offen im } \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Also ist $\varphi_\beta^{-1}(V) \in \mathcal{O}$ wie verlangt, d.h., φ_β stetig ist. φ_β^{-1} stetig ist trivial: sei $U \in \mathcal{O}$. Dann ist $(\varphi_\beta^{-1})^{-1}(U \cap U_\beta) = \varphi_\beta(U \cap U_\beta)$ offen im $\mathbb{R}^n$.

Schritt 4. Eindeutigkeit. Sei $\mathcal{O}'$ eine Topologie mit den geforderten Eigenschaften. Für $W \in \mathcal{O}'$ ist dann $W \cap U_\alpha$ relativ offen in U_α bzgl. $\mathcal{O}'$, und somit $\varphi_\alpha(W \cap U_\alpha)$ relative offen in V_α, also offen im $\mathbb{R}^n$, da φ_α homeomorph ist. Also gilt $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

Sei nun $U \in \mathcal{O}$, also $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ offen in $\mathbb{R}^n$ für alle α. Dann ist $U \cap U_\alpha$ relativ offen in U_α bzgl $\mathcal{O}'$, da φ_α homeomorph ist. Da U_α offen bzgl $\mathcal{O}'$, ist $U \cap U_\alpha \in \mathcal{O}'$ und damit

$$U = \cup_{\alpha \in A}(U \cap U_\alpha) \in \mathcal{O}'.$$

$\square$

Bemerkung 2.11. Gibt es abzählbare Teilmenge $A' \subset A$ mit $M = \cap_{\alpha \in A'} U_\alpha$, so hat M abzählbare Basis.

Wähle dazu für $\alpha \in A'$ abzählbare Basis $\{V_{\alpha,i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ von V_α und definiere

$$\mathcal{B} := \{\varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha,i}) \mid \alpha \in A', i \in \mathbb{N}\}$$

Sei $U \subset M$ offen und $x \in U$. Wähle $\alpha \in A'$ mit $x \in U_\alpha$. Da $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ offen in $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ ist, gibt es $V_{\alpha,i}$ mit $\varphi_\alpha(x) \in V_{\alpha,i} \subset \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$, also

$$x \in \varphi_\alpha^{-1}(V_{\alpha,i}) \subset U.$$

Also ist U Vereinigung von Basismengen.

Bemerkung 2.12. Wenn zusätzlich sind $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ C^k sind für alle $\alpha, \beta \in A$, ist M C^k Manigfaltigkeit.